非线性
积分方程

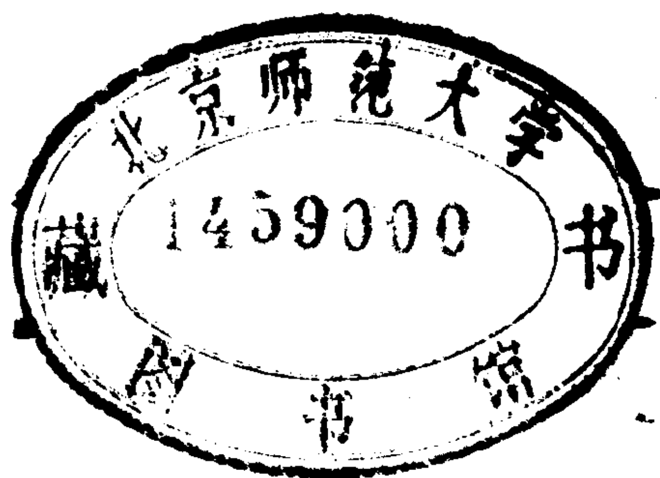
郭大钧　孙经先　著

山东科学技术出版社

非线性积分方程

郭大钧 孙经先 著

7911171/07



山东科学技术出版社

一九八七年·济南

非线性积分方程

郭大钧　孙经先 著

*

山东科学技术出版社 出版
（济南市玉函路）
山东省新华书店发行
山东新华印刷厂印刷

*

850×1168毫米32开本　18印张　396千字
1987年11月第1版　1987年11月第1次印刷
印数1－1500

ISBN7—5331—0169—3/O·17

（平装）书号 13195·179　定价 5.40 元

序

非线性积分方程的研究，起源于本世纪 20～30 年代，如 П.С.Урысон〔1〕*，A. Hammerstein〔1〕. 直到50年代中期，出现了M.A.Красносельский〔1〕和M.M.Вайнберг〔1〕. 这是两部分别利用拓扑方法和变分方法来系统地研究 Fredholm 型非线性积分方程的优秀著作，直到现在还常被人们所引用.70年代初出现的R.K.Miller〔1〕和C.Corduneanu〔1〕，则是系统地研究Volterra型非线性积分方程的专著. 其后，对于非线性积分方程的研究又有许多进展. 例如，大范围变分学的出现，能获得非线性积分方程具有无穷多个解的新结果（如见 A.Ambrosetti和 P.H.Rabinowitz〔1〕，郭大钧〔30〕）.

本书共分十章，前两章属于预备知识. 第四章至第六章是利用拓扑方法研究Fredholm型非线性积分方程.第三章和第七章则是利用变分方法讨论Fredholm型非线性积分方程，其中，第三章使用的是古典变分学（极值理论），第七章使用的是大范围变分学（临界点理论）. 第八章专门讨论Volterra型非线性积分方程，包括为Volterra型方程特有的最大解、最小解以及比较定理等.第九章研究Banach 空间中的积分方程.最后，第十章给出了某些应用，主要是对常微分方程两点边值问题的

*方括号中所指文献可查阅书末参考文献。下同。

应用以及讨论了物理学、化学以及医学等学科中提出的某些非线性积分方程.书中包括了我本人以及我的学生孙经先、黄春朝、白锦东等人近年来所获得的许多结果．本书重点讨论使用拓扑方法和变分方法来研究非线性积分方程．关于利用解析方法来进行讨论，请参看 M.M.Вайнберг 和 B. A. Треногин〔1〕；关于使用正锥、半序来进行研究，请参看郭大钧和 V. Lakshmikantham〔1〕.为了帮助缺乏非线性泛函分析基础知识的读者阅读本书，我们在书尾写了一个附录，罗列了本书所要用到的一些基本概念和结论。

限于作者水平，书中不妥、错误之处在所难免，敬请读者批评指正。

郭大钧

1987年3月20日

于山东大学

目　录

第一章　线性积分方程基础

§1　积分方程和微分方程的关系

在理论和应用中，常用的线性积分方程主要有下列两种类型：

$$u(x)=f(x)+\lambda\int_a^x k(x,\ y)u(y)dy, \tag{1.1}$$

$$u(x)=f(x)+\lambda\int_a^b k(x,\ y)u(y)dy, \tag{1.2}$$

其中 $u(x)$ 是未知的实函数；$k(x,\ y)$ 是已知的二元实函数，通常称它是方程（1.1）（方程（1.2））的核；$f(x)$ 是已知的实函数，称它是方程的自由项（有时也称为是方程的非齐次项）。方程（1.1）叫做是第二类Volterra方程，方程（1.2）叫做是第二类Fredholm方程。

积分方程和微分方程之间，有着密切的联系。以二阶线性常微分方程为例，下面证明：二阶线性常微分方程的初值问题等价于Volterra积分方程（1.1），而二阶线性常微分方程两点边值问题则等价于Fredholm积分方程（1.2）。

首先考察初值问题

$$\begin{cases}u''+A(x)u'+B(x)u=F(x),\\ u(a)=u_0,\ u'(a)=v_0,\end{cases} \tag{1.3}$$

其中$A(x)$，$B(x)$，$F(x)$是〔a，b〕上的连续函数，$A(x)$ 在

$[a, b]$上有连续的导函数。

对（1.3）式从a到x积分，得

$$u'(x)-v_0=-A(x)u(x)-\int_a^x[B(y)-A'(y)]u(y)dy$$

$$+\int_a^x F(y)dy+A(a)u_0$$

再积分一次，得

$$u(x)-u_0=-\int_a^x A(y)u(y)\,dy-\int_a^x dt\int_a^t[B(y)$$

$$-A'(y)]u(y)dy+\int_a^x dt\int_a^t F(y)dy$$

$$+[A(a)u_0+v_0](x-a)$$

$$=-\int_a^x A(y)u(y)dy-\int_a^x(x-y)[B(y)$$

$$-A'(y)]u(y)dy+\int_a^x(x-y)F(y)dy$$

$$+[A(a)u_0+v_0](x-a).$$

所以可得

$$u(x)=f(x)+\int_a^x k(x, y)u(y)dy, \tag{1.4}$$

其中

$$k(x, y)=-\{A(y)+(x-y)[B(y)-A'(y)]\},$$

$$f(x)=\int_a^x(x-y)F(y)dy+[A(a)u_0+v_0]$$

$$(x-a)+u_0.$$

反之，从（1.4）式微分两次，即易得（1.3）式．因此初值问题（1.3）与线性Volterra积分方程（1.4）等价．

下边着重考察边值问题．令

$$Lu\equiv(p(x)u')'+q(x)u, \tag{1.5}$$

其中（下面令$I=[a, b]$）

$$p(x)\in C^1(I),\ p(x)>0\ (x\in I),$$

$$q(x)\in C(I); \tag{1.6}$$

$u(x)\in C^2(I)$.(1.5)式所定义的算子L称为是Sturm-Liouville算子．考察边值问题

$$-Lu=g(x)\quad (x\in I), \tag{1.7}$$

$$\begin{cases} R_1(u)\equiv\alpha_1 u(a)+\alpha_2 u'(a)=0, \\ R_2(u)\equiv\beta_1 u(b)+\beta_2 u'(b)=0. \end{cases} \tag{1.8}$$

偏微分方程中许多方程的求解，都可以归结为求解上述问题．象常微分方程初值问题一样，我们也试图将上述边值问题（1.7)、(1.8）转化成求解一个积分方程的问题．下面先对所考虑的问题给出一个直观而粗糙的描述，然后给出其严格的叙述．

为此，我们需要使用所谓的Delta 函数 $\delta(t)$．它的定义如下：当$t\neq 0$时，$\delta(t)=0$；当$t=0$时，$\delta(0)=\infty$；但在含点$t=0$的任何区间J上有

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)dt=\int_J\delta(t)dt=1.$$

Delta函数的一条重要性质是：

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\delta(x-t)dt=\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon}f(t)\delta(x-t)dt=f(x),$$

其中$f(t)$是（$-\infty$，$+\infty$）上的任一连续函数．Delta 函数不能包含在古典的函数定义中，但现代数学已经为 Delta 函数提供了严格的数学基础（见夏道行等[1]）．

利用Delta函数，方程（1.7）可以改写为

$$-Lu=\int_a^b\delta(x-y)g(y)dy\qquad (a<x<b).$$

如果把$\int_a^b$看作是和式，并假定

$$-Lu=\delta(x-y) \tag{1.9}$$

在边值条件（1.8）下的解为$k(x, y)$，则根据线性微分方程迭加原理，边值问题（1.7）、（1.8）的解就应该是

$$u(x)=\int_a^b k(x, y)g(y)dy. \tag{1.10}$$

可见，在把边值问题（1.7）、（1.8）归结为（1.10）的过程中，$k(x, y)$的存在性是一个关键问题。

由于$k(x, y)$是边值问题（1.9）、（1.8）的解，于是有

$$\left[p(x)\frac{\partial k}{\partial x}\right]'+q(x)k(x, y)=-\delta(x-y), \tag{1.11}$$

$$R_1(k)=R_2(k)=0. \tag{1.12}$$

根据$\delta(t)$的定义，$k(x, y)$应满足

$$\left.\begin{array}{l}\left[p(x)\dfrac{\partial k}{\partial x}\right]'+q(x)k(x, y)=0, \\ \quad \text{当} a\leqslant x<y \text{或} y<x\leqslant b \text{时}.\end{array}\right. \tag{1.13}$$

此外，对任给$\varepsilon>0$，有

$$\int_{y-\varepsilon}^{y+\varepsilon}\left[p(x)\frac{\partial k}{\partial x}\right]'dx+\int_{y-\varepsilon}^{y+\varepsilon}q(x)k(x, y)dx$$

$$=-\int_{y-\varepsilon}^{y+\varepsilon}\delta(x-y)dx,$$

于是

$$p(x)\frac{\partial k}{\partial x}\bigg|_{y-\varepsilon}^{y+\varepsilon}+\int_{y-\varepsilon}^{y+\varepsilon}q(x)k(x, y)dx=-1.$$

令$\varepsilon\to 0$，则得

$$p(y)[k'_x(y+0, y)-k'_x(y-0, y)]=-1.$$

因此，$k(x,y)$又满足

$$k'_x(y+0,\ y)-k'_x(y-0,\ y)=-\frac{1}{p(y)}. \qquad (1.14)$$

下面严格证明：确实存在满足（1.12)、(1.13)、(1.14）三式的函数 $k(x,\ y)$，使得如果 $u(x)$ 由（1.10）式确定，则 $u(x)$ 必是边值问题（1.7）、(1.8）的解．为此，先证明下列引理．

引理1.1 设（1.6）式成立，并且

$$\alpha_1^2+\alpha_2^2>0,\ \beta_1^2+\beta_2^2>0. \qquad (1.15)$$

又设边值问题

$$Lu=0,\ R_1(u)=R_2(u)=0 \qquad (1.16)$$

仅有零解．则必存在两个函数 $u(x)$，$v(x)$，满足

(i) $u(x)\in C^2(I)$，$v(x)\in C^2(I)$；

(ii) $Lu(x)\equiv 0$，$R_1(u)=0$；

(iii) $Lv(x)\equiv 0$，$R_2(v)=0$；

(iv) $u(x)$ 与 $v(x)$ 线性无关；

(v) $p(x)(uv'-u'v)\equiv -1$．

证 设 $u_1(x)$ 和 $u_2(x)$ 是方程 $Lu=0$ 的一个基本解组．令

$$u=u_1(x)R_1(u_2)-u_2(x)R_1(u_1), \qquad (1.17)$$

$$v=u_1(x)R_2(u_2)-u_2(x)R_2(u_1). \qquad (1.18)$$

显然边值问题（1.16）的解为

$$u^*=c_1u_1+c_2u_2,$$

其中 c_1 和 c_2 由

$$c_1R_i(u_1)+c_2R_i(u_2)=0 \quad (i=1,2)$$

确定．因为边值问题仅有零解，故必有

$$\Delta=\begin{vmatrix} R_1(u_1) & R_1(u_2) \\ R_2(u_1) & R_2(u_2) \end{vmatrix}\neq 0. \qquad (1.19)$$

所以$R_1(u_1)$与$R_1(u_2)$必不同时为0．又因为u_1和u_2线性无关，所以$u(x)\neq 0$．同理$v(x)\neq 0$．

显然，由（1.17）式及（1.18）式定义的$u(x)$及$v(x)$满足引理的要求（i）、（ii）、（iii）．下证u与v线性无关．假若不然，则存在常数$c\neq 0$，使$v=cu$．但因u满足引理的要求（ii），故$R_1(v)=cR_1(u)=0$．又$R_2(v)=0$，这表明v是边值问题（1.16）的解．此与该边值问题仅有零解矛盾．故u与v线性无关．

直接验证知对任意的$u\in C^2(I)$，$v\in C^2(I)$，都有

$$[p(x)(u'v-v'u)]'=vLu-uLv. \tag{1.20}$$

因此，若u，v由（1.17）、（1.18）式确定，则由它们满足引理要求（ii）、（iii）知，必有

$$[p(x)(u'v-v'u)]'=0.$$

从而存在常数c，使

$$p(x)(u'v-v'u)=c. \tag{1.21}$$

但因$p(x)>0$，并且$u'v-v'u\neq 0$（因为$u'v-v'u$恰好是u和v的Wronsky行列式，u，v都是$Lu=0$的解，并且u与v线性无关，根据常微分方程理论，必有$u'v-v'u\neq 0$），故$c\neq 0$．从而$\frac{u}{c}$和v满足引理的全部要求．证完．

令 $$Q=I\times I,$$
$$Q_1=\{(x,\ y)\in Q\,|\,a\leqslant x\leqslant y\leqslant b\},$$
$$Q_2=\{(x,\ y)\in Q\,|\,a\leqslant y\leqslant x\leqslant b\}.$$

定理1.2 设（1.6）、（1.15）式成立，并且边值问题（1.16）仅有零解．则必存在唯一的具备下列性质的函数$k(x,\ y)$：

(i) $k(x,y)$在Q上有定义，并且连续；

(ii) $k(x,y)$是对称的，即$k(x,y)=k(y,x)$；

(iii) $k(x,y)$在Q_1和Q_2上有连续的偏导数k'_x，k''_{xx}；

(iv) 对固定的$y\in I$，$k(x,y)$满足

$Lk(x,y)=0$，当$x\neq y$，$x\in I$时，

$R_1(k)=R_2(k)=0$，当 $y\in(a, b)$ 时；

(v) 当$x=y$时k'_x有第一类间断点，并且

$$k'_x(y+0,y)-k'_x(y-0,y)=-\frac{1}{p(y)},\quad y\in(a,b). \tag{1.22}$$

证 设$u(x)$和$v(x)$满足引理1.1的全部要求．为使$k(x,y)$具备性质（iv）中的$Lk(x, y)=0\ (x\neq y)$，则它必具有下列形式：

$$k(x, y)=\begin{cases}A_1(y)u(x)+B_1(y)v(x), & \text{当}a\leqslant x<y\text{时}, \\ A_2(y)u(x)+B_2(y)v(x), & \text{当}y<x\leqslant b\text{时},\end{cases} \tag{1.23}$$

其中$A_i(y)$，$B_i(y)$（$i=1$，2）是待定系数．为使$k(x, y)$满足性质（iv）中的$R_1(k)=R_2(k)=0$（$y\in(a,b)$），必须有

$$R_1(k)\equiv A_1(y)R_1(u)+B_1(y)R_1(v)=0,$$

$$R_2(k)\equiv A_2(y)R_2(u)+B_2(y)R_2(v)=0.$$

由引理1.1知，$R_1(u)=0$，$R_2(v)=0$；于是为保证边值问题(1.16)仅有零解，必有$R_1(v)\neq 0$，$R_2(u)\neq 0$（参考与(1.19)式有关的证明），从而$B_1(y)=A_2(y)=0$．因此，$k(x,y)$应具有下列形式

$$k(x,y)=\begin{cases}A_1(y)u(x), & \text{当}a\leqslant x<y\text{时}, \\ B_2(y)v(x), & \text{当}y<x\leqslant b\text{时}.\end{cases}$$

进一步，为使 $k(x, y)$ 具备性质（i）、（v），则 $A_1(y)$ 和 $B_2(y)$应满足

$$A_1(y)u(y)-B_2(y)v(y)=0,$$

$$A_1(y)u'(y)-B_2(y)v'(y)=\frac{1}{p(y)}.$$

因此，

$$A_1(y)=-\frac{v(y)}{(uv'-u'v)p(y)},$$

$$B_2(y)=-\frac{u(y)}{(uv'-u'v)p(y)}.$$

利用引理1.1结论（v），即知$A_1(y)=v(y)$，$B_2(y)=u(y)$。因此，

$$k(x,y)=\begin{cases}u(x)v(y), & \text{当}a\leqslant x\leqslant y\text{时},\\ v(x)u(y), & \text{当}y\leqslant x\leqslant b\text{时}.\end{cases}\tag{1.24}$$

由（1.24）定义的$k(x, y)$显然满足性质（ii）、（iii）。由以上证明可以看出，$k(x,y)$ 是唯一确定的．证完．

定义1.3 满足定理1.2性质（i）～（v）的函数 $k(x, y)$，称为是相应于边值问题（1.16）的Green函数．

定理1.4 设（1.6）、（1.15）式成立，并且边值问题（1.16）仅有零解，$k(x, y)$ 是相应于边值问题(1.16)Green函数．设 $g(x)\in C(I)$．则下列结论成立：

（i）边值问题（1.7)、（1.8）存在唯一的解；

（ii）若函数$v(x)$由

$$v(x)=\int_a^b k(x, y)g(y)dy\tag{1.25}$$

确定，则必有 $v(x)\in C^2(I)$，并且 $v(x)$ 是边值问题（1.7)、（1.8）的（唯一）解；

(iii) 若$v(x)\in C^2(I)$是边值问题（1.7)、(1.8）的解，则$v(x)$必满足（1.25）式.

证 显然，仅需证明结论（i）、(ii)，（iii）是（i）、(ii）的推论．先证（i）．设方程（1.7）的一个特解为u^*，则方程（1.7）的一般解为

$$u=u^*+c_1u_1+c_2u_2, \tag{1.26}$$

其中u_1和u_2是$Lu=0$的一基本解组．要使（1.26）式定义的u满足边界条件（1.8)，则c_1和c_2必须且仅须满足

$$R_i(u^*)+c_1R_i(u_1)+c_2R_i(u_2)=0 \quad (i=1,2) \tag{1.27}$$

而方程组（1.27）存在唯一解（亦即边值问题（1.7)、(1.8）存在唯一解）的充要条件是

$$\Delta=\begin{vmatrix} R_1(u_1) & R_1(u_2) \\ R_2(u_1) & R_2(u_2) \end{vmatrix} \neq 0. \tag{1.28}$$

同理，边值问题（1.16)仅有零解的充要条件也是(1.28）式成立．由于定理已假定边值问题（1.16）仅有零解，故结论（i）成立.

再证结论（ii）．（1.25）式可以写成

$$v(x)=\int_a^x k(x,y)g(y)dy+\int_x^b k(x,y)g(y)dy.$$

对上式微分一次，得

$$v'(x)=k(x,x)g(x)+\int_a^x k'_x(x,y)g(y)dy$$

$$-k(x,x)g(x)+\int_x^b k'_x(x,y)g(y)dy$$

$$=\int_a^b k'_x(x,y)g(y)dy. \tag{1.29}$$

再对（1.29）式微分一次，并注意到定理1.2的性质(v)，得

$$v''(x)=k'_x(x+0,x)g(x)+\int_a^x k''_{xx}(x,y)g(y)dy$$

$$-k'_x(x-0,x)g(x)+\int_x^b k''_{xx}(x,y)g(y)dy$$

$$=\int_a^b k''_{xx}(x,y)g(y)dy-\frac{g(x)}{p(x)} \qquad (1.30)$$

由（1.29）、（1.30）两式并利用定理1.2的性质（iv），得

$$-Lv=-(pv''+p'v'+qv)$$

$$=-\int_a^b Lk(x,\ y)g(y)dy+g(x)=g(x).$$

即$v(x)$满足方程（1.7）.

又由定理1.2的性质（iv）中的$R_1(k)=0$（$y\in(a,\ b)$时），得

$$R_1(v)=\alpha_1\int_a^b k(a,y)g(y)dy+\alpha_2\int_a^b k'_x(a,y)g(y)dy$$

$$=\int_a^b R_1(k)g(y)dy=0.$$

同理又可得$R_2(v)=0$. 于是$v(x)$满足边值条件（1.8），即$v(x)$是边值问题（1.7）、（1.8）的解. 证完.

推论1.5 设（1.6）、（1.15）式成立，并且边值问题（1.16）仅有零解. 设$r=r(x)\in C(I)$，$g=g(x)\in C(I)$，则$u(x)$是边值问题

$$\begin{cases}-Lu=\lambda ru+g & (x\in I)\\ R_1(u)=R_2(u)=0\end{cases} \qquad (1.31)$$

解的充分必要条件是$u(x)$是线性积分方程

$$u(x)=\lambda\int_a^b k(x,\ y)r(y)u(y)dy$$

$$+\int_a^b k(x, y)g(y)dy \tag{1.32}$$

的连续解，这里，$k(x, y)$ 是相应于边值问题(1.16)的Green函数.

由推论1.5可以看到：二阶常微分方程边值问题（1.31）等价于一个Fredholm线性积分方程.

例1.6 试将边值问题

$$-u''=\lambda u,\quad 0\leqslant x\leqslant 1, \tag{1.33}$$

$$\begin{cases}\alpha_1 u(0)+\alpha_2 u'(0)=0,\\ \beta_1 u(1)+\beta_2 u'(1)=0.\end{cases} \tag{1.34}$$

化为积分方程，其中$\alpha_1^2+\alpha_2^2>0$，$\beta_1^2+\beta_2^2>0$，

$$\varDelta=\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \beta_1 & \beta_1+\beta_2\end{vmatrix}\neq 0. \tag{1.35}$$

解 由（1.35）式易知，$u''=0$ 在边界条件（1.34）下只有零解. 因此，相应的Green函数存在. $u_1(x)=1$及$u_2(x)=x$是$u''=0$的一个基本解组. 经计算知 $R_1(u_1)=\alpha_1$，$R_1(u_2)=\alpha_2$，$R_2(u_1)=\beta_1$，$R_2(u_2)=\beta_1+\beta_2$（取$a=0$，$b=1$）. 由（1.17）、（1.18）及（1.21）式，可以计算得$c=-\varDelta$. 因此，根据引理1.1的证明，可知$u(x)=\dfrac{\alpha_2-\alpha_1 x}{-\varDelta}$及$v(x)=(\beta_1+\beta_2)-\beta_1 x$，满足引理1.1的全部要求. 因此，根据定理1.2及（1.24）式，即知相应的Green函数为

$$k(x,y)=\begin{cases}-\dfrac{1}{\varDelta}(\alpha_2-\alpha_1 x)(\beta_1+\beta_2-\beta_1 y),\\ \qquad\qquad 0\leqslant x\leqslant y\leqslant 1,\\ -\dfrac{1}{\varDelta}(\alpha_2-\alpha_1 y)(\beta_1+\beta_2-\beta_1 x),\\ \qquad\qquad 0\leqslant y\leqslant x\leqslant 1.\end{cases} \tag{1.36}$$

根据推论1.5，边值问题（1.33）、（1.34）等价于下列线性积分方程：

$$u(x)=\lambda\int_0^1 k(x,\ y)u(y)dy,$$

其中$k(x,\ y)$由（1.36）式确定。

例1.7 在例1.6中，若$\alpha_1=\beta_1=1$，$\alpha_2=\beta_2=0$，则所对应的Green函数为

$$k(x,\ y)=\begin{cases}x(1-y), & 0\leqslant x\leqslant y\leqslant 1,\\ y(1-x), & 0\leqslant y\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}\tag{1.37}$$

若$\alpha_1=\beta_2=1$，$\alpha_2=\beta_1=0$，则所对应的Green函数为

$$k(x,\ y)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x\leqslant y\leqslant 1,\\ y, & 0\leqslant y\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}\tag{1.38}$$

附注 常微分方程两点边值问题与积分方程之间的关系，是D.Hilbert在1904年发现的（参见D.Hilbert〔1〕），它是Hilbert最有价值的成就之一。从这个工作开始，利用积分方程研究微分方程，成为微分方程理论中最重要和最基本的方法之一。

本节仅讨论了二阶常微分方程的边值问题。关于n阶常微分方程边值问题的讨论，可见G.Sansone〔1〕及B.И.Смирнов〔1〕。关于偏微分方程与积分方程之间关系的讨论，见B.N.Смирнов〔1〕及R.Courant和D.Hilbert〔1〕。

§2 逐次迭代法

以下，恒用I表$[a,\ b]$。

定理2.1 设$k(x,\ y)$在$I\times I$上连续，$f(x)$在I上连续。

设

$$|\lambda|<\frac{1}{M(b-a)}, \tag{2.1}$$

其中$M=\max\limits_{x,y\in I}|k(x, y)|$，则方程（1.2）在$I$上具有唯一的连续解$u(x)$，并且$u(x)$可以表为下面的绝对一致收敛级数：

$$u(x)=f(x)+\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^n\int_a^b k_n(x,y)f(y)dy, \tag{2.2}$$

其中$k_1(x, y)=k(x, y)$，

$$k_n(x,y)=\int_a^b k(x,z)k_{n-1}(z,y)dz \quad (n=2,3,\cdots). \tag{2.3}$$

证 设$u(x)$是方程（1.2）的连续解，则

$$u(x)=f(x)+\lambda\int_a^b k(x, y)\Big[f(y)$$

$$+\lambda\int_a^b k(y, y_1)u(y_1)dy_1\Big]dy$$

$$=f(x)+\lambda\int_a^b k(x, y)f(y)dy$$

$$+\lambda^2\int_a^b k(x, y)dy\int_a^b k(y, y_1)u(y_1)dy_1$$

再按（1.2）式将$u(y_1)$的值代入，又得

$$u(x)=f(x)+\lambda\int_a^b k(x, y)f(y)dy$$

$$+\lambda^2\int_a^b k(x, y)dy\int_a^b k(y,y_1)f(y_1)dy_1$$

$$+\lambda^3\int_a^b k(x, y)dy\int_a^b k(y, y_1)dy_1$$

$$\int_a^b k(y_1, y_2)u(y_2)dy_2.$$

一般地，可得

$$u(x)=f(x)+\lambda\int_a^b k(x,\ y)f(y)dy+\cdots+$$
$$+S_n(x)+R_{n+1}(x), \qquad (2.4)$$

其中

$$S_n(x)=\lambda^n\int_a^b k(x,\ y)dy\int_a^b k(y,\ y_1)dy_1\cdots$$
$$\int_a^b k(y_{n-2},\ y_{n-1})f(y_{n-1})dy_{n-1}, \qquad (2.5)$$

$$R_{n+1}(x)=\lambda^{n+1}\int_a^b k(x,\ y)dy\int_a^b k(y,\ y_1)dy_1\cdots$$
$$\int_a^b k(y_{n-1},\ y_n)u(y_n)dy_n. \qquad (2.6)$$

显然

$$|S_n(x)|\leqslant|\lambda|^n NM^n(b-a)^n, \quad \forall x\in I; \qquad (2.7)$$
$$|R_{n+1}(x)|\leqslant|\lambda|^{n+1}RM^{n+1}(b-a)^{n+1}, \forall x\in I. \qquad (2.8)$$

其中$N=\max\limits_{x\in I}|f(x)|$，$R=\max\limits_{x\in I}|u(x)|$。又由归纳法可知

$$S_n(x)=\lambda^n\int_a^b k_n(x,y)f(y)dy \ (n=1,2,\cdots) \qquad (2.9)$$

于是，由（2.4）、（2.9）、（2.7）、（2.8）及（2.1）诸式知，（2.2）式右端的级数在I上绝对一致收敛，并且（2.2）式成立。

反之，若$u(x)$是由（2.2）式确定的函数，则利用(2.9)与（2.5）式，可知

$$\lambda\int_a^b k(x,\ y)u(y)dy=\lambda\int_a^b k(x,y)[f(y)$$
$$+\lambda\int_a^b k(y,\ y_1)f(y_1)dy_1+\cdots]dy$$

$$=\lambda\int_a^b k(x, y)f(y)dy+\lambda^2\int_a^b k(x, y)dy$$

$$\int_a^b k(y, y_1)f(y_1)dy_1+\cdots$$

$$=u(x)-f(x).$$

这表明$u(x)$是方程（1.2）的解，证完.

注2.2 由（2.3）式确定的$k_n(x, y)$叫做核$k(x, y)$的Fredholm型n重迭核.

定理2.3 设$k(x, y)$在$I\times I$上连续，$f(x)$在I上连续. 则对任何λ，方程（1.1）在I上都具有唯一的连续解$u(x)$，并且$u(x)$可以表为下面的绝对一致收敛级数:

$$u(x)=f(x)+\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^n\int_a^x k_n^*(x,y)f(y)dy, \qquad (2.10)$$

其中$k_1^*(x, y)=k(x, y)$

$$k_n^*(x, y)=\int_a^x k^*(x,z)k_{n-1}^*(z,y)dz \qquad (2.11)$$

$$(n=2,3,\cdots)$$

证 设$u(x)$是方程（1.1）的连续解. 则仿（2.4）式的证明，可得

$$u(x)=f(x)+\lambda\int_a^x k(x, y)f(y)dy+\cdots$$

$$+S_n^*(x)+R_{n+1}^*(x), \qquad (2.12)$$

其中

$$S_n^*(x)=\lambda^n\int_a^x k(x, y)dy\int_a^y k(y, y_1)dy_1\cdots$$

$$\int_a^{y_{n-2}} k(y_{n-2}, y_{n-1})f(y_{n-1})dy_{n-1}, \qquad (2.13)$$

$$R_{n+1}^{*}(x)=\lambda^{n+1}\int_a^x k(x, y)dy\int_a^y k(y, y_1)dy_1\cdots$$

$$\int_a^{y_{n-1}} k(y_{n-1}, y_n)u(y_n)dy_n. \qquad (2.14)$$

对S_n^* (x)，有估计式

$$|S_n^*(x)|\leqslant|\lambda|^n N M^n\int_a^x dy\int_a^y dy_1\cdots\int_a^{y_{n-2}} dy_{n-1}$$

$$=|\lambda|^n N M^n\frac{(x-a)^n}{n!}$$

$$\leqslant\frac{N[|\lambda|M(b-a)]^n}{n!},\ \forall x\in I, \qquad (2.15)$$

其中$N=\max\limits_{x\in I}|f(x)|$.

同理可以证得，对$R_{n+1}^*(x)$，有估计式

$$|R_{n+1}^*(x)|\leqslant\frac{R[|\lambda|M(b-a)]^{n+1}}{(n+1)!},\ \forall x\in I, \quad (2.16)$$

其中$R=\max\limits_{x\in I}|u(x)|$. 又由归纳法可知

$$S_n^*(x)=\lambda^n\int_a^x k_n^*(x, y)f(y)dy$$

$$(n=1,2,3,\cdots). \qquad (2.17)$$

于是，由（2.12）～（2.17）诸式可知：当λ固定时，$R_{n+1}^*(x)$一致收敛于0，（2.10）式右端的级数绝对一致收敛，并且（2.10）式成立。

另一方面，仿定理2.1可以证明：若$u(x)$是由（2.10）式确定的函数，则$u(x)$是方程（1.1）的解．证完．

注2.4 由（2.11)式确定的k_n^* (x, y)叫做核$k(x, y)$的Volterra型n重迭核．

例2.5 求解Volterra积分方程

$$u(x)=f(x)+\lambda\int_0^x e^{x-y}u(y)dy, \tag{2.18}$$

其中$f(x)$ 是$x\geqslant 0$上的连续函数.

解 由定理2.3，知方程（2.18）对任给λ，都具有唯一的连续解（该解定义在$x\geqslant 0$上）. 由归纳法可知

$$k_n^*(x,y)=\frac{(x-y)^{n-1}}{(n-1)!}e^{x-y}\quad (n=1,2,3,\cdots).$$

故由公式（2.10）可得方程（2.18）的解为

$$u(x)=f(x)+\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^n\int_0^x\frac{(x-y)^{n-1}}{(n-1)!}e^{x-y}f(y)dy$$

$$=f(x)+\lambda\int_0^x e^{(\lambda+1)(x-y)}f(y)dy.$$

例2.6 求解Volterra方程

$$u(x)=x+\int_0^x(y-x)u(y)dy. \tag{2.19}$$

解 对于比例，不必代公式（2.10），而把它化为微分方程求解更简单. 把（2.19）式两端微分，得

$$u'(x)=1-\int_0^x u(y)dy.$$

再微分一次，得

$$u''(x)=-u(x).$$

因此，

$$u(x)=c_1\cos x+c_2\sin x,$$

其中c_1和c_2是待定常数. 利用初值条件$u(0)=0$与$u'(0)=1$，即易得$c_1=0$，$c_2=1$. 因此方程（2.19）具有唯一解是$u(x)=\sin x$.

例2.7 考察Fredholm方程

$$u(x)=\frac{x}{2}-\frac{1}{3}+\int_0^1 (x+y)u(y)dy. \qquad (2.20)$$

解 对此例，有$\lambda=1$，$M=\max\limits_{0\le x,y\le 1}(x+y)=2$，$b-a=1$。故不等式（2.1）不满足。但易知$u(x)=x$是方程（2.20）的连续解。由此例可知条件（2.1）仅是方程（1.2）具有连续解的充分条件。

定理2.1和定理2.3是在连续函数空间$C(I)$中获得的。利用完全类似的方法，可以讨论$L_2(I)$空间的情况，从而获得下面的定理。

定理2.8 设$k(x, y)\in L_2(I\times I)$，$f(x)\in L_2(I)$。若

$$|\lambda|<\left(\int_a^b\int_a^b [k(x, y)]^2 dxdy\right)^{-\frac{1}{2}}, \qquad (2.21)$$

则方程（1.2）在$L_2(I)$中具有唯一解，并且该解仍由级数（2.2）给出，此时（2.2）式右端的级数平均收敛（即按$L_2(I)$范数收敛）。

定理2.9 设$k(x, y)\in L_2(I\times I)$，$f(x)\in L_2(I)$。则对任给$\lambda$，方程（1.1）在$L_2(I)$中都具有唯一解，并且该解仍由级数（2.10）给出，此时（2.10）式右端的级数平均收敛（即按$L_2(I)$范数收敛）。

定理2.8和定理2.9的证明可参见F.Smithies[1]。

从以上讨论可以看出，对于Volterra方程（1.1），逐次迭代法已经完全解决问题。因此，本章的其余部分将集中进一步讨论Fredholm方程（1.2）。

附注 早在18世纪80年代，V.Volterra就利用逐次迭代的方法，研究Volterra方程（1.1）解的性质，并得到了公式

(2.10)（参见V.Volterra〔1〕〔2〕）。有关的研究还可见A.C.Zaanen〔1〕，F.Smithies〔1〕以及N.Г.Петровский〔1〕。

本节的结论还可以直接利用压缩映射原理推出，关于这一点，可参见郭大钧、黄春朝、梁方豪〔1〕。

§3 Fredholm理论

从本节开始，集中讨论Fredholm方程（1.2）。

设$k(x, y)$在$I\times I$上连续，这里$I=[a, b]$。定义

$$D(\lambda)=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\lambda^n}{n!}A_n, \tag{3.1}$$

$$D(x, y;\lambda)=\lambda k(x, y)+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\lambda^{n+1}}{n!}B_n(x,y), \tag{3.2}$$

其中

$$A_n=\int_a^b\int_a^b\cdots\int_a^b\begin{vmatrix}k(t_1,t_1)\cdots k(t_1,t_n)\\ \cdots\cdots\quad\cdots\ \cdots\cdots\\ \cdots\cdots\quad\cdots\ \cdots\cdots\\ k(t_n,t_1)\cdots k(t_n,t_n)\end{vmatrix}dt_1dt_2\cdots dt_n,$$

$$B_n(x, y)=\int_a^b\int_a^b\cdots\int_a^b\begin{vmatrix}k(x,y) & k(x,t_1)\cdots & k(x,t_n)\\ k(t_1,y) & k(t_1,t_1)\cdots & k(t_1,t_n)\\ \cdots & \cdots\quad\cdots & \cdots\\ \cdots & \cdots\quad\cdots & \cdots\\ k(t_n,y) & k(t_n,t_1)\cdots & k(t_n,t_n)\end{vmatrix}dt_1dt_2\cdots dt_n.$$

$D(\lambda)$叫做核$k(x, y)$的Fredholm 行列式，$D(x, y;\lambda)$叫

做$k(x, y)$的Fredholm第一子式.

引理3.1（Hadamard不等式） 设$A=|a_{ij}|$是一个n阶行列式，则

$$|A|^2\leqslant\prod_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_{ij})^2. \tag{3.3}$$

证 不失一般性，可以假定

$$\sum_{j=1}^{n}(a_{ij})^2=1,\quad (i=1, 2, \cdots, n), \tag{3.4}$$

而仅需证明

$$|A|\leqslant 1. \tag{3.5}$$

事实上，在行列式A中，以$a_{ij}[\sum_{k=1}^{n}(a_{ik})^2]^{-\frac{1}{2}}$代替$a_{ij}$，即可化为上述情况（注意，若存在$i$，使$\sum_{k=1}^{n}(a_{ik})^2=0$，则引理3.1显然成立）.

A显然是n^2个变量$a_{11}, \cdots, a_{nn}$的连续函数. 条件（3.4）式确定了n^2维欧氏空间中的一个有界闭集D. 故A在D上必达到最大值与最小值.

如能证明此最大值的绝对值与此最小值的绝对值均$\leqslant 1$，则（3.5）式获证. 因此，问题归结为A在条件（3.4）之下的条件极值问题. 根据Lagrange乘数法，在达到条件极值的点处，必有

$$\frac{\partial F}{\partial a_{ij}}=0\quad (i, j=1, 2, \cdots, n), \tag{3.6}$$

其中

$$F=A+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i[\sum_{j=1}^{n}(a_{ij})^2-1],$$

λ_i ($i=1, 2, \cdots, n$) 是某组常数．显然，(3.6) 式可以化为

$$A_{ij}+2\lambda_i a_{ij}=0 \quad (i, j=1, 2, \cdots, n). \qquad (3.7)$$

其中 A_{ij} 表示 a_{ij} 在A中的余子式．以 a_{ij} 乘以 (3.7) 式，并对j求和，得$A+2\lambda_i=0$．以此式代入 (3.7) 式，得到

$$A_{ij}=Aa_{ij} \quad (i, j=1, 2, \cdots, n). \qquad (3.8)$$

于是，有

$$\begin{vmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Aa_{11} & \cdots & Aa_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ Aa_{n1} & \cdots & Aa_{nn} \end{vmatrix} = A^{n+1}$$

但由线性代数知上式左端的行列式等于 A^{n-1}，于是 $A^{n-1}=A^{n+1}$．因此，或$A=0$，或$A=1$，或$A=-1$．不论哪种情况，都有$|A|\leqslant 1$．证完．

引理3.2 (3.1) 式右端的幂级数对任何λ都收敛．

证 取$M=\max\limits_{x,y\in I}|k(x,y)|$．则由引理3.1知

$$|A_n|\leqslant n^{\frac{n}{2}}M^n(b-a)^n,$$

从而

$$\left|(-1)^n\frac{\lambda^n}{n!}A_n\right|\leqslant\frac{[|\lambda|M(b-a)]^n}{n!}\sqrt{n^n}\equiv c_n$$

$$(n=1, 2, \cdots).$$

因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{c_{n+1}}{c_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{|\lambda|M(b-a)}{\sqrt{n+1}}\sqrt{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=0.$$

故级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$收敛，从而 (3.1) 式右端的级数收敛．证完．

引理3.3 (3.2) 式右端的级数对任何λ都关于x，$y\in I$一

致收敛，从而$D(x, y; \lambda)$是x，y的连续函数。

证 证明和引理 3.2 类似。令$M=\max\limits_{x,y\in I}|k(x, y)|$。则由引理3.1可知

$$|B_n(x, y)|\leqslant\sqrt{(n+1)^{n+1}}\,M^{n+1}(b-a)^n.$$

从而

$$\left|(-1)^n\frac{\lambda^{n+1}}{n!}B_n(x, y)\right|\leqslant\frac{|\lambda|^{n+1}M^{n+1}(b-a)^n}{n!}\cdot\sqrt{(n+1)^{n+1}}\equiv d_n\quad(n=1,2,3,\cdots).$$

由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{d^n}{d_{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{|\lambda|M(b-a)\sqrt{n+1}}{n}\sqrt{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=0,$$

故$\sum\limits_{n=1}^{\infty}d_n$收敛，从而（3.2）式右端的级数关于$x$，$y\in I$一致收敛。证完。

引理3.4 下面两个等式成立：

$$D(x, y; \lambda)-\lambda D(\lambda)k(x, y)=\lambda\int_a^b D(x, t; \lambda)\,k(t, y)dt; \tag{3.9}$$

$$D(x, y; \lambda)-\lambda D(\lambda)k(x, y)=\lambda\int_a^b k(x, t)\,D(t, y; \lambda)dt. \tag{3.10}$$

证 先证明（3.9）式. 以（3.1）及（3.2)式代入(3.9)式，并逐项积分（根据引理3.3，这是允许的），可知（3.9）式即为：

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\lambda^{n+1}}{n!}B_n(x, y)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\lambda^{n+1}}{n!}A_nk(x, y)$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\lambda^{n+1}}{(n-1)!}\int_a^b B_{n-1}(x,t)k(t,y)dt,$$

其中 $B_0(x, y)\equiv k(x, y)$。于是，为了证明（3.9）式，只需证明

$$B_n(x, y)=A_n k(x, y)-n\int_a^b B_{n-1}(x,t)k(t, y)dt \quad (n=1,2,3,\cdots,) \tag{3.11}$$

由$B_n(x, y)$的定义，按第一纵行展开行列式，得

$$B_n(x, y)=\int_a^b\cdots\int_a^b k(x, y)\begin{vmatrix} k(t_1,t_1) & \cdots & k(t_1,t_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ k(t_n,t_1) & \cdots & k(t_n,t_n)\end{vmatrix} dt_1\cdots dt_n$$

$$+\sum_{i=1}^{n}(-1)^i\int_a^b\cdots\int_a^b k(t_i, y)\begin{vmatrix} k(x,t_1)\cdots\cdots & k(x,t_n) \\ k(t_1,t_1)\cdots\cdots & k(t_1,t_n) \\ \cdots\ \ \cdots\cdots & \cdots \\ k(t_{i-1},t_1)\cdots\cdots & k(t_{i-1}, t_n) \\ k(t_{i+1},t_1)\cdots\cdots & k(t_{i+1}, t_n) \\ \cdots\cdots\ \ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ k(t_n,t_1)\cdots\cdots & k(t_n,t_n)\end{vmatrix} dt_1\cdots dt_n.$$

在上式右端和式中的项里，将t_i，t_{i+1}，$\cdots t_n$分别换为t，t_i，$\cdots$，t_{n-1}，即知该和式为

$$\sum_{i=1}^{n}(-1)^i\int_a^b\cdots\int_a^b k(t, y).$$

$$\begin{vmatrix} k(x,t_1)\cdots & k(x,t_{i-1}) & k(x,t) & k(x, t_i)\cdots & k(x, t_{n-1}) \\ k(t_1,t_1)\cdots & k(t_1,t_{i-1}) & k(t_1,t) & k(t_1,t_i)\cdots & k(t_1,t_{n-1}) \\ \cdots\ \ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\ \ \cdots & \cdots \\ \cdots\ \ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\ \ \cdots & \cdots \\ k(t_{n-1},t_1)\cdots & k(t_{n-1},t_{i-1}) & k(t_{n-1},t) & k(t_{n-1},t_i)\cdots & k(t_{n-1},t_{n-1})\end{vmatrix} dt dt_1\cdots dt_{n-1}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{2i-1}\int_a^b k(t,\ y)dt\cdot$$

$$\int_a^b\cdots\int_a^b\begin{vmatrix} k(x,t) & k(x,t_1)\cdots & k(x,t_{n-1}) \\ k(t_1,t) & k(t_1,t_1)\cdots & k(t_1,t_{n-1}) \\ \cdots & \cdots\quad\cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots\quad\cdots & \cdots \\ k(t_{n-1},t) & k(t_{n-1},t_1)\cdots & k(t_{n-1},t_{n-1}) \end{vmatrix} dt_1\cdots dt_{n-1}$$

$$=-\sum_{i=1}^{n}\int_a^b B_{n-1}(x,\ t)k(t,\ y)dt$$

$$=-n\int_a^b B_{n-1}(x,\ t)k(t,\ y)dt.$$

由此即知（3.11）式成立．这样就证明了（3.9）式．（3.10）式的证明完全类似．证完．

注3.5 从A_n及$B_n(x,\ y)$的定义，立即可以得到

$$A_n=\int_a^b B_{n-1}(x,x)dx\quad (n=1,2,3,\cdots).\qquad (3.12)$$

（3.11）式及（3.12）式是计算A_n和$B_n(x,\ y)$的重要的递推公式，具体计算时常用到它们．特别地，从（3.11）式及（3.12)式可得下述结论：如果对某个n，有$B_n(x,\ y)\equiv 0$，则必有

$$A_{n+1}=A_{n+2}=\cdots=0,$$

$$B_{n+1}(x,\ y)\equiv B_{n+2}(x,\ y)\equiv\cdots\equiv 0.$$

定理3.6 （Fredholm第一定理）设$k(x,\ y)$在$I\times I$上连续，$f(x)$在I上连续．若$D(\lambda)\neq 0$，则方程（1.2）在I上具有唯一的连续解$u(x)$，并且该解可以表为：

$$u(x)=f(x)+\int_a^b\frac{D(x,y;\ \lambda)}{D(\lambda)}f(y)dy.\qquad (3.13)$$

证 若$u(x)$是方程（1.2）的连续解，则由（3.9）式可知

$$\int_a^b D(x, y; \lambda) u(y) dy = \int_a^b D(x, y; \lambda)[f(y)$$
$$+\lambda\int_a^b k(y, t)u(t)dt]dy$$
$$= \int_a^b D(x, y; \lambda) f(y) dy$$
$$+\int_a^b u(t)dt \int_a^b \lambda D(x, y; \lambda)k(y, t)dy$$
$$= \int_a^b D(x,y;\lambda)f(y)dy + \int_a^b D(x,t;\lambda)u(t)dt$$
$$-\lambda D(\lambda)\int_a^b k(x, t)u(t)dt.$$

从而

$$\int_a^b D(x,y;\lambda)f(y)dy - D(\lambda)[u(x)-f(x)]=0$$

因此，（3.13）式成立.

反之，设$u(x)$是由（3.13）式给出的函数，则由(3.10)式可知

$$f(x)+\lambda\int_a^b k(x, y)u(y)dy$$
$$= f(x)+\lambda\int_a^b k(x,y)[f(y)+\int_a^b \frac{D(y,t;\lambda)}{D(\lambda)}f(t)dt]dy$$
$$= f(x)+\lambda\int_a^b k(x,y)f(y)dy + \frac{1}{D(\lambda)}\int_a^b f(t)dt$$
$$\int_a^b \lambda k(x, y)D(y, t; \lambda)dy$$

$$=f(x)+\lambda\int_a^b k(x,y)f(y)dy$$

$$+\int_a^b\frac{D(x,t;\lambda)}{D(\lambda)}f(t)dt-\lambda\int_a^b k(x,t)f(t)dt$$

$$=f(x)+\int_a^b\frac{D(x,t;\lambda)}{D(\lambda)}f(t)dt=u(x).$$

故$u(x)$是方程（1.2）的解．证完

推论3.7 设$k(x,y)$在$I\times I$上连续．若$D(\lambda)\neq 0$，则齐次方程

$$u(x)=\lambda\int_a^b k(x,y)u(y)dy \tag{3.14}$$

具有唯一的连续解$u(x)\equiv 0$．

例3.8 求解Fredholm线性积分方程

$$u(x)=1+\lambda\int_0^\pi \sin(x+y)u(y)dy \tag{3.15}$$

解 由于$k(x,y)=\sin(x+y)$，故由（3.11）与（3.12）式，可得

$$A_1=\int_0^\pi k(x,x)dx=\int_0^\pi \sin 2x dx=0,$$

$$B_1(x,y)=A_1k(x,y)-\int_0^\pi k(x,t)k(t,y)dt$$

$$=-\int_0^\pi \sin(x+t)\sin(t+y)dt$$

$$=-\frac{\pi}{2}\cos(x-y),$$

$$A_2=\int_0^\pi B_1(x,x)dx=-\frac{\pi}{2}\int_0^\pi dx=-\frac{\pi^2}{2},$$

$$B_2(x,y)=A_2k(x,y)-2\int_0^x B_1(x,t)k(t,y)dt$$

$$=-\frac{\pi^2}{2}\sin(x+y)+\pi\int_0^x\cos(x-t)$$

$$\sin(t+y)dt\equiv 0$$

从而，根据注3.5中的结论可知

$$A_3=A_4=A_5=\cdots=0,$$

$$B_3(x,y)\equiv B_4(x,y)\equiv\cdots\equiv 0.$$

于是，

$$D(\lambda)=1-\frac{\pi^2}{4}\lambda^2,$$

$$D(x,y;\lambda)=\lambda\sin(x+y)+\frac{\pi}{2}\lambda^2\cos(x-y).$$

根据定理3.6可知：如果$\lambda\neq\pm\frac{2}{\pi}$，则方程（3.15）具有唯一的连续解$u(x)$，其表达式为

$$u(x)=1+\int_0^x\frac{\lambda\sin(x+y)+\frac{\pi}{2}\lambda^2\cos(x-y)}{1-\frac{\pi^2}{4}\lambda^2}dy$$

$$=1+\frac{4(2\lambda\cos x+\pi\lambda^2\sin x)}{4-\pi^2\lambda^2}.$$

$\lambda=\pm\frac{2}{\pi}$的情况，我们将在例3.18中讨论。

当$D(\lambda)\neq 0$时，定理3.6对Fredholm积分方程（1.2）解的存在唯一性，做了肯定的答复。下面将讨论$D(\lambda)=0$的情况。

对正整数p，令

$$D(x_1,\cdots,x_p;y_1,\cdots,y_p;\lambda)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\lambda^{n+p}}{n!} B_n(x_1, \cdots, x_p; y_1, \cdots, y_p), \quad (3.16)$$

其中,

$$B_0(x_1, \cdots, x_p; y_1, \cdots, y_p)$$

$$= \begin{vmatrix} k(x_1, y_1) & \cdots & k(x_1, y_p) \\ \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ k(x_p, y_1) & \cdots & k(x_p, y_p) \end{vmatrix},$$

$$B_n(x_1, \cdots, x_p; y_1, \cdots, y_p)$$

$$= \int_a^b \cdots \int_a^b \begin{vmatrix} k(x_1, y_1) \cdots k(x_1, y_p) & k(x_1, t_1) \cdots k(x_1, t_n) \\ \cdots\cdots \quad \cdots \quad \cdots & \cdots\cdots \quad \cdots \quad \cdots\cdots \\ k(x_p, y_1) \cdots k(x_p, y_p) & k(x_p, t_1) \cdots k(x_p, t_n) \\ k(t_1, y_1) \cdots k(t_1, y_p) & k(t_1, t_1) \cdots k(t_1, t_n) \\ \cdots\cdots \quad \cdots \quad \cdots & \cdots\cdots \quad \cdots \quad \cdots\cdots \\ k(t_n, y_1) \cdots k(t_n, y_p) & k(t_n, t_1) \cdots k(t_n, t_n) \end{vmatrix}$$

$$dt_1 \cdots dt_n \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots). \quad (3.17)$$

$D(x_1, \cdots, x_p; y_1, \cdots, y_p; \lambda)$ 叫做 $k(x, y)$ 的 Fredholm 第 p 子式. 显然, 当 $p = 1$ 时, 即得前面 (3.2) 式所定义的 Fredholm第一子式.

利用Hadamard 不等式, 仿引理3.3 的证明方法, 可以证明下列引理:

引理3.9 (3.16) 式右端的级数对任何固定的 λ, 关于 $x_1, \cdots, x_p, y_1, \cdots, y_p \in I$ 一致收敛, 从而, $D(x_1, \cdots, x_p; y_1, \cdots, y_p; \lambda)$ 是$x_1, \cdots, x_p, y_1, \cdots, y_p$ 的连续函数.

引理3.10 (i) 若$x_1, \cdots, x_p$中有两个相等, 或$y_1, \cdots, y_p$中有两个相等, 则

$$D(x_1, \cdots, x_p; y_1, \cdots, y_p; \lambda) = 0.$$

(ii) 若$x_1, \cdots, x_p$中交换两个元素的位置，或$y_1, \cdots, y_p$中交换两个元素的位置，则$D(x_1, \cdots, x_p; y_1, \cdots, y_p; \lambda)$改变符号。

证 由行列式的性质即可推出。证完。

引理3.11 下面两个等式成立。

$$
\begin{aligned}
&D(x_1, \cdots, x_p; y_1, \cdots, y_p; \lambda)\\
&=\sum_{i=1}^{p}(-1)^{i+j}\lambda k(x_i, y_j)D(x_1, \cdots, x_{i-1}, x_{i+1}, \cdots,\\
&\qquad x_p; y_1, \cdots, y_{j-1}, y_{j+1}, \cdots, y_p; \lambda)\\
&\qquad +\lambda\int_a^b k(t, y_j)D(x_1, \cdots, x_p;\\
&\qquad\qquad y_1, \cdots, y_{j-1}, t, y_{j+1}, \cdots, y_p; \lambda)dt,\\
&\qquad\qquad j=1,2,\cdots,p. \qquad (3.18)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&D(x_1, \cdots, x_p; y_1, \cdots, y_p; \lambda)\\
&=\sum_{j=1}^{p}(-1)^{i+j}\lambda k(x_i, y_j)D(x_1, \cdots, x_{i-1}, x_{i+1}, \cdots, x_p;\\
&\qquad y_1, \cdots, y_{j-1}, y_{j+1}, \cdots, y_p; \lambda)\\
&\qquad +\lambda\int_a^b k(x_i, t)D(x_1, \cdots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \cdots, x_p;\\
&\qquad y_1, \cdots, y_p; \lambda)dt,\\
&\qquad\qquad i=1, 2, \cdots\cdots, p \qquad (3.19)
\end{aligned}
$$

证 下面先证明（3.18）式，显然，（3.18）式即为

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\lambda^{n+p}}{n!}B_n(x_1, \cdots, x_p; y_1, \cdots, y_p)\\
&=\sum_{i=1}^{p}(-1)^{i+j}k(x_i, y_j)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\lambda^{n+p}}{n!}\\
&\qquad B_n(x_1, \cdots, x_{i-1}, x_{i+1}, \cdots, x_p;\\
&\qquad y_1, \cdots, y_{j-1}, y_{j+1}, \cdots, y_p)
\end{aligned}
$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\lambda^{n+p}}{(n-1)!}\int_a^b k(t,y_j)B_{n-1}$$

$$(x_1,\cdots,x_p;\ y_1,\cdots,y_{j-1},t,y_{j+1},\cdots,y_p)dt.$$

所以，只需证明下列两式成立：

$$B_0(x_1,\cdots,x_p;\ y_1,\cdots,y_p)=\sum_{i=1}^{p}(-1)^{i+j}k(x_i,\ y_j)$$

$$\cdot B_0(x_1,\ \cdots,\ x_{i-1},\ x_{i+1},\ \cdots,\ x_p;$$

$$y_1,\ \cdots,\ y_{j-1},\ y_{j+1},\ \cdots,\ y_p),$$

$$j=1,\ 2,\ \cdots,\ p; \qquad (3.20)$$

$$B_n(x_1,\cdots,x_p;\ y_1,\cdots,y_p)$$

$$=\sum_{i=1}^{p}(-1)^{i+j}k(x_i,\ y_j)B_n(x_1,\cdots,\ x_{i-1},x_{i+1},\cdots,x_p;$$

$$y_1,\ \cdots,\ y_{j-1},\ y_{j+1},\ \cdots,\ y_p)$$

$$-n\int_a^b k(t,\ y_j)B_{n-1}(x_1,\ \cdots,\ x_p;$$

$$y_1,\ \cdots,\ y_{j-1},\ t,\ y_{j+1},\ y_p)dt,$$

$$j=1,2,\cdots,p;\quad n=1,2,3,\cdots, \qquad (3.21)$$

由行列式展开即可知（3.20）式成立，下证（3.21）式。为了符号简单起见，记

$$k\binom{s_1,\cdots,s_m}{t_1,\cdots,t_m}=\begin{vmatrix}k(s_1,\ t_1)&\cdots&k(s_1,\ t_m)\\ \cdots\cdots&\cdots&\cdots\cdots\\ k(s_m,\ t_1)&\cdots&k(s_m,\ t_m)\end{vmatrix}.$$

将（3.17）式中的行列式按第j纵行展开，得

$$B_n(x_1,\ \cdots,\ x_p;\ y_1,\ \cdots,\ y_p)$$

$$=\int_a^b\cdots\int_a^b\Big[\sum_{i=1}^{p}(-1)^{i+j}k(x_i,\ y_j)$$

$$k\begin{pmatrix} x_1,\cdots,x_{i-1},x_{i+1},\cdots,x_p, & t_1,\cdots, & t_n \\ y_1,\cdots,y_{j-1},y_{j+1},\cdots,y_p, & t_1,\cdots, & t_n \end{pmatrix}$$

$$+\sum_{i=1}^{n}(-1)^{p+i+j}k(t_i,\ y_j)$$

$$k\begin{pmatrix} x_1,\cdots,x_p, t_1,\cdots, t_{i-1}, & t_{i+1},\cdots, & t_n \\ y_1,\cdots,y_{j-1},y_{j+1},\cdots, & y_p,t_1,\cdots, & t_n \end{pmatrix}\Bigg]$$

$$dt_1\cdots dt_n. \qquad (3.22)$$

(3.22) 式右端第一个和式等于

$$\sum_{i=1}^{p}(-1)^{i+j}k(x_i,\ y_j)B_n(x_1,\cdots,x_{i-1},\ x_{i+1},\cdots,x_p;$$

$$y_1,\ \cdots,\ y_{j-1},\ y_{j+1},\ \cdots,\ y_p). \qquad (3.23)$$

在（3.22）式右端第二个和式第i项中，将t_i，t_{i+1}，…，t_n分别换成t，t_i，t_{i+1}，…，t_{n-1}，则此第i项为

$$(-1)^{p+i+j}k(t,\ y_j)$$

$$k\begin{pmatrix} x_1, \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots x_p, & t_1, & \cdots, & t_{n-1} \\ y_1,\cdots,y_{j-1},y_{j+1},\cdots,y_p,t_1,\cdots,t_{i-1},t,t_i,\cdots,t_{n-1} \end{pmatrix}$$

将此行列式的第$p-1+i$纵行移到第j纵行，得

$$(-1)^{p+i+j}k(t,\ y_j)(-1)^{p-1+i-j}$$

$$k\begin{pmatrix} x_1, & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots x_p, & t_1, & \cdots, & t_{n-1} \\ y_1, & \cdots,\ y_{j-1},\ t,\ y_{j+1},\ \cdots,\ y_p, & t_1, & \cdots, & t_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$=-k(t,\ y_j)\cdot$$

$$k\begin{pmatrix} x_1, & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots x_p, & t_1, & \cdots, & t_{n-1} \\ y_1, & \cdots,\ y_{j-1},\ t,\ y_{j+1},\ \cdots,\ y_p, & t_1, & \cdots, & t_{n-1} \end{pmatrix}.$$

由此可知，（3.22）式右端第二个和式等于

$$-n\int_a^b k(t,\ y_i)dt\int_a^b\cdots\int_a^b$$

$$k\begin{pmatrix} x_1, & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots x_p, & t_1, & \cdots, & t_{n-1} \\ y_1, & \cdots, y_{i-1}, t, y_{i+1}, \cdots, y_p, & t_1, & \cdots, & t_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$dt_1\cdots dt_{n-1}$$

$$=-n\int_a^b k(t,\ y_i)B_{n-1}(x_1,\ \cdots,\ x_p;$$

$$y_1,\ \cdots y_{i-1},\ t,\ y_{i+1},\ \cdots,\ y_p)dt \qquad (3.24)$$

由（3.22）、（3.23）及（3.24）诸式，即知（3.21）式成立，因此，（3.18）式成立。同理可以证得（3.19）式成立。证完。

引理3.12 下式成立：

$$\int_a^b\cdots\int_a^b D(x_1,\cdots,x_p;x_1,\cdots,x_p;\lambda)dx_1\cdots dx_p$$

$$=(-1)^p\lambda^p D^{(p)}(\lambda),$$

$$p=1,\ 2,\ 3,\ \cdots, \qquad (3.25)$$

其中$D^{(p)}(\lambda)$是$D(\lambda)$对λ的p阶导数。

证 将收敛级数

$$D(\lambda)=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\lambda^n}{n!}A_n$$

逐项微分p次，得

$$D^{(p)}(\lambda)=\sum_{n=p}^{\infty}(-1)^n\frac{\lambda^{n-p}}{(n-p)!}A_n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+p}\frac{\lambda^n}{n!}A_{n+p}. \qquad (3.26)$$

根据A_{n+p}与$B_n(x_1,\ \cdots,\ x_p;\ y_1,\ \cdots,\ y_p)$的定义，易知

$$A_{n+p}=\int_a^b\cdots\int_a^b B_n(x_1,\cdots,x_p;x_1,\cdots,x_p)dx_1\cdots dx_p.$$

$$(3.27)$$

于是，由（3.26）及（3.27）两式，可得

$$(-1)^p\lambda^p D^{(p)}(\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\lambda^{n+p}}{n!}\int_a^b\cdots\int_a^b$$

$$\cdot B_n(x_1,\cdots,x_p;\ x_1,\cdots,x_p)dx_1\cdots dx_p$$

$$=\int_a^b\cdots\int_a^b\Big[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\lambda^{n+p}}{n!}B_n(x_1,\ \cdots,\ x_p;$$

$$x_1,\ \cdots,\ x_p)\Big]dx_1\cdots dx_p$$

$$=\int_a^b\cdots\int_a^b D(x_1,\cdots,x_p;x_1,\cdots,x_p;\lambda)dx_1\cdots dx_p.$$

此即（3.25）式，注意，上式中的逐项积分是允许的，因为根据引理3.9，（3.16）式右端的级数是一致收敛的。证完。

现设λ_0是$D(\lambda)$ 的零点，即$D(\lambda_0)=0$。显然，$\lambda_0\neq 0$（因为$D(0)=1$）。因为$D(\lambda)\not\equiv 0$，故必存在$s\geqslant 1$，使得

$$D(\lambda_0)=D'(\lambda_0)=\cdots=D^{(s-1)}(\lambda_0)=0,$$

$$D^{(s)}(\lambda_0)\neq 0.$$

即s为零点λ_0的重数，由引理3.12可知$D(x_1,\cdots,\ x_s;\ x_1,\cdots,\ x_s;\ \lambda_0)\not\equiv 0$，故$D(x_1,\ \cdots,\ x_s;\ y_1,\ \cdots,\ y_s;\ \lambda_0)\not\equiv 0$。因此存在$1\leqslant r\leqslant s$，使

$$D(\lambda_0)=0,\ D(x,\ y;\ \lambda_0)\equiv 0,\ \cdots,$$

$$D(x_1,\cdots,\ x_{r-1};\ y_1,\cdots,\ y_{r-1};\ \lambda_0)\equiv 0,$$

$$D(x_1,\cdots,\ x_r;\ y_1,\ \cdots,\ y_r;\ \lambda_0)\not\equiv 0.$$

此r叫做λ_0的指数。下设$x_1^{(0)},\ x_2^{(0)},\ \cdots,\ x_r^{(0)};\ y_1^{(0)},\ \cdots,\ y_r^{(0)}\in I$，使得

$$D(x_1^{(0)},\cdots,x_r^{(0)};y_1^{(0)},\cdots,y_r^{(0)};\lambda_0)\neq 0.$$

定理3.13 （Fredholm第二定理）设$k(x,\ y)$ 在$I\times I$上连续。若$D(\lambda_0)=0$，并且λ_0的指数为r，则齐次线性积分方

程

$$u(x)=\lambda_0\int_a^b k(x,y)u(y)dy \tag{3.28}$$

具有 r 个线性无关的连续解，并且其它任何连续解都可以表示为这 r 个解的线性组合．这 r 个线性无关解可以取为如下的函数：

$$\varphi_i(x)=\frac{D(x_1^{(0)},\cdots,x_{i-1}^{(0)},x,x_{i+1}^{(0)},\cdots,x_r^{(0)};y_1^{(0)},\cdots,y_r^{(0)};\lambda_0)}{D(x_1^{(0)},\cdots,x_r^{(0)};y_1^{(0)},\cdots,y_r^{(0)};\lambda_0)}$$

$$(i=1,\ 2,\ \cdots,\ r). \tag{3.29}$$

证 在等式（3.19）式中，取 $p=r$，$\lambda=\lambda_0$，$x_1=x_1^{(0)}$，$\cdots$，$x_{i-1}=x_{i-1}^{(0)}$，$x_i=x$，$x_{i+1}=x_{i+1}^{(0)}$，$\cdots$，$x_r=x_r^{(0)}$，$y_1=y_1^{(0)}$，$\cdots$，$y_r=y_r^{(0)}$，可得

$$\begin{aligned}&D(x_1^{(0)},\ \cdots,\ x_{i-1}^{(0)},\ x,\ x_{i+1}^{(0)},\ \cdots,\ x_r^{(0)};\\&\qquad y_1^{(0)},\ \cdots,\ y_r^{(0)};\ \lambda_0)\\&=\lambda_0\int_a^b k(x,\ t)D(x_1^{(0)},\cdots,x_{i-1}^{(0)},\ t,x_{i+1}^{(0)},\cdots,\ x_r^{(0)};\\&\qquad y_1^{(0)},\cdots,y_r^{(0)};\ \lambda_0)dt \qquad (i=1,2,\cdots,r).\end{aligned}$$

上式两端以 $D(x_1^{(0)},\cdots,x_r^{(0)};\ y_1^{(0)},\cdots,y_r^{(0)};\ \lambda_0)$ 除之，得

$$\varphi_i(x)=\lambda_0\int_a^b k(x,t)\varphi_i(t)dt,\ \ i=1,2,\cdots,r, \tag{3.30}$$

即 $\varphi_i(x)$ 都是方程（3.28）的连续解．注意到

$$\varphi_i(x_j^{(0)})=\delta_{ij}=\begin{cases}1, & j=i;\\0, & j\neq i,\end{cases}$$

即知 $\varphi_1(x)$，$\varphi_2(x)$，$\cdots$，$\varphi_r(x)$ 是线性无关的．

最后，我们证明方程（3.28）的任何连续解 $u(x)$ 都可以表为 $\varphi_1(x),\cdots,\varphi_r(x)$ 的线性组合．由（3.18）式可知

$$\begin{aligned}&D(x,x_1^{(0)},\cdots,x_r^{(0)};y,y_1^{(0)},\cdots,y_r^{(0)}\lambda_0)\\&=\lambda_0k(x,y)D(x_1^{(0)},\cdots,x_r^{(0)};\ y_1^{(0)},\cdots,y_r^{(0)};\lambda_0)\end{aligned}$$

$$+\sum_{i=1}^{r}(-1)^{i+2}\lambda_0 k(x_i^{(0)},y)D(x,x_1^{(0)},\cdots,$$

$$x_{i-1}^{(0)},x_{i+1}^{(0)},\cdots,x_r^{(0)};y_1^{(0)},\cdots,y_r^{(0)};\lambda_0)$$

$$+\lambda_0\int_a^b k(t,\ y)D(x,\ x_1^{(0)},\ \cdots,\ x_r^{(0)};$$

$$t,\ y_1^{(0)},\ \cdots,\ y_r^{(0)};\ \lambda_0)dt$$

$$=\lambda_0 k(x,y)D(x_1^{(0)},\cdots,x_r^{(0)};y_1^{(0)},\cdots,\ y_r^{(0)};\ \lambda_0)$$

$$-\lambda_0\sum_{i=1}^{r}k(x_i^{(0)},y)D(x_1^{(0)},\cdots,x_{i-1}^{(0)},\ x,x_{i+1}^{(0)},\cdots,$$

$$x_r^{(0)};\ y_1^{(0)},\ \cdots,\ y_r^{(0)};\ \lambda_0)$$

$$+\lambda_0\int_a^b k(t,\ y)D(x,\ x_1^{(0)},\ \cdots,\ x_r^{(0)};$$

$$t,\ y_1^{(0)},\ \cdots,\ y_r^{(0)};\ \lambda_0)dt.$$

上式两端以$D(x_1^{(0)},\cdots,x_r^{(0)};y_1^{(0)},\cdots,y_r^{(0)};\lambda_0)$除之，并令

$$H(x,\ y)=\frac{D(x,x_1^{(0)},\cdots,x_r^{(0)};y,y_1^{(0)},\cdots,y_r^{(0)};\lambda_0)}{D(x_1^{(0)},\cdots,x_r^{(0)};y_1^{(0)},\cdots,y_r^{(0)};\lambda_0)} \tag{3.31}$$

即可得

$$H(x,y)=\lambda_0 k(x,y)-\lambda_0\sum_{i=1}^{r}k(x_i^{(0)},y)\varphi_i(x)$$

$$+\lambda_0\int_a^b H(x,\ t)k(t,\ y)dt. \tag{3.32}$$

于是，

$$u(x)=\lambda_0\int_a^b k(x,y)u(y)dy$$

$$=\int_a^b [H(x,\ y)+\lambda_0\sum_{i=1}^{r}k(x_i^{(0)},y)\varphi_i(x)$$

$$-\lambda_0\int_a^b H(x,t)k(t,y)dt]u(y)dy$$

$$=\int_a^b H(x,\ y)u(y)dy+\lambda_0\sum_{i=1}^{r}\varphi_i(x)$$

$$\int_a^b k(x_i^{(0)},\ y)u(y)dy$$

$$-\lambda_0\int_a^b H(x,t)dt\int_a^b k(t,\ y)u(y)dy$$

$$=\int_a^b H(x,\ y)u(y)dy+\lambda_0\sum_{i=1}^{r}\varphi_i(x)$$

$$\int_a^b k(x_i^{(0)},\ y)u(y)dy-\int_a^b H(x,\ t)u(t)dt$$

$$=\lambda_0\sum_{i=1}^{r}\varphi_i(x)\int_a^b k(x_i^{(0)},\ y)u(y)dy,$$

即$u(x)$ 可以表为$\varphi_1(x)$, …, $\varphi_r(x)$ 的线性组合. 证完.

注3.14 由定理3.6和定理3.13可以知道: λ_0是核 $k(x,y)$ 的特征值的充分必要条件是 $D(\lambda_0)=0$; 而λ_0的指数 r 称为是此特征值的几何重数. 函数组 (3.29) 构成了属于λ_0的特征函数完全系.

核$k(y,x)$ 称为核$k(x,y)$ 的转置核, 方程

$$v(x)=\lambda_0\int_a^b k(y,\ x)v(y)dy \tag{3.33}$$

称为是方程 (3.28) 的转置方程. 用$\overline{D}(\lambda)$ 和$\overline{D}(x_1,\ \cdots,\ x_p;\ y_1,\cdots,y_p;\ \lambda)$ 分别表示转置核$k(y,\ x)$ 的 Fredholm 行列式和Fredholm第p子式. 则根据定义易知

$$\overline{D}(\lambda)=D(\lambda), \tag{3.34}$$

$$\overline{D}(x_1,\ \cdots,\ x_p;\ y_1,\ \cdots,\ y_p;\ \lambda)$$

$$=D(y_1,\ \cdots,\ y_p;\ x_1,\ \cdots,\ x_p;\ \lambda). \qquad (3.35)$$

引理3.15 λ_0 是转置核 $k(y,\ x)$ 的特征值的充分必要条件是 λ_0 是核 $k(x,\ y)$ 的特征值，并且指数相等，均为 r. 此外，方程（3.33）的一线性无关连续解组可以取为

$$\psi_i(x)=\frac{D(x_1^{(0)},\cdots,x_r^{(0)};y_1^{(0)},\cdots,y_{i-1}^{(0)},x,y_{i+1}^{(0)},\cdots,y_r^{(0)};\lambda_0)}{D(x_1^{(0)},\cdots,x_r^{(0)};y_1^{(0)},\cdots,y_r^{(0)};\lambda_0)}$$

$$(i=1,\ 2,\ \cdots,\ r). \qquad (3.36)$$

证 由（3.34）与（3.35）式，即知 $\overline{D}(\lambda_0)=0$ 当且仅当 $D(\lambda_0)=0$，并且指数相等，均为 r. 令 $\overline{x}_i^{(0)}=y_i^{(0)}$，$\overline{y}_i^{(0)}=x_i^{(0)}$ $(i=1,2,\cdots,r)$，则有

$$\overline{D}(\lambda_0)=0,\ \overline{D}(x,\ y;\ \lambda_0)\equiv 0,\ \cdots,$$

$$\overline{D}(x_1,\cdots,x_{r-1};y_1,\cdots,y_{r-1};\lambda_0)\equiv 0,$$

$$\overline{D}(\overline{x}_1^{(0)},\cdots,\overline{x}_r^{(0)};\overline{y}_1^{(0)},\cdots,\overline{y}_r^{(0)};\lambda_0)$$

$$=D(x_1^{(0)},\cdots,x_r^{(0)};y_1^{(0)},\cdots,y_r^{(0)};\lambda_0)\neq 0.$$

将定理3.13用于方程（3.33），即知方程（3.33）的一组线性无关连续解为

$$\psi_i(x)=\overline{\varphi}_i(x)$$

$$=\frac{\overline{D}(\overline{x}_1^{(0)},\cdots,\overline{x}_{i-1}^{(0)},x,\overline{x}_{i+1}^{(0)},\cdots,\overline{x}_r^{(0)};\overline{y}_1^{(0)},\cdots,\overline{y}_r^{(0)};\lambda_0)}{\overline{D}(\overline{x}_1^{(0)},\cdots,\overline{x}_r^{(0)};\overline{y}_1^{(0)},\cdots,\overline{y}_r^{(0)};\lambda_0)}$$

$$=\frac{D(x_1^{(0)},\cdots,x_r^{(0)};y_1^{(0)},\cdots,y_{i-1}^{(0)},x,y_{i+1}^{(0)},\cdots,y_r^{(0)};\lambda_0)}{D(x_1^{(0)},\cdots,x_r^{(0)};y_1^{(0)},\cdots,y_r^{(0)};\lambda_0)}$$

$$(i=1,\ 2,\ \cdots,\ r)$$

此即（3.36）式. 证完.

注3.16 与（3.31）、（3.32）式对应，有

$$\overline{H}(x,\ y)=\frac{\overline{D}(x,\overline{x}_1^{(0)},\cdots,\overline{x}_r^{(0)};y,\overline{y}_1^{(0)},\cdots,\overline{y}_r^{(0)};\lambda_0)}{\overline{D}(\overline{x}_1^{(0)},\cdots,\overline{x}_r^{(0)};\overline{y}_1^{(0)},\cdots,\overline{y}_r^{(0)};\lambda_0)}$$

$$=\frac{D(y,x_1^{(0)},\cdots,x_r^{(0)};x,y_1^{(0)},\cdots,y_r^{(0)};\lambda_0)}{D(x_1^{(0)},\cdots,x_r^{(0)};y_1^{(0)},\cdots,y_r^{(0)};\lambda_0)}$$

$$=H(y,\ x), \tag{3.37}$$

以及

$$\overline{H}(x,y)=\lambda_0 k(y,x)-\lambda_0\sum_{i=1}^{r}k(y,\ \overline{x}_i^{(0)})\overline{\varphi}_i(x)$$

$$+\lambda_0\int_a^b\overline{H}(x,\ t)k(y,\ t)dt,$$

于是

$$H(y,x)=\lambda_0 k(y,x)-\lambda_0\sum_{i=1}^{r}k(y,\ y_i^{(0)})\psi_i(x)$$

$$+\lambda_0\int_a^b H(t,x)k(y,t)dt. \tag{3.38}$$

定理3.17（Fredholm 第三定理） 设$k(x,\ y)$在$I\times I$上连续，$f(x)$在I上连续．如果$D(\lambda_0)=0$，并且λ_0的指数为r，则非齐次线性积分方程

$$u(x)=f(x)+\lambda_0\int_a^b k(x,\ y)u(y)dy \tag{3.39}$$

在I上具有连续解的充分必要条件是：

$$\int_a^b f(x)\psi_i(x)dx=0 \qquad (i=1,2,\cdots,r) \tag{3.40}$$

其中$\psi_i(x)$由（3.36）式给出（它构成转置齐次方程（3.33）的一组线性无关的连续解）．当（3.40)式满足时，方程(3.39)具有无穷多个连续解，由下式给出：

$$u(x)=f(x)+\int_a^b H(x,\ y)f(y)dy+c_1\varphi_1(x)$$

$$+\cdots+c_r\varphi_r(x), \tag{3.41}$$

其中c_1，…，c_r是任意常数，$\varphi_i(x)$（$i=1,\ 2,\ \cdots,\ r$）由（3.29）式给出，$H(x,\ y)$由（3.31）式给出．

证 必要性．设方程（3.39）具有连续解$u(x)$，则

$$\int_a^b f(x)\psi_i(x)\,dx=\int_a^b [u(x)$$

$$-\lambda_0\int_a^b k(x,\ y)u(y)dy]\psi_i(x)dx$$

$$=\int_a^b u(x)\psi_i(x)\,dx-\lambda_0\int_a^b u(y)dy\int_a^b k(x,y)\psi_i(x)dx$$

$$=\int_a^b u(x)\psi_i(x)\,dx-\int_a^b u(y)\psi_i(y)dy=0,$$

$$i=1,\ 2,\ \cdots,\ r.$$

故（3.40）式满足．

充分性．设（3.40）式满足，我们只需证明连续函数

$$u_0(x)=f(x)+\int_a^b H(x,\ y)f(y)dy$$

是方程（3.39）的解．因为$c_1\varphi_1(x)+\cdots+c_r\varphi_r(x)$是齐次方程（3.38）的通解，故（3.41）式给出方程（3.39）的通解．由（3.38）式，并利用（3.40）式，可知

$$\int_a^b H(y,\ x)f(x)dx=\lambda_0\int_a^b k(y,x)f(x)dx$$

$$+\lambda_0\int_a^b f(x)\,dx\int_a^b H(t,\ x)k(y,\ t)dt$$

$$=\lambda_0\int_a^b k(y,\ x)f(x)dx$$

$$+\lambda_0\int_a^b k(y,t)dt\int_a^b H(t,\ x)f(x)\,dx,$$

于是

$$u_0(y)-f(y)=\int_a^b H(y,\ x)f(x)dx$$

$$=\lambda_0\int_a^b k(y,x)f(x)dx+\lambda_0\int_a^b k(y,\ t)[u_0(t)-f(t)]dt$$

$$=\lambda_0\int_a^b k(y,\ t)u_0(t)dt.$$

故$u_0(x)$是方程（3.39）的解．证完．

例3.18 当$\lambda=\pm\frac{2}{\pi}$时，求解方程（3.15）．

解 在例3.8中，我们已求出$D(\lambda)=1-\frac{\pi^2}{4}\lambda^2$，$D(x,\ y;\ \lambda)=\lambda\sin(x+y)+\frac{\pi}{2}\lambda^2\cos(x-y)$．先考察$\lambda=\frac{2}{\pi}$．由于$D\left(\frac{2}{\pi}\right)=0$，$D\left(x,\ y;\ \frac{\pi}{2}\right)=\frac{2}{\pi}[\sin(x+y)+\cos(x-y)]\neq 0$，故$\frac{2}{\pi}$是指数为1的特征值，因为$k(y,\ x)=\sin(y+x)=k(x,\ y)$．故方程（3.33）与方程（3.28）相同．此方程只有一个线性无关的连续解，根据（3.29）式，该解为

$$\psi(x)=\varphi(x)=\frac{D\left(x,\ 0;\frac{2}{\pi}\right)}{D\left(0,0;\frac{2}{\pi}\right)}=\sin x+\cos x.$$

于是，根据定理3.17，当$\lambda=\frac{2}{\pi}$时，方程（3.15）有连续解的充分必要条件是

$$\int_0^\pi(\sin x+\cos x)dx=0. \qquad (3.42)$$

但是，$\int_0^\pi(\sin x+\cos x)dx=2\neq 0$，故（3.42）式不成立，因

此，当$\lambda=\frac{2}{\pi}$时，方程（3.15）无连续解。

同理可以证明：当$\lambda=-\frac{2}{\pi}$时，方程（3.15）也没有连续解。

下面我们不加证明地叙述Fredholm线性积分方程（1.2）解对核和自由项的连续相依性定理。

设$k_n(x, y)$（$n=1, 2, \cdots$）及$k(x, y)$均在$I\times I$上连续，$f_n(x)$（$n=1, 2, \cdots$）及$f(x)$在I上连续。分别用$D_n(\lambda)$（$n=1, 2, \cdots$）和$D(\lambda)$表示$k_n(x, y)$（$n=1, 2, \cdots$）和$k(x, y)$的Fredholm行列式。

引理3.19 假设

$$\lim_{n\to\infty}\max_{x,y\in I}|k_n(x,y)-k(x,y)|=0, \tag{3.43}$$

则对任给$-\infty<\alpha<\beta<+\infty$，当$\lambda\in[\alpha, \beta]$时一致成立

$$\lim_{n\to\infty}D_n(\lambda)=D(\lambda).$$

于是，当（3.43）式满足时，若λ_0不是$k(x, y)$的特征值，则当n充分大时，λ_0也不是$k_n(x, y)$的特征值。

定理3.20（解对核和自由项的连续相依性定理）设(3.43)式满足，并且

$$\lim_{n\to\infty}\max_{x\in I}|f_n(x)-f(x)|=0. \tag{3.44}$$

如果λ_0不是$k(x, y)$的特征值，则当n充分大时，λ_0也不是$k_n(x, y)$的特征值，并且

$$\lim_{n\to\infty}\max_{x\in I}|u_n(x)-u(x)|=0, \tag{3.45}$$

其中$u_n(x)$和$u(x)$分别为方程

$$u_n(x)=f_n(x)+\lambda_0\int_a^b k_n(x, y)u_n(y)dy$$

$$(n=1, 2, \cdots) \tag{3.46}$$

与方程(3.39)在I上的唯一连续解.

注3.21 为了简单起见，以上是对一维空间的情况进行讨论的. 完全类似地可以证明：如果G是n维欧氏空间R^n中的有界闭集，$\text{mes}G>0$，$k(x, y)$在$G\times G$上连续，$f(x)$在G上连续，则本节的全部结论，对n维空间上的Fredholm积分方程

$$u(x)=f(x)+\int_G k(x, y)u(y)dy \tag{3.47}$$

也都成立

上述讨论是在连续函数空间中进行的. 对于L_2空间，类似地结果也成立.

设G是R^n中的某可测集，$0<\text{mes}G\leqslant+\infty$. 设$k(x, y)\in L_2(G\times G)$，即$k(x, y)$在$G\times G$上可测，并且

$$\int_G\int_G[k(x, y)]^2dxdy<+\infty. \tag{3.48}$$

令

$$D^*(\lambda)=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\lambda^n}{n!}A_n^*, \tag{3.49}$$

$$D^*(x,y;\lambda)=\lambda k(x,y)+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\lambda^{n+1}}{n!}B_n^*(x, y), \tag{3.50}$$

其中，

$$A_n^*=\int_G\cdots\int_G\begin{vmatrix} 0 & k(t_1,t_2) & \cdots & k(t_1,t_n)\\ k(t_2,t_1) & 0 & \cdots & k(t_2,t_n)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ k(t_n,t_1) & k(t_n,t_2) & \cdots & 0\end{vmatrix}dt_1\cdots dt_n,$$

$$B_n^*(x,y)=\int_G\cdots\int_G\begin{vmatrix}k(x,y) & k(x,t_1) & k(x,t_2) & \cdots & k(x,t_n)\\ k(t_1,y) & 0 & k(t_1,t_2) & \cdots & k(t_1,t_n)\\ k(t_2,y) & k(t_2,t_1) & 0 & \cdots & k(t_2,t_n)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ k(t_n,y) & k(t_n,t_1) & k(t_n,t_2) & \cdots & 0\end{vmatrix}dt_1\cdots dt_n.$$

可以证明，(3.49)式右端的级数，对任何λ收敛；(3.50)式右端的级数，对任何λ按$L_2(G\times G)$中的范数收敛。$D^*(\lambda)$叫做$k(x, y)$的Fredholm-Carleman行列式，$D^*(x, y; \lambda)$叫做$k(x, y)$的 Fredholm-Carleman 第一子式。

定理3.22 设$k(x, y)\in L_2(G\times G)$，$f(x)\in L_2(G)$ 若$D^*(\lambda_0)\neq 0$，则方程

$$u(x)=f(x)+\lambda_0\int_G k(x,y)u(y)dy \tag{3.51}$$

在$L_2(G)$中具有唯一解，并且该解可以表为：

$$u(x)=f(x)+\int_G\frac{D^*(x,y;\lambda_0)}{D^*(\lambda_0)}f(y)dy. \tag{3.52}$$

推论3.23 设$k(x, y)\in L_2(G\times G)$。若$D^*(\lambda_0)\neq 0$，则齐次方程

$$u(x)=\lambda_0\int_G k(x,y)u(y)dy \tag{3.53}$$

在$L_2(G)$中只有平凡解$u(x)\equiv 0$。

定理3.24 设$k(x, y)\in L_2(G\times G)$。若$D^*(\lambda_0)=0$，则齐次方程（3.53）在$L_2(G)$中必具有非平凡解，其线性无关解的个数必为有限，其最大数r叫做λ_0的指数。这时，转置齐次方程

$$u(x)=\lambda_0\int_G k(y,\ x)u(y)dy \tag{3.54}$$

在$L_2(G)$中线性无关解的最大个数也是r。

定理3.25 设$k(x,\ y)\in L_2(G\times G)$，$f(x)\in L_2(G)$。若$D^*(\lambda_0)=0$，并且其指数为$r$，则非齐次方程（3.51）在$L_2(G)$中有解的充分必要条件是：

$$\int_G f(x)\psi_i(x)dx=0 \quad (i=1,2,\cdots,r), \tag{3.55}$$

其中$\psi_1(x)$，…，$\psi_r(x)$是转置齐次方程（3.54）的一组（最大）线性无关解。当条件（3.55）式满足时，方程（3.51）在$L_2(G)$中具有无穷多个解，由下式给出：

$$u(x)=u_0(x)+c_1\varphi_1(x)+\cdots+c_r\varphi_r(x), \tag{3.56}$$

其中$u_0(x)$是方程（3.51）的一个特解，$\varphi_1(x)$，…，$\varphi_r(x)$是齐次方程（3.53）的一组（最大）线性无关解，$c_1,\cdots,c_r$为任意常数。

定理3.26 设$k_n(x,\ y)$，$k(x,\ y)\in L_2(G\times G)$，$f_n(x)$，$f(x)\in L_2(G)$。设

$$\lim_{n\to\infty}\|k_n-k\|_{L2(G\times G)}=\lim_{n\to\infty}\left(\int_G\int_G[k_n(x,\ y)-k(x,\ y)]^2dxdy\right)^{\frac{1}{2}}=0,$$

$$\lim_{n\to\infty}\|f_n-f\|_{L2(G)}=\lim_{n\to\infty}\left(\int_G[f_n(x)-f(x)]^2dx\right)^{\frac{1}{2}}=0.$$

如果λ_0不是$k(x,\ y)$的特征值，则当n充分大时，λ_0也不是$k_n(x,\ y)$的特征值，并且

$$\lim_{n\to\infty}\|u_n-u\|_{L2(G)}=\lim_{n\to\infty}\left(\int_G[u_n(x)-u(x)]^2dx\right)^{\frac{1}{2}}=0,$$

其中$u_n(x)$和$u(x)$分别是方程

$$u_n(x)=f_n(x)+\lambda_0\int_G k_n(x,y)u_n(y)dy \quad (n=1,\ 2,\ \cdots) \tag{3.57}$$

和方程（3.51）在$L_2(G)$中的唯一解.

附注 早在1900年前后，I.Fredholm在〔1〕、〔2〕中，就通过把线性积分方程与线性代数方程组类比的方法（即把线性积分方程看作是“无穷维”线性代数方程组），获得了以他的名字命名的关于线性积分方程理论的一组基本定理（即本节所述的定理3.6、3.13、3.17）．这些定理，本质上是线性代数方程组的一般理论向无穷维的推广．Fredholm的论文〔2〕是一篇重要的文章，Fredholm第一、第二、第三定理都是在这篇论文中建立的．

关于定理3.22～3.25的证明，可以在F.Smithies〔1〕或A.C.Zaanen〔1〕中找到．

定理3.20和定理3.26是由郭大钧在〔2〕中获得的，对Volterra型方程（1.1），也可以建立与定理3.20类似的结论（参见郭大钧〔3〕）．

关于线性积分方程的Fredholm理论，还可见W. V. Lovitt〔1〕，R.P.Kamwal〔1〕及И.П.Петровский〔1〕

关于线性积分方程的Fredholm理论，可以推广到作用在Banach空间E中的全连续算子方程

$$x=Ax+y, \tag{3.58}$$

其中$A:E\to E$是全连续线性算子，这就是所谓的Riesz-Schauder理论，这一推广是由F. Reisz（〔1〕）和J. Schauder（〔1〕）完成的，关于Reisz-Schauder理论的详细叙述，可

以在任何一本完备的泛函分析教材中找到，例如夏道行等〔1〕，N.Dunford及J.T.Schwartz〔1〕.

§4 Hilbert-Schmidt 理论

实对称核线性积分方程的 Hilbert-Schmidt 理论，是在 Fredholm理论的基础上，再假定实核$k(x, y)$是对称的（即$k(x, y)=k(y, x)$），从而可以获得若干更深入的结果. 在本节中，仍使用§2和§3中的记号，注意，在§2和§3中的诸结论中，λ显然可以为复数.

引理4.1 设$k(x, y)$在$I\times I$上连续，则存在$l>0$，使得

$$\frac{D(x, y; \lambda)}{D(\lambda)}=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^n k_n(x, y),$$

$$\forall |\lambda|<l,\quad x, y\in I. \tag{4.1}$$

其中$k_n(x, y)$是由（2.3）式确定的$k(x, y)$的 Fredholm n重迭核. 更进一步，（4.1）式右端的级数在$|\lambda|<l$时关于x, $y\in I$一致收敛.

证 因为$D(0)=1\neq 0$，故可取$0<l<[M(b-a)]^{-1}$ $(M=\max\limits_{x,y\in I}|k(x, y)|)$，使得当$|\lambda|<l$时有$D(\lambda)\neq 0$. 下证此$l$即满足定理的要求. 首先，由于

$$k_n(x, y)=\int_a^b\cdots\int_a^b k(x, t_1)k(t_1, t_2)\cdots k(t_{n-1}, y)dt_1\cdots dt_{n-1} \tag{4.2}$$

所以有估计式

$$|\lambda^n k_n(x, y)|\leqslant(|\lambda|M)^n(b-a)^{n-1}\quad (n=1,2,\cdots),$$

由此可知，（4.1）式右端的级数当$|\lambda|<l$时，对$x, y\in I$一致收敛。故其和是x，y的连续函数。给定λ，使$|\lambda|<l$。根据定理2.1和定理3.6可知：对任何$f(x)\in C[a, b]$，都有

$$\int_a^b\left[\frac{D(x, y; \lambda)}{D(\lambda)}-\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^n k_n(x, y)\right]f(y)dy$$

$$\equiv 0, \quad \forall x\in I.$$

任意固定$x\in I$，令$f(y)=\dfrac{D(x, y; \lambda)}{D(\lambda)}-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\lambda^n k_n(x, y)$，即得

$$\int_a^b\left[\frac{D(x, y; \lambda)}{D(\lambda)}-\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^n k_n(x, y)\right]^2 dy=0,$$

所以

$$\frac{D(x, y; \lambda)}{D(\lambda)}\equiv\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^n k_n(x, y), \quad \forall y\in I.$$

又因为$x\in I$是任意的，故（4.1）式成立。证完。

推论4.2 设$k(x, y)$在$I\times I$上连续，则存在$l>0$，使得

$$\frac{D'(\lambda)}{D(\lambda)}=-\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^{n-1}\int_a^b k_n(x, x)dx,$$

$$\forall |\lambda|<l. \tag{4.3}$$

证 在引理3.12中，令$p=1$，得

$$\int_a^b D(x, x; \lambda)dx=-\lambda D'(\lambda) \tag{4.4}$$

于是，由（4.4）与（4.1）式即得（4.3）式。证完。

引理4.3 设$k(x, y)$在$I\times I$上连续，并且是不恒为0的对称核，则$k_n(x, y)$ $(n=1, 2, \cdots)$ 也是不恒为0的连续对称核。

证 由于$k(x, y)=k(y, x)$，故由（4.2）式知

$$k_n(y, x)=\int_a^b\cdots\int_a^b k(y, t_1)k(t_1, t_2)$$

$$\cdots k(t_{n-1}, x)dt_1\cdots dt_{n-1}$$

$$=\int_a^b\cdots\int_a^b k(x,t_{n-1})\cdots k(t_2,t_1)k(t_1,y)$$

$$dt_{n-1}\cdots dt_1=k_n(x, y),$$

故$k_n(x, y)$是对称核．$k_n(x, y)$的连续性是显然的．下面证明

$$k_n(x, y)\not\equiv 0 \quad (n=1, 2, 3, \cdots). \tag{4.5}$$

事实上，若（4.5）式不成立，则必存在某 $m>1$，使

$$k(x, y)\not\equiv 0,\ k_2(x, y)\not\equiv 0,\ \cdots,$$

$$k_{m-1}(x, y)\not\equiv 0,\ k_m(x, y)\equiv 0. \tag{4.6}$$

由（2.3）式知$k_{m+1}(x, y)\equiv 0$．m 与 $m+1$ 中必有一个数是偶数，设该偶数为$2s$．由（4.2）式易知

$$k_n(x, y)=\int_a^b k_{n-p}(x, t)k_p(t, y)dt,$$

$$p=1, 2, \cdots, n-1. \tag{4.7}$$

在（4.7）式中取 $n=2s$，$p=s$，并注意到 $k_s(x, y)$ 是对称核，即可得

$$0\equiv k_{2s}(x,x)=\int_a^b [k_s(x, t)]^2 dt,\quad \forall x\in I.$$

从而

$$\int_a^b\int_a^b [k_s(x, t)]^2 dxdt=0.$$

再注意到 $k_s(x, t)$ 的连续性，即知 $k_s(x, t)\equiv 0$．但因 $2s=m$ 或 $2s=m+1$，而 $m>1$，故易知 $m>s$．此显然与（4.6）式矛盾．证完．

推论4.4 设 $k(x, y)$ 在 $I\times I$ 上连续，并且是不恒为 0 的对称核．则

$$\int_a^b k_{2m}(x, x)dx>0 \quad (m=1,2,3,\cdots). \qquad (4.8)$$

证 在(4.7)式中，令 $n=2m$，$p=m$，并注意到 $k_m(x, y)$ 的对称性，即得

$$k_{2m}(x, x)=\int_a^b [k_m(x, t)]^2 dt.$$

由引理4.3知 $k_m(x, t)\not\equiv 0$，故

$$\int_a^b k_{2m}(x, x)dx=\int_a^b\int_a^b [k_m(x, t)]^2 dtdx>0$$

$$(m=1, 2, 3, \cdots). \qquad (4.9)$$

证完．

定理4.5 设 $k(x, y)$ 是 $I\times I$ 上不恒为零的连续对称核，则 $k(x, y)$ 至少具有一个特征值．

证 根据定理3.6和定理3.13，只需证明Fredholm行列式 $D(\lambda)$ 至少有一个零点．用反证法．设 $D(\lambda)$ 没有零点，则根据复变函数理论．可知，$\dfrac{D'(\lambda)}{D(\lambda)}$ 可以展为对任何复数 λ 都收敛的幂级数：

$$\frac{D'(\lambda)}{D(\lambda)}=-\sum_{n=1}^{\infty}C_n\lambda^{n-1}, \quad |\lambda|<+\infty. \qquad (4.10)$$

比较展式（4.3）式与（4.10）式，根据幂级数展式的唯一性，可得

$$c_n=\int_a^b k_n(x,x)dx \quad (n=1,2,3,\cdots). \tag{4.11}$$

由（4.10）式知

$$\sum_{m=1}^{\infty}|c_{2m}||\lambda|^{2m}<+\infty, \quad \forall|\lambda|<+\infty. \tag{4.12}$$

另一方面，由推论4.4知$c_{2m}>0$（$m=1, 2, 3, \cdots$）。由(4.7)、(4.9)、(4.11）诸式，并利用Schwartz不等式，有

$$c_{2m}^2=\left[\int_a^b dx\int_a^b k_{m-1}(x, t)k_{m+1}(t, x)dt\right]^2$$

$$=\left[\int_a^b\int_a^b k_{m-1}(x, t)k_{m+1}(x, t)dxdt\right]^2$$

$$\leqslant\left(\int_a^b\int_a^b [k_{m-1}(x, t)]^2dxdt\right)$$

$$\left(\int_a^b\int_a^b [k_{m+1}(x, t)]^2dxdt\right)$$

$$=c_{2m-2}\,c_{2m+2}.$$

所以，

$$\frac{c_{2m+2}}{c_{2m}}\geqslant\frac{c_{2m}}{c_{2m-2}} \quad (m=2, 3, 4, \cdots).$$

从而

$$\frac{c_{2m+2}}{c_{2m}}\geqslant\frac{c_{2m}}{c_{2m-2}}\geqslant\frac{c_{2m-2}}{c_{2m-4}}\geqslant\cdots\geqslant\frac{c_4}{c_2},$$

于是

$$\frac{c_{2m+2}|\lambda|^{2m+2}}{c_{2m}|\lambda|^{2m}}\geqslant|\lambda|^2\frac{c_4}{c_2} \quad (m=1, 2, 3, \cdots).$$

由此可知，当$|\lambda|\geqslant\sqrt{\frac{c_2}{c_4}}$时，级数$\sum_{m=1}^{\infty}c_{2m}|\lambda|^{2m}$发散。此与(4.12）式矛盾.证完。

注4.6 从定理4.5的证明中可以知道，$D(\lambda)$ 在复平面的闭圆$\{\lambda||\lambda|\leqslant\sqrt{\frac{c_2}{c_4}}\}$ 中必有零点，从而核 $k(x, y)$ 在 $\{\lambda||\lambda|\leqslant\sqrt{\frac{c_2}{c_4}}\}$ 中必有特征值.

注4.7 若 $k(x, y)$ 不是对称核，则它可能没有特征值. 例如，令$a=0$，$b=\pi$，$k(x, y)=\sin x\cos y$. 则该 $k(x, y)$ 没有特征值. 事实上，若有λ及$u(x)$，使得

$$u(x)=\lambda\int_0^\pi k(x, y)u(y)dy$$

$$=\lambda\sin x\int_0^\pi(\cos y)u(y)dy,$$

则$u(x)=c\sin x$，其中c是某常数. 以 $u(x)=c\sin x$ 代入上式，得

$$c\sin x=c\lambda\sin x\int_0^\pi\cos y\sin y dy\equiv 0.$$

故$c=0$，从而$u(x)\equiv 0$. 这表明$k(x, y)$ 没有特征值.

引理4.8 设$k(x, y)$ 是$I\times I$上不恒为零的连续对称核. 若λ_1和λ_2都是$k(x, y)$ 的特征值，$\lambda_1\neq\lambda_2$，$\varphi_1(x)$ 和 $\varphi_2(x)$ 分别是$k(x, y)$ 相应于λ_1和λ_2的特征函数，则

$$\int_a^b\varphi_1(x)\varphi_2(x)dx=0. \tag{4.13}$$

证 显然

$$\lambda_2\int_a^b\varphi_1(x)\varphi_2(x)dx$$

$$=\lambda_1\lambda_2\int_a^b\varphi_2(x)dx\int_a^b k(x, y)\varphi_1(y)dy$$

$$=\lambda_1\lambda_2\int_a^b\varphi_1(y)dy\int_a^b k(x, y)\varphi_2(x)dx$$

$$=\lambda_1\lambda_2\int_a^b\varphi_1(y)dy\int_a^b k(y, x)\varphi_2(x)dx$$

$$=\lambda_1\int_a^b\varphi_1(y)\varphi_2(y)dy.$$

因为$\lambda_1\neq\lambda_2$，故由上式知（4.13）式成立．证完．

定理4.9 设$k(x, y)$是$I\times I$上的不恒为零的连续对称核，则$k(x, y)$的特征值均为实数．

证 设$\lambda_0=\alpha+i\beta$（$\beta\neq 0$）是$k(x, y)$的复特征值，$u_0(x)=v_0(x)+iw_0(x)$是$k(x, y)$对应于λ_0的特征函数，$u_0(x)\not\equiv 0$．于是，

$$u_0(x)=\lambda_0\int_a^b k(x, y)u_0(y)dy. \tag{4.14}$$

在（4.14）两端取共轭复数，注意到核$k(x, y)$是实函数，得

$$\overline{u_0(x)}=\overline{\lambda_0}\int_a^b k(x, y)\overline{u_0(y)}dy.$$

因为$\overline{u_0(x)}\not\equiv 0$，故$\overline{u_0(x)}$是$k(x, y)$对应于特征值$\overline{\lambda_0}$的特征函数．由于$\beta\neq 0$，故$\overline{\lambda_0}\neq\lambda_0$．从而根据引理4.8知

$$\int_a^b|u_0(x)|^2dx=\int_a^b u_0(x)\overline{u_0(x)}dx=0.$$

所以，$u_0(x)\equiv 0$，此与$u_0(x)\not\equiv 0$矛盾．证完．

定理4.10 设$k(x, y)$是$I\times I$上不恒为0的连续对称核．则存在$k(x, y)$的全系特征值$\{\lambda_n\}$，与对应的全系就范直交特征函数$\{\psi_n(x)\}$（$n=1, 2, 3, \cdots$），满足：

(i) λ_n均为实数，并且$|\lambda_1|\leqslant|\lambda_2|\leqslant|\lambda_3|\leqslant\cdots$；

(ii) $\psi_n(x)$均为I上的实连续函数，$\psi_n(x)$是$k(x, y)$的属于λ_n的特征函数，即

$$\psi_n(x)=\lambda_n\int_a^b k(x,\ y)\psi_n(y)dy\quad(n=1,2,3,\cdots);$$

(iii) $\{\psi_n(x)\}$是就范直交的，即

$$\int_a^b \psi_n(x)\psi_m(x)=\delta_{nm}=\begin{cases}1, & \text{当 } n=m\text{时},\\ 0, & \text{当 } n\neq m\text{时};\end{cases}$$

(iv) 若λ是$k(x,\ y)$的任一特征值，$\psi(x)$是$k(x,\ y)$的属于λ的任一特征函数，则λ必等于某λ_n，而$\psi(x)$必定是$\{\psi_n(x)\}$中的某些有限个$\psi_n(x)$的线性组合.

证 因为$D(\lambda)$是不恒为0的整函数，故根据复变函数论可知，$D(\lambda)$的一切零点都是孤立的，从而$D(\lambda)$至多有可数个零点μ_1，μ_2，…，并且当$D(\lambda)$有无穷个零点时，必有$\lim\limits_{n\to\infty}|\mu_n|=+\infty$. 根据定理4.9，诸$\mu_n$均为实数. 我们假设诸$\mu_n$已按绝对值大小排列：

$$|\mu_1|\leqslant|\mu_2|\leqslant|\mu_3|\leqslant\cdots\leqslant|\mu_n|\leqslant\cdots$$

（注意，在上式中，诸μ_n均不相等）假设μ_1的指数为r，故根据定理3.13可知，由（3.29）式给出的$k(x,\ y)$的属于μ_1的r个线性无关特征函数$\varphi_i(x)$（$i=1,\ 2,\ \cdots,\ r$）都是实连续函数. 利用Gram-Schmidt直交化方法将$\varphi_1(x)$，…，$\varphi_r(x)$就范直交化，可以得到$\psi_1(x)$，…，$\psi_r(x)$，满足

$$\psi_i(x)=\sum_{j=1}^{r}c_{ij}\varphi_j(x)\quad(i=1,2,\cdots,r),\ c_{ij}\text{是实常数};$$

$$\int_a^b \psi_i(x)\psi_j(x)dx=\delta_{ij}=\begin{cases}1, & \text{当 } i=j\text{时},\\ 0, & \text{当 } i\neq j\text{时}.\end{cases}$$

显然$\psi_1(x)$，…，$\psi_r(x)$都是$k(x,\ y)$的属于μ_1的特征函数，而且$k(x,\ y)$的任一属于μ_1的特征函数都可以表为诸$\psi_1(x)$，…，$\psi_r(x)$的线性组合. 令

$$\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_r=\mu_1.$$

类似地对 μ_2 进行讨论，设 μ_2 的指数为 s，从而可以得到 $k(x, y)$ 的属于μ_2的s个就范直交特征函数 $\psi_{r+1}(x)$，…，$\psi_{r+s}(x)$。令

$$\lambda_{r+1}=\lambda_{r+2}=\cdots=\lambda_{r+s}=\mu_2.$$

根据引理4.8，有

$$\int_a^b \psi_i(x)\psi_k(x)dx=0$$

$$(i=1,2,\cdots,r;\ k=r+1,\cdots,r+s).$$

把上述过程继续进行下去，最后可以得到一串$k(x, y)$ 的特征值λ_1，λ_2，λ_3，…，满足

$$|\lambda_1|\leqslant|\lambda_2|\leqslant|\lambda_3|\leqslant\cdots\leqslant|\lambda_n|\leqslant\cdots$$

（有限或无穷多个），以及对应的一串就范直交特征函数 $\psi_1(x)$，$\psi_2(x)$，$\psi_3(x)$，…，它们显然满足定理的全部要求．证完．

定理4.11 设$k(x, y)$ 是$I\times I$上不恒为零的连续对称核，$\{\lambda_n\}$和 $\{\psi_n(x)\}$ 分别表示$k(x, y)$ 的全系特征值与对应的全系就范直交特征函数．如果级数$\sum_n \frac{\psi_n(x)\psi_n(y)}{\lambda_n}$在$I\times I$ 上一致收敛，则必有

$$k(x, y)=\sum_n \frac{\psi_n(x)\psi_n(y)}{\lambda_n},\quad \forall(x, y)\in I\times I \tag{4.15}$$

证 令

$$k^*(x, y)=k(x, y)-\sum_n \frac{\psi_n(x)\psi_n(y)}{\lambda_n}.$$

显然，$k^*(x, y)$ 是$I\times I$ 上的连续对称核．我们需要证明$k^*(x, y)\equiv 0$．根据定理4.5，只需证明 $k^*(x, y)$ 没有特征值即可．事实上，若$k^*(x, y)$ 有特征值λ^*及对应的特征函数

$\psi^*(x)\not\equiv 0$，则

$$\psi^*(x)=\lambda^*\int_a^b k^*(x,\ y)\psi^*(y)dy$$

$$=\lambda^*\int_a^b k(x,\ y)\psi^*(y)dy$$

$$-\lambda^*\int_a^b\sum_n\frac{\psi_n(x)\psi_n(y)}{\lambda_n}\psi^*(y)dy \quad (4.16)$$

以$\psi_m(x)$乘（4.16）式两端并积分，注意到右端级数一致收敛，从而允许逐项积分，可得

$$\int_a^b\psi^*(x)\psi_m(x)dx=\lambda^*\int_a^b\psi^*(y)dy\int_a^b k(x,\ y)\psi_m(x)dx$$

$$-\lambda^*\sum_n\frac{1}{\lambda_n}\left(\int_a^b\psi_n(x)\psi_m(x)\,dx\right)\left(\int_a^b\psi_n(y)\psi^*(y)dy\right)$$

$$=\frac{\lambda^*}{\lambda_m}\int_a^b\psi^*(y)\psi_m(y)\,dy-\frac{\lambda^*}{\lambda_m}\int_a^b\psi_m(y)\psi^*(y)dy$$

$$=0 \quad (m=1,\ 2,\ \cdots). \quad (4.17)$$

再由(4.16)式可得

$$\psi^*(x)=\lambda^*\int_a^b k(x,\ y)\psi^*(y)dy.$$

所以$\psi^*(x)$必是$k(x,\ y)$的特征函数，根据定理4.10之结论(iv)，$\psi^*(x)$必可表为有限个$\psi_n(x)$的线性组合：

$$\psi^*(x)=\sum_{k=1}^{s}c_k\psi_{n_k}(x). \quad (4.18)$$

于是

$$\int_a^b\psi^*(x)\psi_{n_i}(x)dx=\sum_{k=1}^{s}c_k\int_a^b\psi_{n_k}(x)\psi_{n_i}(x)dx=c_i,$$

$$(i=1,\ 2,\ \cdots,\ s). \quad (4.19)$$

由（4.19）、（4.17）两式可知$c=0$（$i=1, 2, \cdots, s$）。因此，$\psi^*(x)\equiv 0$。此与$\psi^*(x)\not\equiv 0$矛盾。证完。

推论4.12 设$k(x, y)$是$I\times I$上不恒为零的对称核。若$k(x, y)$只有有限个特征值，则（4.15）式必成立。此时（4.15）式右端为有限和。

例4.13 考察两点边值问题：

$$\begin{cases} u''+\lambda u=0, & 0\leqslant x\leqslant 1, \\ u(0)=u(1)=0. \end{cases} \tag{4.20}$$

由推论1.5及例1.7知边值问题（4.20）等价于

$$u(x)=\lambda\int_0^1 k(x, y)u(y)dy, \tag{4.21}$$

其中Green函数$k(x, y)$由下式确定：

$$k(x, y)=\begin{cases} x(1-y), & x\leqslant y; \\ y(1-x), & x\geqslant y. \end{cases} \tag{4.22}$$

显然，由（4.22）式定义的$k(x, y)$是不恒为0的连续对称核。现求其全系特征值与全系特征函数。解方程$u''+\lambda u=0$得

$$u(x)=\begin{cases} c_1e^{\sqrt{-\lambda}x}+c_2e^{-\sqrt{-\lambda}x}, & 若\lambda<0; \\ c_1+c_2x, & 若\lambda=0; \\ c_1\sin(\sqrt{\lambda}x)+c_2\cos(\sqrt{\lambda}x), & 若\lambda>0. \end{cases}$$

于是，由$u(0)=u(1)=0$知：当$\lambda\leqslant 0$时，必有$c_1=c_2=0$，即$u(x)\equiv 0$。因此，任给$\lambda\leqslant 0$都不可能是$k(x, y)$的特征值；当$\lambda>0$时，必有$c_2=0$，$c_1\sin\sqrt{\lambda}=0$。因此，要使$c_1\neq 0$，必须$\sin\sqrt{\lambda}=0$，亦即$\lambda=n^2\pi^2$（$n=1, 2, \cdots$）。由此可知，$k(x, y)$的全系特征值是$\lambda_n=n^2\pi^2$（$n=1,2,3,\cdots$），

对应的全系就范特征函数是

$$\psi_n(x)=\sqrt{2}\sin(n\pi x)\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots).$$

显然，级数

$$2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n\pi x)\sin(n\pi y)}{n^2\pi^2}$$

在$[0,\ 1]\times[0,\ 1]$上一致收敛．故由定理4.11知

$$k(x,\ y)=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n\pi x)\sin(n\pi y)}{n^2\pi^2},\ \forall x,y\in[0,1].$$

定理4.14 设$k(x,\ y)$是$I\times I$上不恒为0的连续对称核，$\{\lambda_n\}$与$\{\psi_n(x)\}$分别是$k(x,\ y)$的全系特征值与对应的全系就范直交特征函数，则$\{\lambda_n^m\}$与$\{\psi_n(x)\}$必是$k_m(x,\ y)$的全系特征值与对应的全系就范直交特征函数，这里$k_m(x,\ y)$表示$k(x,\ y)$的m重迭核．

证 由

$$\psi_n(y)=\lambda_n\int_a^b k(y,\ z)\psi_n(z)dz$$

及（4.2）式，得

$$\psi_n(x)=\lambda_n\int_a^b k(x,\ y)\psi_n(y)dy$$

$$=\lambda_n^2\int_a^b k(x,\ y)dy\int_a^b k(y,\ z)\psi_n(z)dz$$

$$=\lambda_n^2\int_a^b k_2(x,\ z)\psi_n(z)dz.$$

同理，一般地有

$$\psi_n(x)=\lambda_n^m\int_a^b k_m(x,z)\psi_n(z)dz\quad(m=1,2,\cdots).$$

故λ_n^m是$k_m(x, y)$的特征值，$\psi_n(x)$是其对应的特征函数。

我们尚须证明：若ρ是$k_m(x, y)$的任一特征值，$\psi(x)$是其对应的特征函数，则必有$\rho=\lambda_n^m$（对某n），并且$\psi(x)$是$\{\psi_n(x)\}$中的有限个函数（它们都对应于λ_n^m）的线性组合．事实上，用h_1，…，h_m表ρ的m个m次方根，即$h_i^m=\rho$（$i=1, 2, \cdots, m$）（其中有些h_i是复数）．用初等数学的方法容易证明

$$h_1^s+h_2^s+\cdots+h_m^s=0 \quad (s=1,2,\cdots,m-1). \tag{4.23}$$

令

$$\begin{aligned}\varphi_i(x)=\frac{1}{m}\Big[\psi(x)&+h_i\int_a^b k(x, y)\psi(y)\\&+h_i^2\int_a^b k_2(x, y)\psi(y)dy\\&+\cdots+h_i^{m-1}\int_a^b k_{m-1}(x,y)\psi(y)dy\Big]\\&(i=1, 2, \cdots, m).\end{aligned} \tag{4.24}$$

注意到（4.23）式，知

$$\varphi_1(x)+\varphi_2(x)+\cdots+\varphi_m(x)=\psi(x). \tag{4.25}$$

由（4.24）式，可得

$$\begin{aligned}m\int_a^b k(z, x)\varphi_i(x)dx=&\int_a^b k(z, x)\psi(x)dx\\&+\sum_{s=1}^{m-1}h_i^s\int_a^b k(z, x)dx\int_a^b k_s(x, y)\psi(y)dy,\end{aligned}$$

从而，再利用（4.24）式，可得

$$\begin{aligned}mh_i\int_a^b k(z, x)\varphi_i(x)dx=&h_i\int_a^b k(z, x)\psi(x)dx\\&+\sum_{s=1}^{m-1}h_i^{s+1}\int_a^b k_{s+1}(z, y)\psi(y)dy\end{aligned}$$

$$=m\varphi_i(z)-\psi(z)+h_i^m\int_a^b k_m(z, y)\psi(y)dy$$

$$=m\varphi_i(z),$$

亦即

$$\varphi_i(x)=h_i\int_a^b k(x, y)\varphi_i(y)dy \quad (i=1,2,\cdots,m).$$

由（4.25）式及$\psi(x)\not\equiv 0$知，必有$1\leqslant i_0\leqslant m$，使$\varphi_{i_0}(x)\not\equiv 0$. 因此，$h_{i_0}$是$k(x, y)$的特征值，$\varphi_{i_0}(x)$是对应的特征函数. 故必存在$n$，使$h_{i_0}=\lambda_n$，即$\rho=\lambda_n^m$，从而由（4.25）式，$\psi(x)$是有限个$\psi_n(x)$的线性组合. 证完.

定理4.15 设$k(x, y)$是$I\times I$上的不恒为0的连续对称核，$\{\lambda_n\}$与$\{\psi_n(x)\}$分别表示$k(x, y)$的全系特征值与对应的全系就范直交特征函数，则

$$k_m(x, y)=\sum_n\frac{\psi_n(x)\psi_n(y)}{\lambda_n^m} \quad (m=2,3,\cdots), \tag{4.26}$$

并且上式右端的级数在$I\times I$上一致收敛.

证 由定理4.11及定理4.14知，只需证明（4.26）式右端的级数一致收敛. 设（4.26）式对m成立，并且（4.26）式右端的级数一致收敛，则

$$\int_a^b k(z, x)k_m(x, y)dx$$

$$=\sum_n\frac{\psi_n(y)}{\lambda_n^m}\int_a^b k(z, x)\psi_n(x)dx, \tag{4.27}$$

并且（4.27）式右端的级数对$(y, z)\in I\times I$一致收敛. 由于

$$\int_a^b k(z, x)k_m(x, y)dx=k_{m+1}(z, y),$$

$$\psi_n(z)=\lambda_n\int_a^b k(z, x)\psi_n(x)dx,$$

故（4.27）式即

$$k_{m+1}(z, y)=\sum_{n}\frac{\psi_n(z)\psi_n(y)}{\lambda_n^{m+1}}.$$

这表明（4.26）式对 $m+1$ 成立，并且右端的级数一致收敛．因此，根据数学归纳法，只需证明 $m=2$ 时（4.26）式右端的级数一致收敛即可．至于 $m=2$ 时，（4.26）式右端级数的一致收敛性，读者可参见W.V. Lovitt〔1〕或 F.Smithies〔1〕.

引理4.16 设$k(x, y)$是$I\times I$上不恒为零的连续对称核，$\{\lambda_n\}$ 与 $\{\psi_n(x)\}$ 分别表示 $k(x, y)$ 的全系特征值与对应的全系规范直交特征函数．又设$h(x)$在I上连续，则

$$\int_a^b k(x, y)h(y)dy=0, \quad x\in I \tag{4.28}$$

的充分必要条件是：

$$\int_a^b h(x)\psi_n(x)dx=0 \quad (n=1, 2, 3, \cdots). \tag{4.29}$$

证 必要性．设（4.28）式成立，则

$$0=\int_a^b \psi_n(x)\,dx\int_a^b k(x, y)h(y)dy$$

$$=\int_a^b h(y)\,dy\int_a^b k(x, y)\psi_n(x)\,dx$$

$$=\frac{1}{\lambda_n}\int_a^b \psi_n(y)h(y)dy \qquad (n=1, 2, 3, \cdots).$$

故（4.29）式成立．

充分性．设（4.29）式满足，根据定理4.15，有

$$k_2(x, y)=\sum_{n}\frac{\psi_n(x)\psi_n(y)}{\lambda_n^2},$$

并且上式右端的级数一致收敛，于是显然有

$$\int_a^b\int_a^b k_2(x, y)\ h(x)h(y)\ dx\,dy$$

$$=\sum_n \frac{1}{\lambda_n^2}\left(\int_a^b h(x)\psi_n(x)dx\right)\left(\int_a^b h(y)\psi_n(y)dy\right)$$

$$=0.$$

但是，另一方面，又有

$$\int_a^b\int_a^b k_2(x, y)h(x)h(y)dxdy$$

$$=\int_a^b\int_a^b h(x)h(y)dxdy\int_a^b k(x, z)k(z, y)dz$$

$$=\int_a^b dz\left(\int_a^b k(x,z)h(x)dx\right)\left(\int_a^b k(z, y)h(y)dy\right)$$

$$=\int_a^b\left(\int_a^b k(z, y)h(y)dy\right)^2 dz.$$

因此，

$$\int_a^b\left(\int_a^b k(z, y)h(y)dy\right)^2 dz=0,$$

从而（4.28）式成立．证完．

定理4.17 设$k(x, y)$是$I\times I$上不恒为0的连续对称核，$\{\lambda_n\}$与$\{\psi_n(x)\}$分别表示$k(x, y)$的全系特征值与对应的全系就范直交特征函数．设$f(x)$可以表示为

$$f(x)=\int_a^b k(x, y)g(y)dy,$$

其中$g(x)$在I上连续，则$f(x)$必定可以展为

$$f(x)=\sum_n (f, \psi_n)\psi_n(x), \quad x\in I, \tag{4.30}$$

其中，

$$(f, \psi_n) = \int_a^b f(x)\psi_n(x)dx \quad (n=1, 2, 3, \cdots);$$

更进一步，（4.30）式右端的级数在I上一致且绝对收敛.

证 先证（4.30）式右端级数在I上一致且绝对收敛.

$$(f, \psi_n) = \int_a^b \psi_n(x)\, dx \int_a^b k(x, y) g(y)\, dy$$

$$= \int_a^b g(y)\, dy \int_a^b k(x, y)\psi_n(x) dx$$

$$= \frac{1}{\lambda_n}(g, \psi_n),$$

所以，

$$\sum_{n=m+1}^{m+p} |(f, \psi_n)\, \psi_n(x)| \leqslant \left[\sum_{n=m+1}^{m+p} (g, \psi_n)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\cdot \left[\sum_{n=m+1}^{m+p} \frac{(\psi_n(x))^2}{\lambda_n^2}\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{4.31}$$

另一方面，由Bessel不等式知

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\psi_n(x))^2}{\lambda_n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_a^b k(x, y)\psi_n(y)\, dy\right)^2$$

$$\leqslant \int_a^b [k(x, y)]^2 dx \leqslant M^2(b-a), \tag{4.32}$$

其中$M = \max\limits_{x, y \in I} |k(x, y)|$. 于是，由（4.31）及（4.32）式得

$$\sum_{n=m+1}^{m+p} |(f, \psi_n)\psi_n(x)| \leqslant M\sqrt{b-a}\left[\sum_{n=m+1}^{m+p} (g, \psi_n)^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

由此，再注意到根据Bessel 不等式

$$\sum_{n=1}^{\infty} (g, \psi_n)^2 \leqslant \int_a^b [g(x)]^2 dx < +\infty,$$

即知（4.30）式右端的级数一致且绝对收敛.

现证（4.30）式成立. 令

$$h(x)=f(x)-\sum_n(f,\ \psi_n)\psi_n(x),$$

则 $h(x)$ 是 I 上的连续函数. 我们需证 $h(x)\equiv 0$. 为此，只需证明

$$\int_a^b[h(x)]^2dx=0. \tag{4.33}$$

事实上

$$\int_a^b[h(x)]^2dx=(f,\ h)-\sum_n(f,\psi_n)(h,\psi_n), \tag{4.34}$$

注意到

$$(h,\ \psi_m)=(f,\ \psi_m)-\sum_n(f,\ \psi_n)(\psi_n,\ \psi_m)$$

$$=(f,\ \psi_m)-(f,\ \psi_m)=0$$

$$(m=1,\ 2,\ \cdots,\ ) \tag{4.35}$$

故由（4.34）及（4.35）两式可得

$$\int_a^b[h(x)]^2dx=(f,\ h)$$

$$=\int_a^b h(x)\,dx\int_a^b k(x,\ y)g(y)\,dy$$

$$=\int_a^b g(y)dy\int_a^b k(x,\ y)h(x)dx$$

$$=\int_a^b g(y)dy\int_a^b k(y,\ x)h(x)dx. \tag{4.36}$$

另一方面，由（4.35）式并利用引理4.16，知

$$\int_a^b k(y,\ x)h(x)dx\equiv 0,\quad \forall x\in I. \tag{4.37}$$

于是，由（4.36）、（4.37）式即得（4.33）式．证完．

注4.18 展式（4.30）式可以写为

$$\int_a^b k(x, y)g(y)\,dy = \sum_n \frac{(g, \psi_n)}{\lambda_n}\psi_n(x). \qquad (4.38)$$

定理4.19 设 $k(x, y)$ 在 $I\times I$ 上是不恒为 0 的连续对称核，$\{\lambda_n\}$ 和 $\{\psi_n(x)\}$ 分别是 $k(x, y)$ 的全系特征值与对应的全系就范直交特征函数．如果 λ 不是 $k(x, y)$ 的特征值，则对 I 上任何的连续函数 $f(x)$，方程（1.2）都在 I 上具有唯一的连续解 $u(x)$，并且 $u(x)$ 可以表为

$$u(x) = f(x) + \lambda \sum_n \left[\frac{1}{\lambda_n - \lambda}\int_a^b f(t)\,\psi_n(t)\,dt\right]\psi_n(x), \qquad (4.39)$$

其中（4.39）式右端的级数在 I 上一致且绝对收敛．

证 首先证明（4.39）式右端的级数在 I 上一致且绝对收敛．事实上，（4.39）式右端的级数可以写为

$$\sum_n \frac{1}{1-\dfrac{\lambda}{\lambda_n}} \cdot \frac{(f, \psi_n)}{\lambda_n}\psi_n(x), \qquad (4.40)$$

由（4.38）式及定理4.17知，级数 $\sum\limits_n \dfrac{(f, \psi_n)}{\lambda_n}\psi_n(x)$ 在 I 上一致且绝对收敛．由于

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_n}\right) = 1,$$

故可知级数（4.40）在 I 上一致且绝对收敛．

设 $u(x)$ 是由（4.39）式定义的函数，它显然在 I 上连续．利用（4.38）式，可得

$$u(x)-\lambda\int_a^b k(x,\ y)u(y)dy$$

$$=f(x)+\lambda\sum_n\frac{(f,\ \psi_n)}{\lambda_n-\lambda}\psi_n(x)$$

$$-\lambda\int_a^b k(x,y)[f(y)+\lambda\sum_n\frac{(f,\psi_n)}{\lambda_n-\lambda}\psi_n(y)]dy$$

$$=f(x)+\lambda\sum_n\frac{(f,\ \psi_n)}{\lambda_n-\lambda}\psi_n(x)$$

$$-\lambda\int_a^b k(x,\ y)f(y)dy-\lambda^2\sum_n\frac{(f,\ \psi_n)}{\lambda_n(\lambda_n-\lambda)}\psi_n(x)$$

$$=f(x)+\lambda\sum_n\frac{(f,\psi_n)}{\lambda_n}\psi_n(x)-\lambda\int_a^b k(x,y)f(y)dy$$

$$=f(x), \tag{4.41}$$

故由（4.39）式定义的$u(x)$是方程（1.2）的解.

反之，设$u(x)$是方程（1.2）在I上的任一连续解，则根据定理4.17可得（注意（4.38）式）

$$\frac{1}{\lambda}[u(x)-f(x)]=\int_a^b k(x,\ y)u(y)dy$$

$$=\sum_n\frac{(u,\psi_n)}{\lambda_n}\psi_n(x). \tag{4.42}$$

另一方面，又有

$$(f,\psi_n)=(u,\psi_n)-\lambda\int_a^b\psi_n(x)\,dx\int_a^b k(x,y)u(y)dy$$

$$=(u,\ \psi_n)-\frac{\lambda}{\lambda_n}\int_a^b u(x)\psi_n(y)dy$$

$$=\frac{\lambda_n-\lambda}{\lambda_n}(u,\ \psi_n)\ (n=1,2,3,\cdots). \tag{4.43}$$

把（4.43）式代入（4.42）式，即知

$$\frac{1}{\lambda}[u(x)-f(x)]=\sum_{n}\frac{(f,\psi_n)}{\lambda_n-\lambda}\psi_n(x).$$

因此，$u(x)$必是由（4.39）式给出的函数.证完.

定理4.20 设$k(x, y)$是$I\times I$上不恒为0的连续对称核，$\{\lambda_n\}$与$\{\psi_n(x)\}$分别表示$k(x, y)$的全系特征值与对应的全系就范直交特征函数系，$f(x)$是I上的连续函数. 设λ是$k(x, y)$的特征值，其指数为r：$\lambda=\lambda_{m+1}=\cdots=\lambda_{m+r}$. 则方程（1.2）在$I$上具有连续解的充分必要条件是：

$$\int_a^b f(x)\psi_n(x)dx=0\quad(n=m+1,\cdots,m+r).\tag{4.44}$$

当（4.44）式满足时，方程（1.2）具有无穷多个连续解，由下式给出：

$$u(x)=f(x)+\lambda\sum_{\substack{n\neq m+1,\\ \cdots,m+r}}\left[\frac{1}{\lambda_n-\lambda}\int_a^b f(t)\psi_n(t)dt\right]\psi_n(x)$$

$$+c_1\psi_{m+1}(x)+\cdots+c_r\psi_{m+r}(x),\tag{4.45}$$

其中c_1，…，c_r是任意常数.

证 为使符号简单起见，不妨设$m=0$，即$\lambda=\lambda_1=\cdots=\lambda_r$. 首先，在定理4.19的证明中，已经证明了（4.45）式右端的级数在I上一致且绝对收敛. 设方程（1.2）在I上有连续解$u(x)$，则（4.42）式及（4.43）式成立. 由（4.43）式并注意到$\lambda=\lambda_1=\cdots=\lambda_r$，即知有$(f, \psi_n)=0$，$n=1, 2, \cdots, r$. 故条件（4.44）式满足. 同时，由（4.42）及（4.43）式可知

$$u(x)=f(x)+(u, \psi_1)\psi_1(x)+\cdots+(u, \psi_r)\psi_r(x)$$

$$+\lambda\sum_{n>r}\frac{(f, \psi_n)}{\lambda_n-\lambda}\psi_n(x).$$

即$u(x)$必可表为（4.45）的形式.

反之，设条件（4.44）式满足，并且$u(x)$是由(4.45)式定义的连续函数. 记$u(x)=u_0(x)+v_0(x)$，其中

$$u_0(x)=f(x)+\lambda\sum_{n>r}\frac{(f,\ \psi_n)}{\lambda_n-\lambda}\psi_n(x),$$

$$v_0(x)=c_1\psi_1(x)+\cdots+c_r\psi_r(x).$$

仿（4.41）式的推导，并注意到$(f,\ \psi_n)=0\ (n=1,2,\cdots,r)$，可得

$$\begin{aligned}
&u_0(x)-\lambda\int_a^b k(x,\ y)u_0(y)dy\\
&=f(x)+\lambda\sum_{n>\lambda}\frac{(f,\psi_n)}{\lambda_n}\psi_n(x)-\lambda\int_a^b k(x,y)f(y)dy\\
&=f(x)+\lambda\sum_{n>\lambda}\frac{(f,\psi_n)}{\lambda_n}\psi_n(x)-\lambda\sum_n\frac{(f,\psi_n)}{\lambda_n}\psi_n(x)\\
&=f(x).
\end{aligned}\tag{4.46}$$

又有

$$\begin{aligned}
&v_0(x)-\lambda\int_a^b k(x,\ y)v_0(y)dy\\
&=\sum_{n=1}^r c_n\ \psi_n(x)-\sum_{n=1}^r c_n\ \lambda_n\int_a^b k(x,\ y)\psi_n(y)dy\\
&=0.
\end{aligned}\tag{4.47}$$

由（4.46）及（4.47）两式知$u(x)$满足方程（1.2）. 证完.

例4.21 求解两点边值问题:

$$\begin{cases}u''+\lambda u=1,\quad 0\leqslant x\leqslant 1;\\ u(0)=u(1)=0.\end{cases}\tag{4.48}$$

解 由定理1.4及例1.7可知，边值问题（4.48）等价于下

列积分方程

$$u(x)=\int_0^1 k(x,\ y)[\lambda u(y)-1]dy, \qquad (4.49)$$

其中$k(x,\ y)$ 由（4.22）式给出．方程（4.49）可以写成

$$u(x)=-\frac{1}{2}x\ (1-x)+\lambda\int_0^1 k(x,y)u(y)dy. \quad (4.50)$$

由例4.13知，对称核 $k(x,\ y)$ 的全系特征值为 $\lambda_n=n^2\pi^2$（$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$），每个λ_n的指数为1，对应的全系就范直交特征函数为 $\psi_n(x)=\sqrt{2}\sin n\pi x$（$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$）．经简单计算知

$$\int_0^1 f(x)\psi_n(x)dx=-\frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^1 x(1-x)\sin n\pi x dx$$

$$=\begin{cases} 0, & n\text{是偶数；}\\ -\dfrac{2\sqrt{2}}{n^3\pi^3}, & n\text{是奇数．}\end{cases}$$

于是，根据定理4.19和定理4.20即可得下述结论：

(i) 若 $\lambda\neq n^2\pi^2$（$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$），则问题（4.48）有唯一的属于$C^2[0,\ 1]$的解，此解可以表为：

$$u(x)=-\frac{1}{2}x\ (1-x)$$

$$-4\lambda\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\sin(2m+1)\pi x}{(2m+1)^3\pi^3[(2m+1)^2-\lambda]};$$

(ii) 若$\lambda=n^2\pi^2$，n为正奇数，则问题（4.48）无解；

(iii) 若$\lambda=n^2\pi^2$，n为正偶数，则问题（4.48）具有无穷多个属于$C^2[0,\ 1]$的解，它们可以统一表为：

$$u(x)=-\frac{1}{2}x\,(1-x)$$

$$-4\lambda\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\sin(2m+1)\pi x}{(2m+1)^3\pi^3[(2m+1)^2-\lambda]}+c\sin n\pi x,$$

其中c是任意常数.

注4.22 为了简便，以上是对一维的情况进行讨论的. 完全类似地可以证明，本节各结论对于n维的情况，也是成立的.

上述的讨论是在连续函数空间中进行的. 对于L_2空间，类似的结果也成立.

设G是R^n中的某可测集，$0<\mathrm{mes}G\leqslant+\infty$. 设$k(x, y)$是$L_2$对称核，即$k(x, y)$在$G\times G$上可测，满足（3.48）式，并且在$G\times G$上几乎处处有$k(x, y)=k(y, x)$. 如果$k(x, y)$不是几乎处处为0，则$k(x, y)$至少有一特征值，$k(x, y)$的一切特征值均为实数，并且属于不同特征值的特征函数互相直交. 更进一步，我们有下列结论:

定理4.23 设$k(x, y)$是不几乎处处为0的L_2对称核.则存在$k(x, y)$的全系特征值$\{\lambda_n\}$与对应的全系就范直交特征函数$\{\psi_n(x)\}$（$n=1, 2, 3, \cdots$），满足

（i）λ_n均为实数，并且$|\lambda_1|\leqslant|\lambda_2|\leqslant|\lambda_3|\leqslant\cdots$;

（ii）$\psi_n(x)\in L_2(G)$，并且$\psi_n(x)$是$k(x, y)$的对应于λ_n的特征函数，即

$$\psi_n(x)=\lambda_n\int_G k(x, y)\psi_n(y)dy \quad (n=1,2,3,\cdots);$$

（iii）$\{\psi_n(x)\}$是就范直交的，即

$$(\psi_n, \psi_m)=\int_G\psi_n(x)\psi_m(x)dx=\delta_{n,m}$$

$$=\begin{cases}1, & n=m \text{ 时}, \\ 0, & n\neq m \text{ 时};\end{cases}$$

（iv）若λ是$k(x, y)$的任一特征值，$\psi(x)\in L_2$是$k(x,y)$

的属于λ的任一特征函数，则λ必等于某λ_n，而$\psi(x)$必是$\{\psi_n(x)\}$中的某有限个的线性组合。

定理4.24 设$k(x, y)$是不几乎处处为0的L_2对称核．则其m重迭核$k_m(x, y)$也是不几乎处处为0的L_2对称核．用$\{\lambda_n\}$和$\{\psi_n(x)\}$分别表示$k(x, y)$的全系特征值与对应的全系就范直交特征函数，则$\{\lambda_n^m\}$和$\{\psi_n(x)\}$必定是$k_m(x, y)$的全系特征值与对应的全系就范直交特征函数．此外，有

$$\sum_n \frac{1}{\lambda_n^2}=\int_G\int_G[k(x, y)]^2 dxdy, \tag{4.51}$$

$$k_m(x, y)=\sum_n \frac{\psi_n(x)\psi_n(y)}{\lambda_n^m}, \quad m=1, 2, 3, \cdots, \tag{4.52}$$

其中，(4.52)式表示右端的级数平均收敛于$k_m(x, y)$，即

$$\lim_{n\to\infty}\int_G\int_G\left[k_m(x, y)-\sum_{i=1}^n \frac{\psi_i(x)\psi_i(y)}{\lambda_i^m}\right]^2 dxdy$$

$$=0, \quad m=1, 2, 3, \cdots.$$

定理4.25 设$k(x, y)$是不几乎处处为0的L_2对称核，$\{\lambda_n\}$和$\{\psi_n(x)\}$分别表示$k(x, y)$的全系特征值与对应的全系就范直交特征函数．于是，下列结论成立：

(i) 若λ不是$k(x, y)$的特征值，则方程

$$u(x)=f(x)+\lambda\int_G k(x, y)u(y)dy \tag{4.53}$$

对任给$f(x)\in L_2(G)$，都在$L_2(G)$中具有唯一解$u(x)$，并且该解可以表为

$$u(x)=f(x)+\lambda\sum_n \frac{(f, \psi_n)}{\lambda_n-\lambda}\psi_n(x), \tag{4.54}$$

其中，等式(4.54)式代表右端的级数平均收敛．

(ii) 若λ是$k(x, y)$的特征值，设其指数为r，即$\lambda=\lambda_{m+1}=\cdots=\lambda_{m+r}$。又设$f(x)\in L_2(G)$，则方程（4.53）在$L_2(G)$中有解的充分必要条件是

$$(f, \psi_n)=\int_G f(x)\psi_n(x)dx=0$$

$$(n=m+1,\cdots,m+r). \qquad (4.55)$$

当此条件满足时，方程（4.53）在$L_2(G)$中有无穷多个解，由下式给出：

$$u(x)=f(x)+\lambda\sum_{\substack{n\neq m+1\\ \cdots,m+r}}\frac{(f, \psi_n)}{\lambda_n-\lambda}\psi_n(x)+c_1\psi_{m+1}(x)$$

$$+\cdots+c_r\psi_{m+r}(x), \qquad (4.56)$$

其中c_1, …, c_r表示任意常数，等式（4.56）式代表右端的级数平均收敛。

此外，下列定理也是常用的：

定理4.26 设$k(x,y)$是不几乎处处为0的L_2对称核，$\{\lambda_n\}$和$\{\psi_n(x)\}$分别表示$k(x, y)$的全系特征值与对应的全系就范直交特征函数，$\{\lambda_{n_i}\}$和$\{\lambda_{m_i}\}$分别表示$\{\lambda_n\}$中的正特征值序列和负特征值序列，即

$$\cdots\leqslant\lambda_{m_i}\leqslant\cdots\leqslant\lambda_{m_2}\leqslant\lambda_{m_1}<0<\lambda_{n_1}\leqslant\lambda_{n_2}\leqslant\cdots\leqslant\lambda_{n_i}\leqslant\cdots.$$

则下列结论成立：

(i) $|\lambda_n|=\max\|Ku\|$，这里的max是对一切满足，$\|u\|=1$，$(u, \psi_1)=0$，…，$(u, \psi_{n-1})=0$的$u\in L_2(G)$取的，

$$Ku(x)=\int_G k(x, y)u(y)dy;$$

并且此极大值当$u=\psi_n$时达到。

特别地，$|\lambda_1|=\max\limits_{\|u\|=1}\|Ku\|$，并且此极大值当$u=\psi_1$时达到。

(ii) $\lambda_{n_i}=\max\ (Ku,\ u)$，这里的 max 是对一切满足 $\|u\|=1$，$(u,\ \psi_{n_1})=0$，…，$(u,\ \psi_{n_{i-1}})=0$ 的 $u\in L_2(G)$ 取的，并且此极大值当$u=\psi_{n_i}$时达到；同理，$\lambda_{m_i}=\min(Ku,u)$，这里的 min 是对一切满足 $\|u\|=1$，$(u,\ \psi_{m_1})=0$，…，$(u,\ \psi_{m_{i-1}})=0$ 的$u\in L_2(G)$ 取的，并且此极小值当 $u=\psi_{m_i}$ 时达到。

(iii) 对任意的 p_1，…，$p_{i-1}\in L_2(G)$，令

$$\mu(p_1,\ \cdots,\ p_{i-1})=\sup\{(Ku,\ u)\,|\,\|u\|=1,\ (u,\ p_1)=\cdots=(u,\ p_{i-1})=0\},$$

则有

$$\lambda_{n_i}=\min\{\mu(p_1,\cdots,p_{i-1})\,|\,p_1,\cdots,p_{i-1}\in L_2(G)\};$$

同理，若令

$$\nu(p_1,\cdots,p_{i-1})=\inf\{(Ku,\ u)\,|\,\|u\|=1,\ (u,\ p_1)=\cdots=(u,\ p_{i-1})=0\},$$

则有

$$\lambda_{m_i}=\max\{\nu(p_1,\cdots,p_{i-1})\,|\,p_1,\cdots,p_{i-1}\in L_2(G)\}.$$

附注 D.Hilbert 在 1904～1910 年，连续发表了 6 篇文章，对对称核线性积分方程进行了系统的研究，这些工作被系统地总结在他1912年出版的专著〔1〕中. D.Hilbert的工作，为F.Riesz〔1〕，E.Schmidt和其它数学工作者所推广和改进.关于本节定理4.23～4.26的详细证明，可参见F.Smithies〔1〕，A.C.Zaanen〔1〕，F. Riesz 和 R. Sz. Nagy〔1〕或 И.Г.Петровский〔1〕.

线性积分方程理论，在常微分方程、偏微分方程、变分法以及许多物理问题中，有广泛的应用. 有兴趣的读者，可参见 W.V.Lovitt〔1〕，R.P.Kamwal〔1〕和C.Г.Михлин〔1〕.

第二章　非线性积分算子

本章主要研究非线性积分算子的全连续性质．为了使本章的结论更具有一般性，讨论均是在Orlicz空间中进行的．

§1　Orlicz 空间

在本节中，叙述Orlicz空间的定义和若干主要性质．关于Orlicz空间的详尽讨论，可见 М.А.Красносельский 和 Я.Б.Рутицкий〔1〕．

先介绍N函数的概念．

定义1.1　设函数$M(u):R^1\to R^1$满足下列条件：

（1）$M(u)$是偶的连续凸函数，即$M(u)$是偶的连续函数，并对一切u，$v\in R^1$，$0\leqslant\lambda\leqslant1$，有

$$M[\lambda u+(1-\lambda)v]\leqslant\lambda M(u)+(1-\lambda)M(u) \tag{1.1}$$

（2）$M(0)=0$，并且当$u>0$时$M(u)>0$；

（3）$\lim\limits_{u\to0}\dfrac{M(u)}{u}=0$，$\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{M(u)}{u}=+\infty$．

则称$M(u)$是一个N函数．

定理1.2　$M(u)$是N函数的充分必要条件是存在定义在$[0,+\infty)$上的实值函数$p(u)$，满足：

（1）$p(u)$是右连续的非减函数；

（2）当$u>0$时，$p(u)>0$；

（3）$p(0)=0$，$\lim\limits_{u\to+\infty}p(u)=+\infty$，

并且使得

$$M(u)=\int_0^{|u|}p(t)dt. \tag{1.2}$$

显然，$p(u)$是$M(u)$的右导数。

设$p(u)$满足定理1.2中的条件（1）、（2）、（3），则不难证明，函数

$$q(v)=\sup_{p(u)\leq v} u \tag{1.3}$$

在$[0, +\infty)$上有定义，并且也满足定理1.2中$p(u)$所满足的条件（1）、（2）、（3）。

定义1.3 设$M(u)$是N函数，$p(u)$是$M(u)$的右导数，$q(v)$由（1.3）式定义，则称函数

$$N(v)=\int_0^{|v|}q(s)ds \tag{1.4}$$

是$M(u)$的余N函数。

显然，$N(v)$也是N函数，并且$M(u)$也是$N(v)$的余N函数（即$M(u)$和$N(v)$互为余N函数）。

对于N函数$M(u)$和它的余N函数$N(v)$，著名的Young不等式成立：

$$uv\leq M(u)+N(v) \qquad (u, v\in R^1) \tag{1.5}$$

设$M(u)$是N函数，则下列不等式成立：

$$\frac{M(u_1)}{u_1}<\frac{M(u_2)}{u_2} \qquad (0<u_1<u_2); \tag{1.6}$$

$$M(u)+M(v)\leq M(|u|+|v|) \qquad (u,v\in R^1). \tag{1.7}$$

可以举出常见的N函数的例子如下：

$$M_1(u)=\frac{1}{\alpha}|u|^{\alpha} \qquad (\alpha>1);$$

$$M_2(u)=e^{|u|}-|u|-1;$$

$$M_3(u)=(1+|u|)\ln(1+|u|)-|u|;$$

$$M_4(u)=e^{|u|^{\beta}}-1 \qquad (\beta>1).$$

定义1.4 设$M_1(u)$和$M_2(u)$都是N函数，如果存在常数$\alpha>0$及$u_0\geqslant 0$，使得当$u\geqslant u_0$时，有

$$M_1(u)\leqslant M_2(\alpha u), \tag{1.8}$$

则称$M_2(u)$快于$M_1(u)$.若对任何$\alpha>0$，都存在$u_0\geqslant 0$，使得当$u\geqslant u_0$时，有

$$M_1(u)\leqslant M_2(\alpha u), \tag{1.9}$$

则称$M_2(u)$真快于$M_1(u)$。

若$M_1(u)$快于$M_2(u)$，同时$M_2(u)$也快于$M_1(u)$，则称$M_1(u)$和$M_2(u)$等价。

下面叙述N函数的几种常见的条件，它们在Orlicz空间理论中是有用的。

定义1.5 称N函数$M(u)$满足$\triangle_2$条件，如果存在常数$k>0$及$u_0\geqslant 0$，使当$u\geqslant u_0$时，有

$$M(2u)\leqslant kM(u). \tag{1.10}$$

定义1.6 称N函数$M(u)$满足$\triangle'$条件，如果存在常数$k>0$及$u_0\geqslant 0$，使当$u\geqslant u_0$，$v\geqslant u_0$时，有

$$M(uv)\leqslant kM(u)M(v). \tag{1.11}$$

定义1.7 称N函数$M(u)$满足$\triangle_3$条件，如果存在常数$k>0$及$u_0>0$，使当$u\geqslant u_0$时，有

$$uM(u)\leqslant M(ku). \tag{1.12}$$

定义1.8 称N函数$M(u)$满足$\triangle^2$条件，如果存在常数$k>0$及$u_0\geq 0$，使当$u\geq u_0$时，有

$$M^2(u)\leq M(ku). \qquad (1.13)$$

引理1.9 设$M(u)$是一个N函数，则下列结论成立：

(i) 若$M(u)$满足$\triangle_2$条件，则存在常数$a>1$，$k>0$及$u_0\geq 0$，使当$u\geq u_0$时，有

$$M(u)\leq ku^a; \qquad (1.14)$$

(ii) 若$M(u)$满足$\triangle'$条件，则$M(u)$满足$\triangle_2$条件；

(iii) 若$M(u)$满足$\triangle^2$条件，则$M(u)$满足$\triangle_3$条件；

(iv) 若$M(u)$满足$\triangle_3$条件，则$M(u)$的余N函数$N(v)$满足$\triangle_2$条件；

(v) 若$M(u)$满足$\triangle^2$条件，则$M(u)$的余N函数满足$\triangle'$条件；

利用N函数，可以引进Orlicz空间的概念。设G是R^N中的可测集，$0<\mathrm{mes}G\leq+\infty$*. $M(u)$和$N(v)$表示一对互余的N函数，$\varphi(x)$，$\psi(x)$……表示G上的Lebesgue可测函数。令

$$\rho(\varphi;M)=\int_G M(\varphi(x))dx, \qquad (1.15)$$

$$L_M=\{\varphi(x)\,|\,\rho(\varphi;M)<+\infty\}; \qquad (1.16)$$

$$L_M^*=\{\varphi(x)\,|\,存在k>0,使\rho(k\varphi;M)<+\infty\}, \qquad (1.17)$$

$$E_M=\{\varphi(x)\,|\,对一切k>0,都有\rho(k\varphi;M)<+\infty\}, \qquad (1.18)$$

---

* 应当注意，在М.А.Красносельский和Я.Б.Рутицкий〔1〕中，假定了G是R^N中的有界闭集，当G无界时，特别是当$\mathrm{mes}G=+\infty$时，上述文献中的某些定理和定义，应作适当修改。

其中L_M称为是相应于M的Orlicz类。显然

$$E_M \subset L_M \subset L_M^* \tag{1.19}$$

由于$M(u)$是凸函数，故L_M是一个凸集，但L_M不一定是线性空间。事实上，可以证明

定理1.10 L_M是线性空间的充分必要条件是$M(u)$满足$\triangle_2$条件*。

对于L_M中的元素$\varphi(x)$，Jensen 不等式成立，即若$\varphi(x) \in L_M$，$\mathrm{mes}G < +\infty$，则有

$$M\left(\frac{1}{\mathrm{mes}G}\int_G \varphi(x)dx\right) \leqslant \frac{1}{\mathrm{mes}G}\int_G M(\varphi(x))dx. \tag{1.20}$$

对于Orlicz类，还有如下重要性质：

定理1.11 若$\mathrm{mes}G < +\infty$，则

$$\bigcap_M L_M = L_\infty, \quad \bigcup_M L_M = L_1, \tag{1.21}$$

其中的交和并是对一切N函数进行的。

设$N(v)$是$M(u)$的余N函数，L_N表示由$N(v)$生成的Orlicz类.可以证明：$\varphi \in L_M^*$的充分必要条件是对一切$\psi(x) \in L_N$，都有

$$\int_G \varphi(x)\psi(x)dx < +\infty, \tag{1.22}$$

并且此时有

$$\|\varphi\|_M = \sup_{\rho(\psi;N)\leqslant 1}\left|\int_G \varphi(x)\psi(x)dx\right| < +\infty. \tag{1.23}$$

定理1.12 L_M^*是一个线性空间，并且L_M^*在由（1.23）式定

---

* 当$\mathrm{mes}G = +\infty$时，$M(u)$满足$\triangle_2$条件是指：存在常数$k > 0$，使对一切$u \geqslant 0$，都有

$$M(2u) \leqslant kM(u).$$

义的范数$\|\cdot\|_M$下构成一完备的线性赋范空间，即L_M^*是一个Banach空间。

关于L_M^*中的范数，有

引理1.13 若$\|\varphi\|_M\leqslant 1$，则$\varphi\in L_M$，并且$\rho(\varphi;M)\leqslant\|\varphi\|_M$。

由这一引理，立即可以得到下列重要的不等式：

$$\int_G M\left[\frac{\varphi(x)}{\|\varphi\|_M}\right]dx\leqslant 1. \tag{1.24}$$

定理1.14 设$M(u)$和$N(v)$互为余N函数，$\varphi(x)\in L_M^*$，$\psi(x)\in L_N^*$，则

$$\left|\int_G\varphi(x)\psi(x)dx\right|\leqslant\|\varphi\|_M\|\psi\|_N. \tag{1.25}$$

关于L_M^*上的范数计算，可以利用下列结论：

定理1.15 若$\varphi(x)\in L_M^*$，则

$$\|\varphi\|_M=\inf_{k>0}\frac{1}{k}\left(1+\int_G M(k\varphi(x))dx\right). \tag{1.26}$$

对于$\varphi\in L_M^*$，

$$\|\varphi\|_{(M)}=\inf\left\{k\,|\,k>0,\int M\left(\frac{\varphi(x)}{k}\right)\leqslant 1\right\} \tag{1.27}$$

也构成了L_M^*中的一种范数.这种范数称为是L_M^*上的Luxemburg范数，显然

$$\int_G M\left(\frac{\varphi(x)}{\|\varphi\|_{(M)}}\right)dx\leqslant 1. \tag{1.28}$$

引理1.16 (i) $\|\varphi\|_{(M)}\leqslant 1$的充分必要条件是$\rho(\varphi;M)\leqslant\|\varphi\|_{(M)}$；

(ii) 对任给$\varphi\in L_M^*$，$\|\varphi\|_{(M)}\leqslant\|\varphi\|_M\leqslant 2\|\varphi\|_{(M)}$，因此，$\|\cdot\|_M$与$\|\cdot\|_{(M)}$是等价的。

(iii) 对任给$\varphi\in L_M^*$，$\psi\in L_N^*$，

$$\left|\int_G\varphi(x)\psi(x)dx\right|\leqslant\|\varphi\|_M\|\psi\|_{(N)}. \tag{1.29}$$

显然，若在L_M^*中，$\varphi_n(x)$依范数收敛于$\varphi_0(x)$，则$\varphi_n(x)$必依测度收敛于$\varphi_0(x)$。

关于E_M，有下列重要性质。

定理1.17 E_M在L_M^*中的范数$\|\cdot\|_M$下构成L_M^*的闭线性子空间，从而E_M是Banach空间。

定理1.18 (i) 如果$M(u)$满足$\triangle_2$条件，则

$$E_M=L_M=L_M^*; \tag{1.30}$$

(ii) 如果$M(u)$不满足$\triangle_2$条件，则

$$\{\varphi(x)\in L_M^*|d(\varphi,E_M)<1\}\subset L_M$$
$$\subset\{\varphi(x)\in L_M^*|d(\varphi,E_M)\leqslant1\}, \tag{1.31}$$

并且上述两式中的包含关系均为真包含，其中$d(\varphi,E_M)$表φ到E_M的距离。

设$\varphi(x)\in L_M^*$。如果

$$\lim_{mesD\to0}\|\varphi(x)\kappa(x;D)\|=0, \tag{1.32}$$

则称$\varphi(x)$具有绝对连续的范数，其中$D\subset G$，$\kappa(x;D)$是D上的特征函数，即若$x\in D$，则$\kappa(x;D)=1$，若$x\overline{\in}D$，则$\kappa(x;D)=0$。

定理1.19 $\varphi(x)\in E_M$的充分必要条件是$\varphi(x)\in L_M^*$，并且具有绝对连续的范数。

设B是L_M^*的一个子集。如果对任给$\varepsilon>0$，都存在$\delta>0$，使得只要$\varphi(x)\in B$，$D\subset G$，$\mathrm{mes}D<\delta$，就有

$$\|\varphi(x)\kappa(x;D)\|_M<\varepsilon. \tag{1.33}$$

则称B在L_M^*中具有等度的绝对连续范数。

设$M_1(u)$和$M_2(u)$是两个N函数。可以证明：如果$\mathrm{mes}G$

$<+\infty$，则$L^*_{M_1}\subset L^*_{M_2}$的充分必要条件是$M_1(u)$快于$M_2(u)$。

定理1.20 设$\text{mes}G<+\infty$，$M_1(u)$和$M_2(u)$是两个N函数。则$L^*_{M_1}$中每一个有界集都在$L^*_{M_2}$中具有等度的绝对连续范数的充分必要条件，是$M_1(u)$真快于$M_2(u)$。

因此，利用定理1.19可知，若$\text{mes}G<+\infty$，$M_1(u)$真快于$M_2(u)$，则

$$L^*_{M_1}\subset E_{M_2} \tag{1.34}$$

设G是R^N中的可测集，$0<\text{mes}G<+\infty$。考察线性积分算子

$$K\varphi(x)=\int_G k(x,y)\varphi(y)dy. \tag{1.35}$$

定理1.21 设$k(x,y)\in L^*_{\Phi}(G\times G)$。又设下列三个条件之一成立：

（1）$\Phi(u)$快于$M_2(N_1(u))$；

（2）$\Phi(u)$快于$N_1(M_2(u))$；

（3）$\Phi(u)$满足$\triangle'$条件，$\Phi(u)$快于$M_2(u)$，$\Phi(u)$快于$N_1(u)$，

其中$\Phi(u)$,$M_1(u)$,$M_2(u)$都是N函数,$N_1(u)$是$M_1(u)$的余N函数。则线性积分算子K是映$L^*_{M_1}$入$L^*_{M_2}$的有界线性算子，并且存在与$k(x,y)$无关的常数$l>0$，使得

$$\|K\|\leqslant l\|k(x,y)\|_{\hat{\Phi}}, \tag{1.36}$$

其中$\|K\|$表示把K看成映$L^*_{M_1}$入$L^*_{M_2}$的线性算子时的算子范数，$\|k(x,y)\|_{\hat{\Phi}}$表示$k(x,y)$在$L^*_{\Phi}(G\times G)$中的范数。

定理1.22 设$k(x,y)\in E_{\Phi}(G\times G)$。又设定理1.21中的三个条件（条件（i）、（ii）、（iii））之一成立。则K是映$L^*_{M_1}$入$L^*_{M_2}$的全连续线性算子。

附注 在讨论非线性积分方程

$$\varphi(x)=\lambda\int_G k(x,y)f(y,\varphi(y))dy$$

的性质时，如果$f(x,u)$的增长速度是幂函数型的，即存在实数$p>1$，使得

$$\overline{\lim_{u\to\infty}}\frac{|f(x,u)|}{|u|^p}<+\infty,$$

则可以应用L_p空间理论，但是，如果$f(x,u)$的增长速度超过任何一个幂函数(如$f(x,u)=e^u$)，则L_p空间理论一般是不够用的了，在这种情况下，Orlicz空间理论（它是L_p空间理论的一种推广）是需要的。在历史上，Orlicz空间理论正是从研究超幂型非线性积分方程和非线性微分方程的需要而发展起来的。目前，Orlicz空间理论已经发展得比较成熟了，它在一系列的数学分支中，都获得了成功的应用。

为建立Orlicz空间所必须的凸函数概念是J.L.W.V.Jenen在〔1〕中建立的，Orlicz空间L_M^*是波兰数学家M.Orlicz首先引进的，而空间E_M则是M.A.Красносельский引进并加以讨论的，系统地论述Orlicz空间理论及其应用的专著有M.A.Красносельский与Я.Б.Рутицкий〔1〕，以及吴从炘、王廷辅〔1〕。

§2 Немыцкий 算子

Немыцкий算子在非线性积分方程理论中起着重要的作用。本节将讨论Немыцкий算子的某些重要性质。

设G是R^N中的可测集，$0<\text{mes}G\leqslant+\infty$。如果函数

$f(x,u): G\times R^1\to R^1$满足

（1）对几乎所有的$x\in G$，$f(x,u)$是u的连续函数；

（2）对每一个u，$f(x,u)$是x的可测函数，则称$f(x,u)$满足Caratheodory条件，如果$f(x,u)$满足Caratheodory条件，则算子

$$\mathrm{f}\varphi(x)=f(x,\varphi(x)) \tag{2.1}$$

称为是Немыцкий算子．

引理2.1 设mes$G<+\infty$．则$f(x,u)$满足Caratheodory条件的充分必要条件是：对任给$\varepsilon>0$，存在有界闭集$F\subset G$，mes$F>$mes$G-\varepsilon$，使$f(x,u)$在$F\times R^1$上连续．

这个引理的证明见郭大钧〔1〕．

在本书中，如果不特别指明，则总假定函数$f(x,u)$满足Caratheodory条件．

Немыцкий算子f有下列重要性质：

引理2.2 若$\varphi(x)$在G上可测，则$\mathrm{f}\varphi(x)$也是G上的可测函数．

引理2.3 设mes$G<+\infty$．如果$\varphi_n(x)(n=1,2,\cdots)$在$G$上依测度收敛于$\varphi(x)$，则$\mathrm{f}\varphi_n(x)$在$G$上也依测度收敛于$\mathrm{f}\varphi(x)$．

上述两个引理的证明见郭大钧〔1〕．

下面将主要讨论在Orlicz空间中，Немыцкий算子的性质．设$M(u)$是一个N函数，$\alpha>0$，是一个实数，定义

$$L_M^\alpha=\left\{\varphi(x)\,\Big|\,\int_G M(\alpha\varphi(x))dx<+\infty\right\}. \tag{2.2}$$

显然，

$$E_M=\bigcap_{\alpha>0}L_M^\alpha;\qquad L_M^*=\bigcup_{\alpha>0}L_M^\alpha. \tag{2.3}$$

设$M_1(u)$、$M_2(u)$是两个给定的N函数，α、β是两个给定

的正数，下面首先研究Немыцкий算子f映$L_{M_1}^{\alpha}$入$L_{M_2}^{\beta}$的条件。

对正数α，β，γ，和确定的$x\in G$，令

$$F(x;\alpha,\beta,\gamma)=\sup_{u\in E_x(\alpha,\beta,\gamma)}|f(x,u)|, \qquad (2.4)$$

其中

$$E_x(\alpha,\beta,\gamma)=\{u\in R^1 \mid M_2(\beta f(x,u))>\gamma M_1(\alpha u)\}\cup\{0\}.$$

显然，$E_x(\alpha,\beta,\gamma)$是R^1中的可测集。

引理2.4 设$F(x;\alpha,\beta,\gamma)$由(2.4)式定义。则

(i) 对任给$x\in G$，$u\in R^1$，有

$$M_2(\beta f(x,u))\leqslant\gamma M_1(\alpha u)+M_2(\beta F(x;\alpha,\beta,\gamma)); \qquad (2.5)$$

(ii) 对任意固定的$\alpha>0$，$\beta>0$，$\gamma>0$，$F(x;\alpha,\beta,\gamma)$是x的可测函数；

(iii) 对任意固定的$x\in G,\alpha>0$，$\beta>0$，当$\gamma>0$时，$F(x;\alpha,\beta,\gamma)$是γ的减函数。

证 (i)对任意$x\in G,u\in R^1$,若$M_2(\beta f(x,u))\leqslant\gamma M_1(\alpha u)$，则(2.5)式显然成立。若$M_2(\beta f(x,u))>\gamma M_1(\alpha u)$，则有$u\in E_x(\alpha,\beta,\gamma)$。根据(2.4)式，$F(x;\alpha,\beta,\gamma)\geqslant|f(x,u)|$。注意到当$u\geqslant 0$时$M_2(u)$是增函数，所以

$$M_2(\beta F(x;\alpha,\beta,\gamma)\geqslant M_2(\beta|f(x,u)|)=M_2(\beta f(x,u)).$$

故(2.5)式也成立。

(ii) 令

$$F^*(x)=\sup_{r\in E_x(\alpha,\beta,\gamma)\cap R_0}|f(x,r)| \qquad (x\in G),$$

其中R_0是R^1中一切有理数组成的集。显然对任给$c\in R^1$，

$$\{x\in G\mid F^*(x)>c\}=\bigcup_{r\in R_0}(\{x\in G\mid r\in E_x(\alpha,\beta,\gamma)\}$$

$$\cap\{x\in G\mid |f(x,r)|>c\}),$$

故$\{x\in G|F^*(x)>c\}$为可测集，从而$F^*(x)$是可测函数。又因为对几乎所有的$x\in G$，$f(x,u)$关于u连续，所以对几乎所有的$x\in G$，$F(x;\alpha,\beta,\gamma)=F^*(x)$.于是$F(x;\alpha,\beta,\gamma)$是$x$的可测函数。

(iii) 由$F(x;\alpha,\beta,\gamma)$的定义，即知$F(x;\alpha,\beta,\gamma)$是γ的减函数．证完．

定理2.5 f映$L^{\alpha}_{M_1}$入$L^{\beta}_{M_2}$的充分必要条件是存在$\gamma>0$，使$F(x;\alpha,\beta,\gamma)\in L^{\beta}_{M_2}$.

证 充分性。任给$\varphi(x)\in L^{\alpha}_{M_1}$,则$\int_G M_1(\alpha\varphi(x))dx<+\infty$.

又因为$F(x;\alpha,\beta,\gamma)\in L^{\beta}_{M_2}$，所以$\int_G M_2(\beta F(x;\alpha,\beta,\gamma))dx<+\infty$.根据引理2.4 (i)，$\int_G M_2(\beta f(x,\varphi(x)))dx<+\infty$,即$f\varphi(x)\in L^{\beta}_{M_2}$。充分性证完。

必要性：用反证法，设对任给$\gamma>0$，都有$F(x;\alpha,\beta,\gamma)\overline{\in}L^{\beta}_{M_2}$，则对每一个$k=1,2,\cdots$，都有

$$\int_G M_2[\beta F(x;\alpha,\beta,k)]dx=+\infty. \tag{2.6}$$

令

$$G_k=\{x\in G|M_2[\beta F(x;\alpha,\beta,k)]=+\infty\}\quad(k=1,2,\cdots).$$

则由$F(x;\alpha,\beta,\gamma)$的定义知，$G_k\supset G_{k+1}$ $(k=1,2,\cdots)$。下面分三种情况：

(1) 存在自然数k_0，使当$k\geqslant k_0$时$\mathrm{mes}G_k=0$．这时

$M_2[\beta F(x;\alpha,\beta,k_0)$ 几乎处处有限。于是由(2.6)式知存在 $G'_1\subset G$，使 $0<\text{mes}G'_1<+\infty$，并且

$$1<\int_{G'_1}M_2[\beta F(x;\alpha,\beta,k_0)]dx<+\infty.$$

由引理2.4（iii）知，$\int_{G'_1}M_2[\beta F(x;\alpha,\beta,k_0+1)]dx<+\infty$.

故由(2.6)式有

$$\int_{G\setminus G'_1}M_2[\beta F(x;\alpha,\beta,k_0+1)]dx=+\infty.$$

用同样的方法可以证明，存在$G'_2\subset G\setminus G'_1$，使 $0<\text{mes}G'_2<+\infty$，并且

$$\frac{1}{2}<\int_{G'_2}M_2[\beta F(x;\alpha,\beta,k_0+1)]dx<+\infty.$$

如此类推，可知存在G的可列个互不相交的可测子集 $G'_i(i=1,2,\cdots)$，使 $0<\text{mes}G'_i<+\infty$，并且

$$\frac{1}{i}<\int_{G'_i}M_2[\beta F(x;\alpha,\beta,k_0+i-1)]dx<+\infty.$$

（2）对一切G_k都有$\text{mes}G_k>0$，并且$\text{mes}(\bigcap_{k=1}^{\infty}G_k)>0$.

这时，对$\bigcap_{k=1}^{\infty}G_k$的任意互不相交的、满足 $0<\text{mes}G'_i<+\infty$的子集列$\{G'_i|i=1,2,\cdots\}$，都有

$$\int_{G'_i}M_2[\beta F(x;\alpha,\beta,i)]dx=+\infty\quad(i=1,2,\cdots).$$

（3）对一切G_k都有$\text{mes}G_k>0$，并且$\text{mes}(\bigcap_{k=1}^{\infty}G_k)=0$. 这

时对每一个自然数$m(m=1,2,\cdots)$，都有

$$\text{mes}G_m=\sum_{i=m}^{\infty}\text{mes}(G_i\backslash G_{i+1})>0.$$

所以存在$k_1<k_2<\cdots<k_i<\cdots$，使得

$$\text{mes}(G_{k_i}\backslash G_{k_{i+1}})>0\quad(i=1,2,\cdots).$$

取$G_i'\subset G_{k_i}\backslash G_{k_{i+1}}$使$0<\text{mes}G_i'<+\infty$。则显然诸$G_i'$两两互不相交，并且

$$\int_{G_i'}M_2[\beta F(x;\alpha,\beta,k_i)]dx=+\infty\quad(i=1,2,\cdots).$$

总之，在以上三种情况下，都存在G的两两互不相交的子集列$\{G_i'|i=1,2,\cdots\}$及自然数$k_1<k_2<\cdots<k_i<\cdots$，使得$0<\text{mes}G_i'<+\infty$，并且

$$\int_{G_i'}M_2[\beta F(x;\alpha,\beta,k_i)]dx>\frac{1}{i}\quad(i=1,2,\cdots).\tag{2.7}$$

对$p=1,2,\cdots$，令

$$F_p(x;\alpha,\beta,\gamma)=\sup_{u\in E_x(\alpha,\beta,\gamma),\ |u|\leq p}|f(x,u)|\quad(x\in G),$$

则仿引理2.4（ii）之证明，可知$F_p(x;\alpha,\beta,\gamma)$是$G$上的可测函数。显然$F_p(x;\alpha,\beta,\gamma)$几乎处处有限，并且在$G$上几乎处处单调递增收敛于$F(x;\alpha,\beta,\gamma)$（当$p\to+\infty$时）。所以$M_2[\beta F_p(x;\alpha,\beta,k_i)]$几乎处处有限，并且在$G$上几乎处处单调递增收敛于$M_2[\beta F(x;\alpha,\beta,k_i)]$（当$p\to+\infty$时）。根据Levy定理，

$$\lim_{p\to+\infty}\int_{G_i'} M_2[\beta F_p(x;\alpha,\beta,k_i)]dx$$

$$=\int_{G_i'} M_2[\beta F(x;\alpha,\beta,k_i)]dx.$$

因此，根据(2.7)式可知存在自然数序列$p_i\to+\infty$，使得

$$\int_{G_i'} M_2[\beta F_{p_i}(x;\alpha,\beta,k_i)]dx>\frac{1}{i}\quad(i=1,2,\cdots).\quad(2.8)$$

根据实变函数论中的一个已知结论（若$x(t)$是有限测度集A上的几乎处处有限的非负可测函数，并且存在正数a，使$\int_A x(t)dt>a$，则存在可测集$B\subset A$，使$\int_B x(t)dt=a$.这一结论的证明见吴从炘、王廷辅〔1〕)，由(2.8)式可知必存在G_i'的正测度子集E_i，使得

$$\int_{E_i} M_2[\beta F_{p_i}(x;\alpha,\beta,k_i)]=\frac{1}{i}\quad(i=1,2,\cdots).\quad(2.9)$$

对每一个i，取$E_i^*\subset E_i$，使$\mathrm{mes}(E_i\setminus E_i^*)=0$，并且$f(x,u)$对每一个$x\in E_i^*$关于$u$连续. 定义

$$\varphi(x;\alpha,\beta,k_i,p_i)=\begin{cases}\min\{u^*\in\overline{J_i(x)}\mid f(x,u^*)=\sup\limits_{u\in J_i(x)}|f(x,u)|\}, & x\in E_i^*\text{时},\\ 0, & x\in E_i\setminus E_i^*\text{时},\end{cases}\quad(2.10)$$

其中$J_i(x)=\{u\in E_x(\alpha,\beta,k_i)\mid\alpha|u|\leqslant p_i\}$.下证$\varphi(x;\alpha,\beta,k_i,p_i)$是$E_i^*$上，从而是$E_i$上的可测函数，取$\{r_1,r_2,\cdots,r_m,\cdots\}$是$[-\alpha^{-1}p_i,\alpha^{-1}p_i]$中一切非零有理数组成的集合，令$F_{p_i}(x)=$

$F_{p_i}(x;\alpha,\beta,k_i)$。对任给的自然数$m$和$n$，定义

$$d_{m,n}(x)=\begin{cases} f(x,0), & \text{若} J_i(x)=\{0\} \\ r_m, & \text{若} J_i(x)\neq\{0\}, r_m\in J_i(x), f(x,r_m) \\ & >F_{p_i}(x)-\dfrac{1}{n}, \\ \alpha^{-1}p_i, & \text{若} J_i(x)\neq\{0\}, r_m\in J_i(x),\ f(x,r_m) \\ & \leqslant F_{p_i}(x)-\dfrac{1}{n}, \\ \alpha^{-1}p_i, & \text{若} J_i(x)\neq\{0\}, r_m\overline{\in} J_i(x). \end{cases}$$

由于对固定的r_m和n，$\{x\in G|M_2(\beta f(x,r_m))>k_iM_1(\alpha r_m)\}$和$\left\{x\in G|f(x,r_m)>F_{p_i}(x)-\dfrac{1}{n}\right\}$都是可测集，故易知$d_{m,n}(x)$是可测函数，令$d(x)=\inf\limits_n\ \inf\limits_m d_{m,n}(x)$，则显然$d(x)$也是可测函数。下证对任给$x\in E_i^*$，$\varphi(x;\alpha,\beta,k_i,p_i)=d(x)$。由$d(x)$的定义显然

$$\varphi(x;\alpha,\beta,k_i,p_i)\leqslant d(x).$$

任给$\varepsilon>0$，设$x\in E_i^*$固定。若$J_i(x)=\{0\}$，则显然$\varphi(x;\alpha,\beta,k_i,p_i)=d(x)$。若$J_i(x)\neq\{0\}$，则对任给自然数$n$，由$\varphi(x;\alpha,\beta,k_i,p_i)$的定义知，必存在$r_{m_0}\in J_i(x)\cap\{r_j|j=1,2,\cdots,m,\cdots\}$，使得$r_{m_0}-\varphi(x;\alpha,\beta,k_i,p_i)<\varepsilon$，并且$f(x,r_{m_0})>F_{p_i}(x)-\dfrac{1}{n}$。由$d_{m,n}(x)$的定义，知

$$d_{m_0,n}(x)-\varphi(x;\alpha,\beta,k_i,p_i)<\varepsilon.$$

因此，$d(x)-\varphi(x;\alpha,\beta,k_i,p_i)<\varepsilon$. 令$\varepsilon\to 0$，即得

$$d(x)\leqslant\varphi(x;\alpha,\beta,k_i,p_i).$$

因此，$\varphi(x;\alpha,\beta,k_i,p_i)=d(x)$. 这表明$\varphi(x;\alpha,\beta,k_i,p_i)$是$E_i$上的可测函数.

由$\varphi(x;\alpha,\beta,k_i,p_i)$的定义知，对每一个$i$，有

$$\alpha|\varphi(x;\alpha,\beta,k_i,p_i)|\leqslant p_i,$$

$$k_iM_1[\alpha\varphi(x;\alpha,\beta,k_i,p_i)]\leqslant M_2[\beta f(x;\varphi(x;\alpha,\beta,k_i,p_i))], \tag{2.11}$$

$$|f(x,\varphi(x;\alpha,\beta,k_i,p_i))|=F_{p_i}(x;\alpha,\beta,k_i). \tag{2.12}$$

定义G上的函数$\varphi(x)$如下：

$$\varphi(x)=\begin{cases}\varphi(x;\alpha,\beta,k_i,p_i), & x\in E_i, i=1,2,\cdots,\\ 0, & x\in G\setminus\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}E_i.\end{cases} \tag{2.13}$$

则$\varphi(x)$是G上的可测函数，并且由（2.11）、（2.12）、（2.9）诸式可知

$$\begin{aligned}\int_G M_1(\alpha\varphi(x))dx&=\sum_{i=1}^{\infty}\int_{E_i}M_1[\alpha\varphi(x;\alpha,\beta,k_i,p_i)]dx\\ &\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{k_i}\int_{E_i}M_2[\beta f(x,\varphi(x;\alpha,\beta,k_i,p_i))]dx\\ &=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{k_i}\int_{E_i}M_2[\beta F_{p_i}(x;\alpha,\beta,k_i)]dx\\ &\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^2}<+\infty。\end{aligned} \tag{2.14}$$

即$\varphi(x)\in L_{M_1}^{\alpha}$. 但另一方面，由(2.12)、(2.9)式知

$$\int_G M_2[\beta f(x,\varphi(x))]dx$$

$$\geqslant \sum_{i=1}^{\infty}\int_{E_i} M_2[\beta f(x,\varphi(x;\alpha,\beta,k_i,p_i))]dx$$

$$=\sum_{i=1}^{\infty}\int_{E_i} M_2[\beta F_{p_i}(x;\alpha,\beta,k_i)]dx$$

$$=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i}=+\infty. \tag{2.15}$$

这表明$f\varphi(x)\overline{\in}L_{M_2}^{\beta}$.此与f映$L_{M_1}^{\alpha}$入$L_{M_2}^{\beta}$矛盾。证完。

定理2.6 f映$L_{M_1}^{\alpha}$入$L_{M_2}^{\beta}$的充分必要条件是存在$\gamma>0$和$a(x)\in L_1$，使

$$M_2(\beta f(x,u))\leqslant\gamma M_1(\alpha u)+a(x). \tag{2.16}$$

证 充分性是显然的。下证必要性。设f映$L_{M_1}^{\alpha}$入$L_{M_2}^{\beta}$，则根据定理2.5，存在$\gamma>0$，使$F(x;\alpha,\beta,\gamma)\in L_{M_2}^{\beta}$. 又由引理2.4（i）可知，（2.16）式成立，其中$a(x)=M_2(\beta F(x;\alpha,\beta,\gamma))\in L_1$。证完。

令$T_r=\{\varphi(x)\in L_{M_1}^{*}\mid\|\varphi\|_{(M_1)}\leqslant r\}$.

定理2.7 f映T_r入$L_{M_2}^{\beta}$的充分必要条件是f映$L_{M_1}^{r^{-1}}$入$L_{M_2}^{\beta}$。

证 必要性。令$\alpha=r^{-1}$，根据定理2.5，只需证明存在$\gamma>0$，使$F(x;\alpha,\beta,\gamma)\in L_{M_2}^{\beta}$即可。证明完全仿定理2.5证明中

的必要性部分，只需将(2.13)式改为

$$\varphi(x)=\begin{cases}\varphi(x;\alpha,\beta,k_i,p_i), & x\in E_i,\ i\geqslant m\text{时},\\ 0, & \text{在其余点处}.\end{cases} \tag{2.17}$$

其中m满足$\sum_{i=m}^{\infty}\frac{1}{i^2}\leqslant 1$．仿(2.14)式可以证明

$$\int_G M_1(r^{-1}\varphi(x))dx=\int_G M_1(\alpha\varphi(x))dx\leqslant\sum_{i=m}^{\infty}\frac{1}{i^2}\leqslant 1, \tag{2.18}$$

根据(1.27)式，$\varphi(x)\in T_r$。又由引理1.16结论（i）知

$$T_r=\{\varphi(x)\in L^*_{M_1}\mid \|r^{-1}\varphi(x)\|_{(M_1)}\leqslant 1\}$$

$$=\left\{\varphi(x)\in L^*_{M_1}\mid\int_G M_1(r^{-1}\varphi(x))dx\leqslant 1\right\}\subset L^{r^{-1}}_{M_1}, \tag{2.19}$$

所以$\varphi\in L^{r^{-1}}_{M_1}$．再仿(2.15)式之证明，可知 $f\varphi(x)\overline{\in}L^{\beta}_{M_2}$．产生矛盾．必要性证完．

充分性可以由(2.19)式立即得知．证完．

定理2.8 f映T_r入$L^*_{M_2}$的充分必要条件是，存在$\beta>0$，使f映$L^{r^{-1}}_{M_1}$入$L^{\beta}_{M_2}$．

证 必要性．由定理2.5，只需证明存在$\gamma>0$，$\beta>0$，使$F(x;r^{-1},\beta,\gamma)\in L^{\beta}_{M_2}$若不然，则对每一个$k=1,2,\cdots$，都有

$$\int_G M_2[k^{-1}F(x;r^{-1},k^{-1},k)]dx=+\infty.$$

仿(2.9)式的证明可知存在G的互不相交的子集E_i，$0<\mathrm{mes}E_i<+\infty$，以及自然数$k_1<k_2<\cdots, p_1<p_2<\cdots$，使

$$\int_{E_i} M_2[k_i^{-1}F_{p_i}(x;r^{-1},k_i^{-1},k_i)]dx=\frac{1}{i} \quad (i=1,2,\cdots).$$

仿(2.10)式(令其中$\alpha=r^{-1},\beta=k_i^{-1}$)定义$\varphi(x;r^{-1},k_i^{-1},k_i,p_i)$，并定义$\varphi(x)$如下：

$$\varphi(x)=\begin{cases}\varphi(x;r^{-1},k_i^{-1},k_i,p_i), x\in E_i, \ i\geqslant m\text{时},\\ 0, \ \text{在其余点处}.\end{cases}$$

其中m满足$\sum_{i=m}^{\infty}\frac{1}{i^2}\leqslant 1$. 仿(2.18)式的证明，可知$\varphi(x)\in T_r$.但另一方面，对任给$\rho>0$，取自然数$i_0$，，使$i_0\geqslant m$，并且$k_{i_0}\geqslant\rho^{-1}$，则仿(2.15)式的证明，可知

$$\int_G M_2[\rho f(x,\varphi(x))]dx$$

$$\geqslant\sum_{i=i_0}^{\infty}\int_{E_i} M_2[\rho f(x,\varphi(x;r^{-1},k_i^{-1},k_i,p_i))]dx$$

$$\geqslant\sum_{i=i_0}^{\infty}\int_{E_i} M_2[k_i^{-1} f(x,\varphi(x;r^{-1},k_i^{-1},k_i,p_i))]dx$$

$$=+\infty,$$

即 $f\varphi(x)\overline{\in}L_{M_1}^{*}$. 产生矛盾. 必要性证完.

充分性. 设存在$\beta>0$，使f 映$L_{M_1}^{r^{-1}}$入$L_{M_2}^{\beta}$，则由(2.19)式知f映T_r入$L_{M_2}^{\beta}\subset L_{M_2}^{*}$. 证完.

定理2.9 (i) f映 $L_{M_1}^*$ 入 $L_{M_2}^*$ 的充分必要条件是对任给 $\alpha>0$，存在 $\beta>0$，$\gamma>0$ 以及 $a(x)\in L_1$，使

$$M_2[\beta f(x,u)]\leqslant\gamma M_1(\alpha u)+a(x). \tag{2.20}$$

(ii) f映 $L_{M_1}^*$ 入 E_{M_2} 的充分必要条件是对任给 $\alpha>0$，$\beta>0$，都存在 $\gamma>0$，$a(x)\in L_1$，使(2.20)式成立.

证 (i) f映 $L_{M_1}^*$ 入 $L_{M_2}^*$ 等价于对任给 $r>0$，f都映 T_r 入 $L_{M_2}^*$. 根据定理2.8，这又等价于对任给 $\alpha>0$ $(\alpha=r^{-1})$，都存在 $\beta>0$，使f映 $L_{M_1}^\alpha$ 入 $L_{M_2}^\beta$. 因此，根据定理2.6即知结论(i)成立.

(ii) 显然f映 $L_{M_1}^*$ 入 E_{M_2} 等价于对一切 $\alpha>0$，$\beta>0$，f都映 $L_{M_1}^\alpha$ 入 $L_{M_2}^\beta$. 故由定理2.6即知结论(ii)成立. 证完.

下面讨论Немыцкий算子的有界性.

定理2.10 若算子f映 $L_{M_1}^*$ 入 $L_{M_2}^*$，则f是映 $L_{M_1}^*$ 入 $L_{M_2}^*$ 的有界算子.

证 任意取定 $r>0$. 由于f映 T_r 入 $L_{M_2}^*$，故由定理2.8，存在 $\beta>0$，使f映 $L_{M_1}^{r^{-1}}$ 入 $L_{M_2}^\beta$. 故由定理2.6，存在 $\gamma>0$，$a(x)\in L_1$，使对一切 $x\in G$，$u\in R^1$，有

$$M_2[\beta f(x,u)]\leqslant\gamma M_1(r^{-1}u)+a(x).$$

任取 $\varphi(x)\in T_r$，则 $\int_G M_1(r^{-1}\varphi(x))dx\leqslant 1$. 故

$$\int_G M_2[\beta f(x,\varphi(x))]dx\leqslant\gamma\int_G M_1(r^{-1}\varphi(x))dx$$

$$+\int_G a(x)dx\leqslant\gamma+\int_G a(x)dx.$$

取$m=\max\left\{\gamma+\int_G a(x)dx,\ 1\right\}$，则

$$\int_{G_2} M_2\left[\frac{\beta}{m} f(x,\varphi(x))\right]dx \leqslant \frac{1}{m}\int_G M_2[\beta f(x,\varphi(x))]dx \leqslant 1$$

于是$\|f\varphi\|_{(M_2)}\leqslant\dfrac{m}{\beta}$．即f映$T_r$为有界集．证完．

注2.11 事实上，在定理2.10的证明中，已经证明：若f映T_r入$L^*_{M_2}$，则f在T_r上有界．

推论2.12 若f映$L^*_{M_1}$入E_{M_2}，则f是映$L^*_{M_1}$入E_{M_2}的有界算子．

下面讨论Немыцкий算子的连续性．

引理2.13 设$\varphi_0(x)\in L^*_{M_1}$，f映$\varphi_0(x)$在$L^*_{M_1}$中的某个邻域入$L^*_{M_2}$.则f在$\varphi_0(x)$处连续的充分必要条件是，对任给$\mu>0$，都存在$\lambda>0$，使得$f_1$映$L^\lambda_{M_1}$入$L^\mu_{M_2}$，其中$f_1$由下式定义：

$$f_1\psi(x)=f(\varphi_0(x)+\psi(x))-f\varphi_0(x). \tag{2.21}$$

证 显然只需证明：如果$f(x,0)\equiv 0$在G上几乎处处成立，则f在$\theta\in L^*_{M_1}$处连续的充分必要条件是对任给$\mu>0$，都存在$\lambda>0$，使f映$L^\lambda_{M_1}$入$L^\mu_{M_2}$．

充分性．任取$\mu>0$，存在$\lambda>0$，使f映$L^\lambda_{M_1}$入$L^\mu_{M_2}$．根据定理2.7，f映θ的邻域$T_{\lambda^{-1}}$入$L^\mu_M\subset L^*_{M_2}$．设$\varphi_n(x)\in T_{\lambda^{-1}}$，$\|\varphi\|_{(M_1)}\to 0$．下面证明$M_2[\mu f(x,\varphi_n(x))]$ $(n=1, 2, \cdots)$ 在G上具有等度绝对连续的积分，即对任给$\eta>0$，都存在$\delta>0$，使得只要$E\subset G$，$\mathrm{mes}E<\delta$，就有

$$\int_E M_2[\mu f(x,\varphi_n(x))]dx<\eta$$

对一切n同时成立。

因为f映$L^\lambda_{M_1}$入$L^\mu_{M_2}$，故根据定理2.6，存在$\gamma>0$，$a(x)\in L_1$，使

$$M_2[\mu f(x,u)]\leqslant\gamma M_1(\lambda u)+a(x). \tag{2.22}$$

给定$\eta>0$。由于$\|\varphi_n\|_{(M_1)}\to 0$，故必存在正整数$N_1$，使当$n>N_1$时

$$\int_G M_1[\lambda\varphi_n(x)]dx\leqslant\|\lambda\varphi_n(x)\|_{(M_1)}<\frac{\eta}{2\gamma}. \tag{2.23}$$

另一方面，因为$M_1[\lambda\varphi_n(x)]\in L_1$，$a(x)\in L_1$，故必有$\delta>0$，使得只要$E\subset G$，$\text{mes}E<\delta$，就有

$$\int_E M_1[\lambda\varphi_n(x)]\,dx<\frac{\eta}{2\gamma},\ (n=1,2,\cdots,N_1) \tag{2.24}$$

$$\int_E a(x)dx<\frac{\eta}{2} \tag{2.25}$$

由(2.22)～(2.25)诸式知

$$\int_E M_2[\mu f(x,\varphi_n(x))]dx\leqslant\gamma\int_E M_1[\lambda\varphi_n(x)]dx+\int_E a(x)dx$$

$$<\gamma\cdot\frac{\eta}{2\gamma}+\frac{\eta}{2}=\eta. \tag{2.26}$$

即$M_2[\mu f(x,\varphi_n(x))]$ $(n=1,2,\cdots)$在G上有等度绝对连续的积分。

下面再证明

$$\lim_{n\to\infty}\int_G M_2[\mu f(x,\varphi_n(x))]dx=0. \qquad (2.27)$$

任给$\varepsilon>0$，由于$\|\varphi_n\|_{(M_1)}\to 0$，故存在正整数$N_2$，使当$n>N_2$时

$$\int_G M_1[\lambda\varphi_n(x)]dx<\frac{\varepsilon}{4\gamma}.$$

另一方面，由于$M_1[\lambda\varphi_n(x)]\in L_1$，$a(x)\in L_1$，故可以取$R^N$中的一个球$B_0$，使得

$$\int_{V_0} M_1[\lambda\varphi_n(x)]dx<\frac{\varepsilon}{4\gamma} \quad (n=1,2,\cdots,N_2),$$

$$\int_{V_0} a(x)dx<\frac{\varepsilon}{4}$$

其中$V_0=(R^N\backslash B_0)\cap G$。于是仿(2.26)式可以证明

$$\int_{V_0} M_2[\mu f(x,\varphi_n(x))]dx<\frac{\varepsilon}{2} \quad (n=1,2,\cdots) \qquad (2.28)$$

令$U_0=B_0\cap G$。则$\mathrm{mes}U_0<+\infty$。于是由$\|\varphi_n\|_{(M_1)}\to 0$可知序列$\varphi_n$ $(n=1,2,\cdots)$ 依测度收敛于θ。从而由引理 2.3 知$f\varphi_n(x)$在U_0上也依测度收敛于θ。因此，$M_2[\mu f(x,\varphi_n(x))]$也在$U_0$上依测度收敛于$\theta$。注意到$M_2[\mu f(x,\varphi_n(x))]$具有等度绝对连续的积分。故应用关于积分号下取极限的Vitali定理，可知

$$\lim_{n\to\infty}\int_{U_0} M_2[\mu f(x,\varphi_n(x))]dx=0.$$

因此，存在$N>0$，使当$n>N$时，恒有

$$\int_{U_0} M_2[\mu f(x,\varphi_n(x))]dx<\frac{\varepsilon}{2}.$$

注意到(2.28)式，即知当$n>N$时

$$\int_G M_2[\mu f(x,\varphi_n(x))]dx<\varepsilon.$$

由于ε的任意性，故知(2.27)式成立.

由于$\mu>0$是任取的.故对任给$\varepsilon'>0$，可取$\mu>\frac{1}{\varepsilon'}$，则由(2.27)式知，当$n$充分大时，$\int_G M_2[\mu f(x,\varphi_n(x))]dx\leqslant 1$.

从而由(1.27)式可知$\|\mu \mathrm{f}\varphi_n(x)\|_{(M_2)}\leqslant 1$. 故$\|\mathrm{f}\varphi_n(x)\|_{(M_2)}\leqslant\frac{1}{\mu}<\varepsilon'$. 因此$\mathrm{f}\varphi_n(x)\to\theta$. 充分性证完.

必要性. 任取$\mu>0$，由f在θ处的连续知，存在$r>0$，使当$\|\varphi\|_{(M_1)}\leqslant r$时，$\|\mathrm{f}\varphi\|_{(M_2)}\leqslant\mu^{-1}$，即

$$\int_G M_2[\mu f(x,\varphi(x))]dx\leqslant 1.$$

因此f映T_r入$L_{M_2}^{\mu}$. 再由定理2.7知f映$L_{M_1}^{r^{-1}}$入$L_{M_2}^{\mu}$. 证完.

引理2.14 f映$L_{M_1}^{\alpha}$入$L_{M_2}^{*}$，并且在$L_{M_1}^{\alpha}$上处处连续的充分必要条件是，对任给$\mu>0$，都存在$\lambda>0$，使得由$\tilde{f}(x,u,v)=f(x,u+v)-f(x,u)$所定义的Немыцкий算子

$$\tilde{\mathrm{f}}(\varphi,\psi)=\tilde{f}(x,\varphi(x),\psi(x))$$

映$L_{M_1}^{(\alpha,\lambda)}$入$L_{M_2}^{\mu}$，其中

$$L_{M_1}^{(\alpha,\lambda)}=\{(\varphi(x),\psi(x))\,|\,\varphi(x)\in L_{M_1}^{\alpha},\psi(x)\in L_{M_1}^{\lambda}\}.$$

证 充分性．任给$\varphi_0(x)\in L_{M_1}^{\alpha}$，显然$\tilde{f}(\varphi_0(x),\psi(x))=f_1\psi(x)$，其中$f_1$由(2.21)式定义．由假设可知，对任给$\mu>0$，存在$\lambda>0$，使当$\psi(x)\in L_{M_1}^{\lambda}$时$\tilde{f}(\varphi_0(x),\psi(x))\in L_{M_2}^{\mu}$，即$f_1$映$L_{M_1}^{\lambda}$入$L_{M_2}^{\mu}$．故由引理2.13知，$f$在$\varphi_0(x)$处连续．因此可知$f$在$L_{M_1}^{\alpha}$上处处连续，充分性证完．

必要性．用反证法．若不然，则存在$\mu_0>0$，使对任何$\lambda>0$，$\tilde{f}$都不能把$L_{M_1}^{(\alpha,\lambda)}$映入$L_{M_2}^{\mu_0}$．仿定理2.5充分性之证明，可知对任何$\gamma>0$，都有

$$F(x;(\alpha,\lambda),\mu_0,\gamma)\overline{\in}L_{M_2}^{\mu_0},$$

其中，

$$F(x;(\alpha,\lambda),\beta,\gamma)=\sup_{(u,v)\in E_x((\alpha,\lambda),\beta,\gamma)}|\tilde{f}(x,u,v)|,$$

$$E_x((\alpha,\lambda),\beta,\gamma)=\{(u,v)\,|\,M_2[\beta\tilde{f}(x,u,v)]$$
$$>\gamma[M_1(\alpha u)+M_1(\lambda v)]\}\cup\{(0,0)\}.$$

于是，对每一个$k=1,2,\cdots$，都有

$$\int_G M_2[\mu_0F(x;(\alpha,k),\mu_0,k)]dx=+\infty.$$

对每一个$p=1,2,\cdots$，令

$$F_p(x;(\alpha,\lambda),\beta,\gamma)=\sup_{(u,v)\in E_x((\alpha,\lambda),\beta,\gamma),\alpha|u|\leqslant p,\lambda|v|\leqslant p}|\tilde{f}(x,u,v)|$$

则仿定理2.5之证明，可知$F_p(x;(\alpha,\lambda),\beta,\gamma)$在$G$上可测，并且存在$G$的互不相交的可测子集$E_i$，$0<\text{mes}E_i<+\infty$，以及自然数$k_1<k_2<\cdots$，$p_1<p_2<\cdots$，使

$$\int_{E_i}M_2[\mu_0F_{p_i}(x;(\alpha,k_i),\mu_0,k_i)]dx=\frac{1}{i}\quad(i=1,2,\cdots).$$

对每个$i=1,2,\cdots$，取$E_i^*\subset E_i$，使$\text{mes}(E_i\backslash E_i^*)=0$，并且$\tilde{f}(x,u,v)$对每一个$x\in E_i^*$关于$u,v$连续。定义

$$(\varphi(x;(\alpha,k_i),\mu_0,k_i,p_i),\psi(x;(\alpha,k_i),\mu_0,k_i,p_i))$$

$$=\begin{cases}\min\{(u^*,v^*)\in\overline{J_i(x)}\,|\,|\tilde{f}(x,u^*,v^*)|=\max\limits_{(u,v)\in J_i(x)}|\tilde{f}(x,u,v)|\},\ x\in E_i^*\text{时},\\ 0,\ x\in E_i\backslash E_i^*\text{时},\end{cases}$$

其中$J_i(x)=\{(u,v)\,|\,(u,v)\in E_x((\alpha,k_i),\mu_0,k_i),\alpha|u|\leqslant p_i,\ k_i|v|\leqslant p_i\}$；$\min\{(u,v)\in M\}=(u_*,v_*)$，$M$是$R^2$中的一个子集，$u_*=\min\{u\,|\,(u,v)\in M\}$，$v_*=\min\{v\,|\,(u_*,v)\in M\}$。仿定理2.5的证明，可以证得$\varphi(x;(\alpha,k_i,\mu_0,k_i,p_i)$和$\psi(x;(\alpha,k_i),\mu_0,k_i,p_i)$均是可测函数。定义

$$\varphi(x)=\begin{cases}\varphi(x;(\alpha,k_i),\mu_0,k_i,p_i),\quad x\in E_i,i=1,2,\cdots,\\ 0,\ x\in G\backslash\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}E_i;\end{cases}$$

$$\psi_n(x)=\begin{cases}\psi(x;(\alpha,k_i),\mu_0,k_i,p_i),\quad x\in E_i,i\geqslant n,\\ 0,\ x\in G\backslash\bigcup\limits_{i=n}^{\infty}E_i,\end{cases}$$

$(n=1,2,\cdots)$. 则仿(2.14)式的证明可以证得

$$\int_G M_1[\alpha\varphi(x)]dx\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^2}<+\infty,$$

$$\int_G M_1[k_n\psi_n(x)]dx\leqslant\sum_{i=n}^{\infty}\frac{1}{i^2}\quad(n=1,2,\cdots).$$

于是$\varphi(x)\in L^a_{M_1}$，$\psi_n(x)\in L^*_{M_1}$，并且$\lim\limits_{n\to\infty}\|\psi_n\|_{(M_1)}=0$．但是另一方面，仿(2.15)式的证明可知对每一个$n=1,2,\cdots$，

$$\int_G M_2[\mu_0(f(\varphi(x)+\psi_n(x))-\mathrm{f}\varphi(x))]dx$$

$$=\int_G M_2[\mu_0\tilde{f}(x,\varphi(x),\psi_n(x))]dx$$

$$\geqslant\sum_{i=n}^{\infty}\int_{E_i} M_2[\mu_0F_{p_i}(x;(a,k_i),\mu_0,k_i)]dx$$

$$=\sum_{i=n}^{\infty}\frac{1}{i}=+\infty.$$

这表明f在$\varphi(x)\in L^a_{M_1}$处不连续，这矛盾于假设．证完．

定理2.15 f映$L^a_{M_1}$入$L^*_{M_2}$，并且在$L^a_{M_1}$上处处连续的充分必要条件是，对任给$\mu>0$，存在$\gamma>0$，$\rho>0$和$a(x)\in L_1$，使对一切$x\in G$，u，$v\in R^1$有

$$M_2[\mu(f(x,u+v)-f(x,u))]\leqslant\gamma M_1(\alpha u)+M_1(\rho v)+a(x).\qquad(2.29)$$

证 充分性由引理2.14即得．下证必要性．

根据定理2.14，并仿照定理2.6必要性的证明，可知必存在$\gamma>0$，$\lambda>0$和$a(x)\in L_1$，使

$$M_2[\mu(f(x,u+v)-f(x,u))]\leqslant\gamma M_1(\alpha u)+\gamma M_1(\lambda v)+a(x).$$

(2.30)

取自然数n，使$n\geqslant\gamma$。令$\rho=n\lambda$，则

$$\gamma M_1(\lambda v)\leqslant\frac{\gamma}{n}M_1(n\lambda v)\leqslant M_1(n\lambda v)=M_1(\rho v)。\quad(2.31)$$

由(2.30)、(2.31)两式，即知(2.29)式成立。证完。

定理2.16 f映$L^*_{M_1}$入$L^*_{M_2}$，并在$L^*_{M_1}$上处处连续的充分必要条件是，对任给$\alpha>0$，$\mu>0$，都存在$\gamma>0$，$\rho>0$，$a(x)\in L_1$，使对一切$x\in G$，u，$v\in R^1$，(2.29)式成立。

证 注意到(2.3)式，并利用定理2.15即可推出。证完。

定理2.17 如果f映$L^*_{M_1}$入E_{M_2}，则f是映$L^*_{M_1}$入E_{M_2}的连续算子。

证 任给$\varphi_0(x)\in L^*_{M_1}$，考察由(2.21)式定义的算子$f_1$。由f映$L^*_{M_1}$入$E_{M_2}$知$f_1$也映$L^*_{M_1}$入$E_{M_2}$。于是对任给$\lambda>0$，$\mu>0$，$f_1$映$L^\lambda_{M_1}$入$L^\mu_{M_2}$，从而对任给$\mu>0$，都存在$\lambda>0$，使$f_1$映$L^\lambda_{M_1}$入$L^\mu_{M_2}$。根据引理2.13，f在$\varphi_0(x)$处连续。证完。

利用定理2.9、定理2.10、推论2.12、定理2.16、定理2.17，并注意到$L^*_M=E_M$的充分必要条件是$M(u)$满足Δ_2条件，立即可以得到下述定理：

定理2.18 设$f(x,u)$满足Caratheodory条件，则

(i) 下列3个命题是等价的：

(a) f映$L^*_{M_1}$入$L^*_{M_2}$；

(b) f是映$L^*_{M_1}$入$L^*_{M_2}$的有界算子；

(c) 对任给$\alpha>0$，都存在$\beta>0$，$\gamma>0$以及$a(x)\in L_1$，

使

$$M_2[\beta f(x,u)]\leqslant\gamma M_1(\alpha u)+a(x)\quad(\forall x\in G,u\in R').$$

(ii) f是映$L^*_{M_1}$入$L^*_{M_2}$的连续算子的充分必要条件是：对任给$\alpha>0$，$\mu>0$，都存在$\gamma>0$，$\rho>0$，$a(x)\in L_1$，使对一切$x\in G$，u，$v\in R^1$，有

$$M_2[\mu(f(x,u+v)-f(x,u))]\leqslant\gamma M_1(\alpha u)+M_1(\rho v)+a(x).$$

(iii) 如果$M_2(u)$满足$\triangle_2$条件，则（i）中的命题(a)、(b)、(c)都等价于下列命题：

(d) f是映$L^*_{M_1}$入$L^*_{M_2}$的连续算子。

注2.19 检查与定理2.18有关的全部证明，可以知道：如果在定理2.18中，把$L^*_{M_1}$换成L_1，则定理2.18的全部结论仍然成立。

注2.20 检查与定理2.18有关的全部证明，可以知道：如果在定理2.18中，把$L^*_{M_2}$换成L_1，则定理2.18的全部结论仍然成立。特别地，由于L_1可以看成是满足$\triangle_2$条件，故下列4个命题是等价的：

(a) f映$L^*_{M_1}$入L_1；

(b) f是映$L^*_{M_1}$入L_1的有界算子；

(c) f是映$L^*_{M_2}$入L_1的连续算子；

(d) 对任给$\alpha>0$，都存在$\gamma>0$及$a(x)\in L_1$，使

$$|f(x,u)|\leqslant\gamma M_1(\alpha u)+a(x)\quad(\forall x\in G,u\in R^1).$$

此外还可以知道，如果定理2.18中的$L^*_{M_1}$和$L^*_{M_2}$同时都换

成L_1，则定理2.18的结论也是成立的。

定理2.21 设$f(x,u)$满足Caratheodory条件，$p_1\geqslant 1$，$p_2\geqslant 1$，则下列4个命题等价：

(a) f映L_{p_1}入L_{p_2}；

(b) f是映L_{p_1}入L_{p_2}的有界算子；

(c) f是映L_{p_1}入L_{p_2}的连续算子；

(d) 存在$b>0$，$a(x)\in L_{p_2}$，使对任给$x\in G$，$u\in R^1$，有

$$|f(x,u)|\leqslant b|u|^{\frac{p_1}{p_2}}+a(x). \tag{2.32}$$

证 由定理2.18、注2.19和注2.20可知，只需证明命题(d)与命题

(d^*) 存在$b_1>0$，$a_1(x)\in L_1$，使对任给$x\in G,u\in R^1$，有

$$|f(x,u)|^{p_2}\leqslant b_1|u|^{p_1}+a_1(x)$$

等价即可。事实上，若命题(d)成立，则由一个初等不等式$(\alpha+\beta)^r\leqslant 2^{r-1}(\alpha^r+\beta^r)$（其中$r\geqslant 1$，$\alpha\geqslant 0$，$\beta\geqslant 0$）可知

$$|f(x,u)|^{p_2}\leqslant[b|u|^{\frac{p_1}{p_2}}+|a(x)|]^{p_2}$$

$$\leqslant 2^{p_2-1}b^{p_2}|u|^{p_1}+2^{p_2-1}|a(x)|^{p_2}$$

即命题(d^*)成立。若命题(d^*)成立，则根据另一个初等不等式$(\alpha+\beta)^r\leqslant\alpha^r+\beta^r$（其中$0<r\leqslant 1$，$\alpha\geqslant 0$，$\beta\geqslant 0$）可以得到

$$|f(x,u)|\leqslant[b_1|u|^{p_1}+|a_1(x)|]^{\frac{1}{p_2}}$$

$$\leqslant b_1^{\frac{1}{p_2}}|u|^{\frac{p_1}{p_2}}+|a_1(x)|^{\frac{1}{p_2}}$$

即命题(d)成立。证完。

关于作用在C空间上的Немыцкий算子，下列结论是明显的：

定理2.22 设G是R^N中的有界闭集，$f(x,u):G\times R^1\to R^1$连续，则Немыцкий算子f映C入自身，并且是连续、有界算子。

附注 关于Немыцкий算子的研究，首先是由C.Carathéodory〔1〕和B.B.Немыцкий〔2〕进行的。由于这种算子在非线性积分方程理论中具有特殊的意义，许多学者都对它进行了研究。在L_p空间中，Немыцкий算子的性质，在本世纪50年代期间，就被苏联数学家所搞清，并被总结在M.A.Красносельский〔1〕和M.M.Вайнбрг〔1〕中，这就是本节的定理2.21.在Orlicz空间中,Немыцкий算子性质的研究，在M.A.Красносельский和Я.Б.Рутицкий的〔1〕中就开始了.郭大钧在〔5〕中，И.В.Шрагин在〔1〕中进一步系统地研究了Orlicz空间中Немыцкий算子的性质，给出了一系列的充要条件。郭大钧和И.В.Шрагин的结果构成了本节的主要内容。

关于Немыцкий算子的其它研究，可见王声望〔2〕,张上泰〔1〕，冷生明〔1〕，M.Marcus和V.J.Mizel〔1〕〔2〕．此外，还可见M.A.Красносельский，П.П.Забрейко，E.И.Пустыльник,П.E.Соболевский的专著〔1〕.

§3 非线性积分算子的全连续性

首先讨论Урысон积分算子.

设G是R^N中的有界闭集，$k(x,y,u):G\times G\times R^1\to R^1$满足Caratheodory条件，即对几乎所有的$(x,y)\in\hat{G}=G\times G$，$k(x,y,u)$是$u$的连续函数；对每一个$u\in R^1$，$k(x,y,u)$是$(x,y)$的可测函数，则称积分算子

$$K\varphi(x)=\int_G k(x,y,\varphi(y))dy \tag{3.1}$$

是Урысон算子．本节总设$k(x,y,u)$满足Caratheodory条件．

先考察作用在Orlicz空间上的Урысон积分算子．

引理3.1 设N函数$N(v)$具有连续的严格增的导函数$q(v)$．如果存在常数a，$0<a<1$，使得

$$\overline{\lim_{v\to+\infty}}\frac{q(av)}{q(v)}<1,\quad \overline{\lim_{v\to 0^+}}\frac{q(av)}{q(v)}<1, \tag{3.2}$$

则必存在常数b，$0<b<1$，使得对一切v，都有

$$N(av)\leqslant abN(v). \tag{3.3}$$

证 由条件(3.2)式知，存在$v_1>v_0>0$，使

$$\sup_{v_1<v<+\infty}\frac{q(av)}{q(v)}=b_1<1,\quad \sup_{0<v<v_0}\frac{q(av)}{q(v)}=b_0<1.$$

因为$q(v)$严格增，故对任给$v\in[v_0,v_1]$，$\dfrac{q(av)}{q(v)}<1$．注意到$q(v)$的连续性，即知存在常数b_2，$0<b_2<1$，使

$$\max_{v_0\leqslant v\leqslant v_1}\frac{q(av)}{q(v)}=b_2.$$

取$b=\max\{b_0,b_1,b_2\}$，则对一切$v\in R^1$．

$$q(av)\leqslant bq(v).$$

上式两边都在区间$[0,v]$上积分，即可得到(3.3)式．证完．

引理3.2 设$N(v)$是N函数$M(u)$的余N函数，$N(v)$ 满足引理3.1的条件.则对任何$\varphi(x)\in L_M^*$ 及G的任意n个互不相交的可测子集G_i（$i=1,2,\cdots,n$; 其中$n>\frac{1}{ab}$为一自然数，a、b如引理3.1所述），都有

$$\|\varphi(x)\kappa(x;\bigcup_{i=1}^{n}G_i)\|_M\geqslant\frac{1}{bn}\sum_{i=1}^{n}\|\varphi(x)\kappa(x;G_i)\|_M, \qquad (3.4)$$

这里，$\kappa(x;D)$表D上的特征函数，即当$x\in D$时 $\kappa(x;D)=1$，当$x\overline{\in}D$时，$\kappa(x;D)=0$.

证 设$\varphi(x)$和$G_i(i=1,2,\cdots n)$给定。任取$\varepsilon>0$，根据$\|\cdot\|_M$的定义，对每一个$i=1,2,\cdots,n$，可取$\psi_i(x)\in L_N$，$\int_G N(\psi_i(x))\,dx\leqslant 1$，使

$$\int_{G_i}|\varphi(x)||\psi_i(x)|dx>\|\varphi(x)\kappa(x;G_i)\|_M-\frac{\varepsilon}{n}$$

$$(i=1,2,\cdots,n). \qquad (3.5)$$

定义

$$\psi(x)=\begin{cases}\psi_i(x), & \text{若}x\in G_i\ (i=1,2,\cdots,n),\\ 0, & \text{若}x\overline{\in}\bigcup_{i=1}^{n}G_i.\end{cases}$$

则由(3.5)式知

$$\int_{\bigcup_{i=1}^{n}G_i}|\varphi(x)||\psi(x)|dx>\sum_{i=1}^{n}\|\varphi(x)\kappa(x;G_i)\|_M-\varepsilon.$$

$$(3.6)$$

另一方面，又有

$$\int_G N(\psi(x))dx=\sum_{i=1}^{n}\int_{G_i} N(\psi_i(x))dx\leqslant n.$$

故根据引理3.1，有

$$\int_G N\left[\frac{1}{bn}\psi(x)\right]dx\leqslant\frac{1}{abn}\int_G N[a\psi(x)]dx$$

$$\leqslant\frac{1}{n}\int_G N[\psi(x)]dx\leqslant 1.$$

所以，由(1.27)式知$\|\psi(x)\|_{(N)}\leqslant bn$. 于是，由(1.29)式知

$$\int_{\bigcup_{i=1}^{n}G_i}|\varphi(x)||\psi(x)|dx\leqslant\|\varphi(x)\kappa(x;\bigcup_{i=1}^{n}G_i)\|_M\cdot\|\psi\|_{(N)}$$

$$\leqslant bn\|\varphi(x)\cdot\kappa(x;\bigcup_{i=1}^{n}G_i)\|_M. \tag{3.7}$$

由(3.6)、(3.7)式知

$$\|\varphi(x)\kappa(x;\bigcup_{i=1}^{n}G_i)\|_M\geqslant\frac{1}{bn}\left[\sum_{i=1}^{n}\|\varphi(x)\kappa(x,G_i)\|_M-\varepsilon\right].$$

令$\varepsilon\to 0$即知(3.4)式成立。证完。

定理3.3 设$N_1(v)$是N函数$M_1(u)$的余N函数，$N_1(v)$满足引理3.1的条件，又设存在$r>0$，使K映$T(\theta,r;E_{M_1})$入$L^*_{M_2}$全连续，其中$T(\theta,r;E_{M_1})=\{\varphi(x)\in E_{M_1}\,|\,\|\varphi\|_{M_1}<r\}$，则$K$映$E_{M_1}$入$L^*_{M_2}$并且全连续。

证 首先假设$k(x,y,0)\equiv 0$. 取$\varepsilon_0>0$，使$b+\varepsilon_0<1$，其中b如引理3.1所述。下证K映$T\left(\theta,\frac{r}{b+\varepsilon_0};E_{M_1}\right)$入$L^*_{M_2}$并

且全连续．取定一自然数n，使$n>\frac{1}{ab}$，其中a如引理3.1所述．

任取$\varphi(x)\in T(\theta,\frac{r}{b+\varepsilon_0};E_{M_1})$．因为$\varphi(x)\in E_{M_1}$，故根据定理1.19，$\varphi(x)$具有绝对连续范数．故存在$G$的互不相交的子集$G_m\subset G(m=1,2,\cdots,n_0)$，使

$$\|\varphi(x)\kappa(x;G_m)\|_{M_1}=\frac{br}{b+\varepsilon_0}\quad(m=1,2,\cdots,n_0).$$

下证必有$n_0\leqslant n-1$．若不然，设$n_0\geqslant n$．令$G^*=G\setminus\bigcup_{m=1}^{n-1}G_m$．如果$\|\varphi(x)\kappa(x;G^*)\|_{M_1}\geqslant\frac{br}{b+\varepsilon_0}$，则根据引理3.2，有

$$\|\varphi\|_{M_1}\geqslant\frac{1}{bn}\left[\sum_{m=1}^{n-1}\|\varphi(x)\kappa(x;G_m)\|_{M_1}+\|\varphi(x)\kappa(x;G^*)\|_{M_1}\right]$$

$$\geqslant\frac{r}{b+\varepsilon_0},$$

此与$\varphi\in T(\theta,\frac{r}{b+\varepsilon_0};E_{M_1})$矛盾．故$\|\varphi(x)\kappa(x;G^*)\|_{M_1}<\frac{br}{b+\varepsilon}$．但另一方面，显然$G_{n_0}\subset G^*$，故

$$\frac{br}{b+\varepsilon_0}=\|\varphi(x)\kappa(x;G_{n_0})\|_{M_1}\leqslant\|\varphi(x)\kappa(x;G^*)\|_{M_1}$$

$$<\frac{br}{b+\varepsilon},$$

产生矛盾．因此必有$n_0 \leqslant n-1$．把$G \setminus \bigcup_{m=1}^{n_0} G_m$分成$n-n_0$个互不相交的子集（可以有空集）$G_{n_0+1}, G_{n_0+2}, \cdots, G_n$之并，则显然$\varphi(x)$可以写成

$$\varphi(x)=\sum_{m=1}^{n} \varphi_m(x) \tag{3.8}$$

的形式，其中$\varphi_m(x)=\varphi(x)\kappa(x; G_m) \in T(\theta, r, E_{M_1})$（$m=1,2, \cdots, n$）。

因为$k(x, y, o) \equiv 0$，故

$$K\varphi(x)=\sum_{m=1}^{n} K\varphi_m(x). \tag{3.9}$$

因为$\varphi_m(x) \in T(\theta, r; E_{M_1})$，$K$映$T(\theta, r; E_{M_1})$入$L^*_{M_2}$，故由(3.9)式知$K\varphi(x) \in L^*_{M_2}$．因此$K$映$T(\theta, \frac{r}{b+\varepsilon_0}; E_{M_1})$入$L^*_{M_2}$。

取$\varphi_i(x)(i=1,2,\cdots)$是$T(\theta, \frac{r}{b+\varepsilon_0}; E_{M_1})$中的任意点列．由(3.8)、(3.9)两式可知，对每一个i，都存在$\varphi_{i,m} \in T(\theta, r; E_{M_1})(m=1,2,\cdots,n)$，使

$$\varphi_i(x)=\sum_{m=1}^{n} \varphi_{i,m}(x), \tag{3.10}$$

$$K\varphi_i(x)=\sum_{m=1}^{n} K\varphi_{i,m}(x). \tag{3.11}$$

由于K映$T(o, r; E_{M_1})$入$L^*_{M_2}$全连续，故$\{K\varphi_{i,1}(x)\}$有收

敛子列$\{K\varphi_{j,1}(x)\}$.同理，$\{K\varphi_{j,2}(x)\}$也存在收敛子列$\{K\varphi_{k,2}(x)\}$。依次类推.最后，$\{K\varphi_{r,m}(x)\}$中也存在收敛子列$\{K\varphi_{s,m}(x)\}$。由(3.11)式即知，$\{K\varphi_s(x)\}$是$\{K\varphi_i(x)\}$的收敛子列.

因此K是映$T(\theta,\frac{r}{b+\varepsilon_0};E_{M_1})$入$L^*_{M_2}$的紧算子.

设$\varphi_i(x),\varphi_0(x)\in T(\theta,\frac{r}{b+\varepsilon_0};E_{M_1}),\|\varphi_i-\varphi_0\|_{M_1}\to 0$

$(i\to\infty)$。不失一般性，可设对一切i，$\|\varphi_i-\varphi_0\|<\frac{\varepsilon_0 r}{b+\varepsilon_0}$。把$G$分成$n$个互不相交的子集$G_1,G_2,\cdots,G_n$之并，使

$$\|\varphi_0(x)\kappa(x;G_m)\|_{M_1}\leqslant\frac{br}{b+\varepsilon_0}\quad(m=1,2,\cdots,n).$$

则对每一个i及$m=1,2,\cdots,n$，有

$$\begin{aligned}\|\varphi_i(x)\kappa(x;G_m)\|_{M_1}&\leqslant\|(\varphi_i(x)-\varphi_0(x))\kappa(x;G_m)\|_{M_1}\\&+\|\varphi_0(x)\kappa(x;G_m)\|_{M_1}\leqslant\|\varphi_i-\varphi_0\|_{M_1}\\&+\|\varphi_0(x)\kappa(x;G_m)\|_{M_1}<r.\end{aligned}$$

于是，若令$\varphi_{i,m}(x)=\varphi_i(x)\kappa(x;G_m)$，则$\varphi_{i,m}(x)\in T(\theta,r;E_{M_1})$。因为$k(x,y,0)\equiv 0$，故

$$K\varphi_i(x)=\sum_{m=1}^{n}K\varphi_{i,m}(x)\quad(i=0,1,2,\cdots).\tag{3.12}$$

因为当$i\to\infty$时，有

$$\|\varphi_{i,m}-\varphi_{0,m}\|_{M_1}\leqslant\|\varphi_i-\varphi_0\|_{M_1}\to 0,$$

故由K映$T(\theta,r;E_{M_1})$入$L^*_{M_2}$连续知

$$\lim_{i\to\infty}\|K\varphi_{i,m}-K\varphi_{0,m}\|_{M_2}=0,\quad m=1,2,\cdots,n.$$

故由(3.12)式知$\lim\limits_{i\to\infty}\|K\varphi_i-K\varphi_0\|_{M_2}=0$. 所以$K$映$T\left(\theta,\dfrac{r}{b+\varepsilon_0};E_{M_1}\right)$入$L^*_{M_2}$连续. 综上所述知，$K$映$T\left(\theta,\dfrac{\varepsilon}{b+\varepsilon_0};E_{M_1}\right)$入$L^*_{M_2}$并且全连续.

用同样的方法，由K映$T\left(\theta,\dfrac{r}{b+\varepsilon_0};E_{M_1}\right)$入$L^*_{M_2}$全连续，可以推出$K$映$T\left(\theta,\dfrac{r}{(b+\varepsilon_0)^2};E_{M_1}\right)$入$L^*_{M_2}$并且全连续. 依次类推，即可知道对每一个自然数$j$，$K$都映$T\left(\theta,\dfrac{r}{(b+\varepsilon_0)^j};E_{M_1}\right)$入$L^*_{M_2}$并且全连续. 由于$\lim\limits_{j\to\infty}\dfrac{r}{(b+\varepsilon_0)^j}=+\infty$，故可知$K$映$E_{M_1}$入$L^*_{M_2}$并且全连续. 于是，在$k(x,y,0)\equiv 0$的假设下，定理的结论正确.

对于一般情况，可令$k_1(x,y,u)=k(x,y,u)-k(x,y,0)$,

$$K_1\varphi(x)=\int_G k_1(x,y,\varphi(y))dy.$$

显然K_1映$T(\theta,r;E^*_{M_1})$入$L^*_{M_2}$全连续. 根据前面已经证过的结论可知K_1映E_{M_1}入$L^*_{M_2}$全连续. 从而K映E_{M_1}入$L^*_{M_2}$并且全连续. 证完.

推论3.4 设$N_1(v)$如定理3.3所述，并且存在$r>0$，使K映$T(\theta,r;E_{M_1})$入E_{M_2}全连续，则K映E_{M_1}入E_{M_2}并且全连

续。

证 证明同定理3.3完全相仿。只需注意到若K映$T(\theta,r;E_{M_1})$入E_{M_2}，则(3.9)式中的诸$K\varphi_m(x)$都属于E_{M_2}，故$K\varphi(x)\in E_{M_2}$。证完。

定理3.5 设$T(\theta,r;L^*_{M_1})=\{\varphi\in L^*_{M_1}\mid\|\varphi\|_{M_1}<r\}$。如果

$$\lim_{\substack{\mathrm{mes}D\to 0\\(D\subset G\times G)}}\sup_{\varphi(x)\in T(\theta,r;L^*_{M_1})}\left\|\int_G|k(x,y,\varphi(y))|\kappa(x,y;D)dy\right\|_{M_2}=0. \tag{3.13}$$

则K映$T(\theta,r;L^*_{M_1})$入$L^*_{M_2}$并且全连续。

证 我们首先证明，如果$k(x,y,u)$满足：存在$d>0$，使对任给$(x,y)\in G\times G$，$u\in R^1$，都有

$$|k(x,y,u)|\leqslant d, \tag{3.14}$$

并且存在$u_0>0$，使当$|u|\geqslant u_0$时

$$k(x,y,u)\equiv 0, \tag{3.15}$$

则K映$T(\theta,r;L^*_{M_1})$入$L^*_{M_2}$并且全连续。事实上，根据引理2.1，对每一个自然数n，都存在$G\times G$的闭子集D_n，使$\mathrm{mes}((G\times G)\backslash D_n)<\frac{1}{n}$，并且$k(x,y,u)$在$D_n\times R^1$上连续。根据Tietze 扩张定理（见江泽涵〔1〕）存在$k_n(x,y,u)$：$G\times G\times R^1\to R^1$，使得$k_n(x,y,u)$在$G\times G\times R^1$上连续，在$D_n\times R^1$上$k_n(x,y,u)=k(x,y,u)$，并且

$$|k_n(x,y,u)|\leqslant d\quad((x,y)\in G\times G,u\in R^1), \tag{3.16}$$
$$k_n(x,y,u)\equiv 0\quad(|u|\geqslant u_0).$$

定义

$$K_n\varphi(x)=\int_G k_n(x,y,\varphi(y))dy.$$

令$E_n=(G\times G)\backslash D_n$,则显然有

$$|K\varphi(x)-K_n\varphi(x)|\leqslant 2d\int_G \kappa(x,y;E_n)dy. \qquad (3.17)$$

任取$\psi(x)\in L_{N_2}$,使$\int_G N_2[\psi(x)]dx\leqslant 1$. 令 $h=\min\left\{1,\frac{1}{\text{mes}G}\right\}$,则

$$\int_G\int_G N_2[h\psi(x)]dxdy\leqslant h\int_G\int_G N_2[\psi(x)]dxdy$$

$$\leqslant h\int_G dy\leqslant 1.$$

因此,

$$\int_G|\psi(x)|dx\int_G \kappa(x,y;E_n)dy=\int_G\int_G|\psi(x)|\kappa(x,y;E_n)dxdy$$

$$=\frac{1}{h}\int_G\int_G \kappa(x,y;E_n)|h\psi(x)|dxdy$$

$$\leqslant\frac{1}{h}\|\kappa(x,y;E_n)\|_{\hat{M}_2},$$

其中$\|\cdot\|_{\hat{M}_2}$表示空间$\widehat{L}^*_{M_2}=L^*_{M_2}(G\times G)$中的范数. 在上式两端对$\left\{\psi(x)\in L_{N_2}\Big|\int_G N_2[\psi(x)]dx\leqslant 1\right\}$取上确界,即得

$$\left\| \int_G \kappa(x,y;E_n)dy \right\|_{M_2} \leqslant \frac{1}{h} \|\kappa(x,y;E_n)\|_{\hat{M}_2}. \qquad (3.18)$$

由(3.17)、(3.18)两式可得

$$\|K\varphi(x)-K_n\varphi(x)\|_{M_2} \leqslant \frac{2d}{h} \|\kappa(x,y;E_n)\|_{\hat{M}_2}.$$

因此,

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\varphi(x)\in T(\theta,r;L^*_{M_1})} \|K\varphi(x)-K_n\varphi(x)\|_{M_2}=0.$$

这表明，K可以用K_n一致逼近，显然，对每一个n，K_n都把$T(\theta,r;L^*_{M_1})$映为一致有界的等度连续函数族. 这个函数族在$C(G)$中是列紧的，从而在$L^*_{M_2}$中也是列紧的. 所以K_n是映$T(\theta,r;L^*_{M_1})$入$L^*_{M_2}$的紧算子. 另一方面，设$\varphi_i(x)$，$\varphi_0(x)\in T(\theta,r;L^*_{M_1})$，$\|\varphi_i-\varphi_0\|_{M_1}\to 0$. 则$\varphi_i(x)$依测度收敛于$\varphi_0(x)$. 根据引理2.3，对每固定的$n$及确定的$x\in G$，$k_n(x,y,\varphi_i(y))$依测度收敛于$k_n(x,y,\varphi_0(y))$. 根据积分号下取极限的Lebesgue控制收敛定理（注意(3.16)式），有

$$\lim_{i\to\infty} K_n\varphi_i(x)=\lim_{i\to\infty}\int_G k_n(x,y,\varphi_i(y))dy$$

$$=\int_G k_n(x,y,\varphi_0(y))dy=K_n\varphi_0(x).$$

因为$K_n\varphi_i(x)$在$C(G)$中是列紧的，故$K_n\varphi_i(x)$一致收敛于$K_n\varphi_0(x)(i\to\infty)$. 从而

$$\lim_{i\to\infty}\|K_n\varphi_i(x)-K_n\varphi_0(x)\|_{M_2}=0,$$

即K_n是连续的. 因此, K_n是映$T(\theta,r;L^*_{M_1})$入$L^*_{M_2}$的全连续算子. 由于K在$T(\theta;r;L^*_{M_1})$上可以用K_n一致逼近, 所以K映$T(\theta,r;L^*_{M_1})$入$L^*_{M_2}$全连续.

其次证明, 如果$k(x,y,u)$满足(3.13)式, 并且存在$G\times G$的闭子集D_0, 使$k(x,y,u)$在$D_0\times R^1$上连续, 而当$(x,y)\overline{\in}D_0$时$k(x,y,u)\equiv 0$. 则K映$T(\theta,r;L^*_{M_1})$入$L^*_{M_2}$全连续. 事实上, 对每一个自然数n, 令

$$k_n(x,y,u)=\begin{cases} k(x,y,u), & \text{当}|u|\leqslant n\text{时},\\ k(x,y,n)(n+1-u), & \text{当}n<u<n+1\text{时},\\ k(x,y,-n)(n+1+u), & \text{当}-n-1<n<-n\text{时},\\ 0, & \text{当}|u|\geqslant n+1\text{时}; \end{cases}\tag{3.19}$$

$$K_n\varphi(x)=\int_G k_n(x,y,\varphi(y))dy.$$

则由上一段所证明的结论可知K_n映$T(\theta,r;L^*_{M_1})$入$L^*_{M_2}$并且全连续. 任意取定$\varphi(x)\in T(\theta,r;L^*_{M_1})$, 令$G_n=\{x\in G\,|\,\varphi(x)>n\}$, 则

$$\mathrm{mes}G_n\leqslant\left[M_1\left(\frac{n}{r}\right)\right]^{-1}\int_G M_1\left[\frac{\varphi(x)}{r}\right]dx\leqslant\left[M_1\left(\frac{n}{r}\right)\right]^{-1},$$

即$\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{mes}G_n=0$. 令$\varphi_n(x)=n\kappa(x;G_n)\mathrm{sign}\varphi(x)$, 则显然有$|\varphi_n(x)|\leqslant|\varphi(x)|$. 因此, $\|\varphi_n\|_{M_1}\leqslant\|\varphi\|_{M_1}$, 即$\varphi_n(x)\in T(\theta,r;$

$L^*_{M_1}$)。由(3.19)式易知，当$y\in G_n$时，$|k_n(x,y,\varphi(y))|\leqslant|k(x,y,\varphi_n(y))|$，故

$$
\begin{aligned}
|K\varphi(x)-K_n\varphi(x)| &\leqslant \int_G |k(x,y,\varphi(y))-k_n(x,y,\varphi(y))|dy \\
&\leqslant \int_{G_n}|k(x,y,\varphi(y))|dy+\int_{G_n}|k(x,y,\varphi_n(y))|dy \\
&= \int_G |k(x,y,\varphi(y))|\kappa(x,y;G\times G_n)dy \\
&+ \int_G |k(x,y,\varphi_n(y))|\kappa(x,y;G\times G_n)dy. \qquad (3.20)
\end{aligned}
$$

由于$\lim\limits_{n\to\infty}\text{mes}G_n=0$，故$\lim\limits_{n\to\infty}\text{mes}(G\times G_n)=0$。因此，由(3.20)(3.13)式即知

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{\varphi(x)\in T(\theta,r;L^*_{M_1})}\|K\varphi-K_n\varphi\|_{M_2}=0. \qquad (3.21)$$

所以在$T(\theta,r;L^*_{M_1})$上，K可以用K_n一致逼近。注意到K_n映$T(\theta,r;L^*_{M_1})$入$L^*_{M_2}$全连续，故K映$T(\theta,r;L^*_{M_1})$入$L^*_{M_2}$并且全连续.

最后证明定理的结论。根据引理2.1，对每一个自然数n，都存在$G\times G$的闭子集D_n，使得$\text{mes}((G\times G)\setminus D_n)<\frac{1}{n}$，并且$k(x,y,u)$在$D_n\times R^1$上是连续的。

定义

$$k_n(x,y,u)=\begin{cases}k(x,y,u), & 若(x,y)\in D_n,\\ 0, & 若(x,y)\overline{\in} D_n;\end{cases}$$

$$K_n\varphi(x)=\int_G k_n(x,y,\varphi(y))dy.$$

根据上一段中所证明的结论，K_n映$T(\theta,r;L^*_{M_1})$入$L^*_{M_2}$并且全连续．又显然，

$$|K\varphi(x)-K_n\varphi(x)|$$
$$\leqslant\int_G|k(x,y,\varphi(y))|\kappa(x,y;(G\times G)\backslash D_n)dy.$$

注意到$\lim\limits_{n\to\infty}\text{mes}((G\times G)\backslash D_n)=0$，故由(3.13)式知，$K$在$T(\theta,r;L^*_{M_1})$上可以用$K_n$一致逼近．因此，$K$映$T(\theta,r;L^*_{M_1})$入$L^*_{M_2}$并且全连续．证完．

定理3.6 如果

$$\lim_{\substack{\text{mes}D\to0\\(D\subset G\times G)}}\sup_{\varphi(x)\in T(\theta,r;E_{M_1})}\left\|\int_G|k(x,y,\varphi(y))|\kappa(x,y;D)dy\right\|_{M_2}$$
$$=0,\tag{3.22}$$

则K映$T(\theta,r;E_{M_1})$入$L^*_{M_2}$并且全连续．

证 由定理3.5的证明，即知定理3.6的结论正确．证完．

推论3.7 (i)如果

$$\lim_{\substack{\text{mes}D\to0\\(D\subset G\times G)}}\sup_{\varphi(x)\in T(\theta,r;L^*_{M_1})}\|k(x,y,\varphi(y))\kappa(x,y;D)\|_{\hat{M}_2}=0,\tag{3.23}$$

则K映$T(\theta,r;L^*_{M_1})$入$L^*_{M_2}$并且全连续．

(ii) 如果

$$\lim_{\substack{\text{mes}D\to 0\\(D\subset G\times G)}}\ \sup_{\varphi(x)\in T(\theta,r;E_{M_1})}\|k(x,y,\varphi(y))\kappa(x,y;D)\|^{\wedge}_{M_2}=0,$$

(3.24)

则K映$T(\theta,r;E_{M_1})$入$L^*_{M_2}$并且全连续.

证 仿(3.18)式的证明可以证得

$$\left\|\int_G|k(x,y,\varphi(y))|\kappa(x,y;D)dy\right\|_{M_2}$$

$$\leqslant\frac{1}{h}\|K(x,y,\varphi(y))\kappa(x,y;D)\|^{\wedge}_{M_2}$$

所以，由(3.23)式可以推出(3.13)式；由(3.24)式。可以推出(3.22)式. 根据定理3.5和定理3.6可知，推论3.7的结论成立. 证完

推论3.8 设$M(u)$和$N(v)$是互余的N函数，$N(v)$满足$\triangle'$条件，$k(x,y,u)$满足

$$|k(x,y,u)|\leqslant b(x,y)[a(y)+R(|u|)]$$
$$(x\in G,y\in G,u\in R^1),\tag{3.25}$$

其中$b(x,y)\in\hat{E}_M=E_M(G\times G)$，$a(x)\in L^*_N$，$R(u)$当$u\geqslant 0$时是非负的增函数. 又设存在$\alpha>0$，$\beta>0$，$r>0$以及$u_0>0$，使当$u\geqslant u_0$时

$$N[\beta R(ru)]\leqslant\alpha M(u).\tag{3.26}$$

则K映$T(\theta,r;L^*_\Phi)$入L^*_Φ并且全连续，其中Φ是一个N函数，并且存在$u_1>0$，使当$u\geqslant u_1$时

$$N[\beta R(ru)]\leqslant\alpha\Phi(u)\leqslant\alpha M(u).\tag{3.27}$$

证 根据定理1.21可知

88.003 五乙

$$B\psi(x)=\int_G b(x,y)\psi(y)dy$$

是映L_N^*入L_Φ^*的有界线性算子，并且

$$\|B\|\leqslant l\|b(x,y)\|_M^\wedge \tag{3.28}$$

这里，$\|\cdot\|_M^\wedge$表示$\hat{L}_M^*=L_M^*(G\times G)$中的范数，$l$是一个与$b(x,y)$无关的常数．由(3.27)式可知，对$\varphi(x)\in T(\theta,r;L_\Phi^*)$，有

$$\|a(x)+R(|\varphi(x)|)\|_N\leqslant\|a(x)\|_N+\|R(|\varphi(x)|)\|_N$$

$$\leqslant\|a(x)\|_N+\frac{1}{\beta}\left\{1+\int_G N[\beta R(|\varphi(x)|)]dx\right\}$$

$$\leqslant\|a(x)\|_N+\frac{1}{\beta}\{1+N[\beta R(ru_1)]\mathrm{mes}G$$

$$+\int_G\alpha\Phi[\frac{\varphi(x)}{r}]dx\}$$

$$\leqslant\|a(x)\|_N+\frac{1}{\beta}\{1+N[\beta R(ru_1)]\mathrm{mes}G+\alpha\}$$

$$=c=\mathrm{const}. \tag{3.29}$$

另一方面，由(3.25)式可知，对任给$D\subset G\times G$，有

$$\int_G|k(x,y,\varphi(y))|\kappa(x,y;D)dy$$

$$\leqslant\int_G b(x,y)\kappa(x,y;D)[a(y)+R(|\varphi(y)|)]dy.$$

所以，利用(3.28)、(3.29)两式，可以得到

$$\sup_{\varphi(x)\in T(\theta,r;L_\Phi^*)}\left\|\int_G|k(x,y,\varphi(y))|\kappa(x,y;D)dy\right\|_\Phi$$

$$\leqslant lc\|b(x,y)\kappa(x,y;D)\|_M^\wedge. \tag{3.30}$$

又因为$b(x,y)\in\widehat{E}_M$,故它具有绝对连续的范数．于是，由(3.30)式知(3.13)式成立（其中取$M_1=M_2=\Phi$）．根据定理3.5，K映$T(\theta,r;L_\Phi^*)$入L_Φ^*并且全连续．证完．

定理3.9 设$N_1(v)$满足引理3.1的条件．又设存在$r>0$，使

$$\lim_{\substack{\text{mes}D\to 0\\ D\subset G\times G}}\sup_{\varphi(x)\in T(\theta,r;E_{M_1})}\left\|\int_G|k(x,y,\varphi(y))|\kappa(x,y;D)dy\right\|_{M_2}$$
$$=0. \tag{3.31}$$

则K映E_{M_1}入$L_{M_2}^*$并且全连续．

证 由定理3.3和定理3.6推出．证完．

推论3.10 设$k(x,y,u)$满足

$$|k(x,y,u)|\leqslant R(x,y)(a+b|u|^\alpha) \tag{3.32}$$

其中$a>0$,$b>0$,$\alpha>0$,$\int_G\int_G[R(x,y)]^{\alpha+1}dxdy<+\infty$．则$K$映$L_p$入$L_p$并且全连续，这里$p=\alpha+1$．

证 取$M_1(u)=M_2(u)=\frac{1}{p}|u|^p$，则$N_1(v)=N_2(v)=\frac{1}{q}|v|^q$，这里$p^{-1}+q^{-1}=1$;$E_{M_1}=L_{M_2}^*=L_p$．显然$N_1(v)$满足引理3.1的条件．给定某$r>0$．任取$\varphi(x)\in T(\theta,r;L_p)$,则由(3.32)式，知对任给$D\subset G\times G$，有

$$\int_G|k(x,y,\varphi(y))|\kappa(x,y;D)dy$$

$$\leqslant\int_G R(x,y)\kappa(x,y;D)(a+b|\varphi(y)|^\alpha)dy$$

$$\leqslant\left\{\int_G [R(x,y)]^p \kappa(x,y;D)dy\right\}^{\frac{1}{p}}$$

$$\cdot\left\{\int_G [a+b|\varphi(y)|^a]^{\frac{1+a}{a}} dy\right\}^{\frac{a}{1+a}}. \qquad (3.33)$$

根据不等式$(m+n)^r\leqslant 2^r(m^r+n^r)(m\geqslant 0,n\geqslant 0,r\geqslant 1)$可知

$$\left\{\int_G [a+b|\varphi(y)|^a]^{\frac{1+a}{a}} dy\right\}^{\frac{c}{1+a}}$$

$$\leqslant\left\{\int_G 2^{\frac{1+a}{a}}\left[a^{\frac{1+a}{a}}+b^{\frac{1+a}{a}}|\varphi(y)|^p\right]dy\right\}^{\frac{a}{1+a}}$$

$$\leqslant 2\,(a^{\frac{1+a}{a}}\operatorname{mes}G+b^{\frac{1+a}{a}}r^p)^{\frac{a}{1+a}}=c=\text{const}.$$

所以，由(3.33)式可以得到

$$\sup_{\varphi(x)\in T(\theta,r;\,L_p)}\left\{\int_G\left[\int_G|k(x,y,\varphi(y))|\kappa(x,y;D)dy\right]^p dx\right\}^{\frac{1}{p}}$$

$$\leqslant c\left\{\iint_D [R(x,y)]^p dxdy\right\}^{\frac{1}{p}}.$$

从而

$$\lim_{\substack{\operatorname{mes}D\to 0\\(D\subset G\times G)}}\sup_{\varphi(x)\in T(\theta,r;\,L_p)}\left\{\int_G\left[\int_G|\kappa(x,y,\varphi(y))|\kappa(x,y;\right.\right.$$

$$\left.\left.D)dy\right]^p dx\right\}^{\frac{1}{p}}=0.$$

根据定理3.9，K映L_p入L_p并且全连续．证完．

定理3.11 设存在$r>0$，使Немыцкий算子

$$\mathrm{f}\varphi(x,y)=k(x,y,\varphi(x,y)) \qquad (3.34)$$

映$T(\theta,r;\hat{E}_M)$入$\hat{L}^*_{M_2}$（其中$\hat{E}_M=E_M(G\times G)$），并且f在$\theta\in\hat{E}_M$处连续．又设$M_1(u)$真快于$M(u)$．则K映$L^*_{M_1}$入$L^*_{M_2}$并且全连续．

证 首先假定$f\theta=\theta$．根据推论3.7（i），只需证明对任给$r>0$，(3.23)式成立即可．否则，存在$r_0>0$，$\varepsilon_0>0$以及$\varphi_n(x)\in T(\theta,r_0;L^*_{M_1})$，$D_n\in G\times G$，使$\text{mes}D_n\to 0$，并且

$$\|k(x,y,\varphi_n(y))\kappa(x,y;D_n)\|^{\wedge}_{M_2}\geqslant\varepsilon_0\quad(n=1,2,\cdots).$$

注意到$f\theta=\theta$，故$k(x,y,\varphi_n(y))\kappa(x,y;D_n)=k(x,y,\varphi_n(y)\kappa(x,y;D_n))$，从而

$$\|k(x,y,\varphi_n(y)\kappa(x,y;D_n))\|^{\wedge}_{M_2}\geqslant\varepsilon_0\quad(n=1,2,\cdots).\tag{3.35}$$

取$h=\min\left\{1,\dfrac{1}{\text{mes}G}\right\}$，下证

$$\|\varphi_n(y)\|^{\wedge}_{M_1}\leqslant\frac{r_0}{h}\quad(n=1,2,\cdots).\tag{3.36}$$

事实上，若$\psi(xy)$满足$\int_G\int_G N_1[\psi(x,y)]dxdy\leqslant 1$，则由(1.20)式可知

$$\int_G N_1\left[\frac{\int_G|\psi(x,y)|dx}{\text{mes}G}\right]dy$$

$$\leqslant\frac{1}{\text{mes}G}\int_G dy\int_G N_1[\psi(x,y)]dx$$

$$=\frac{1}{\mathrm{mes}G}\int_G\int_G N_1[\psi(x,y)]dxdy\leqslant\frac{1}{\mathrm{mes}G},$$

所以，$\int_G N_1\left[\int_G h|\psi(x,y)|dx\right]dy\leqslant 1$，从而

$$\int_G\int_G|\varphi_n(y)||\psi(x,y)|dxdy$$

$$=\frac{1}{h}\int_G|\varphi_n(y)|\left[\int_G h|\psi(x,y)|dx\right]dy$$

$$\leqslant\frac{1}{h}\|\varphi_n\|_{M_1}<\frac{r_0}{h}.$$

因此，由(1.23)式知(3.36)式成立。

根据定理1.20，由(3.36)式可知，$\{\varphi_n(x)\}$在$\hat{E}_M$中具有等度的绝对连续范数．因此

$$\lim_{n\to\infty}\|\varphi_n(y)\kappa(x,y;D_n)\|_{\hat{M}}=0.$$

又因为f在$\theta\in\hat{E}_M$处是连续的，所以

$$\lim_{n\to\infty}\|k(x,y,\varphi_n(y)\kappa(x,y;D_n))\|_{\hat{M}_2}=0$$

此与(3.35)式矛盾．故当f$\theta=\theta$时定理获证．

现在考察一般情况．令$k_1(x,y,u)=k(x,y,u)-k(x,y,0)$，考察

$$K_1\varphi=\int_G k_1(x,y,\varphi(y))dy,$$

$$\mathrm{f}_1\varphi(x,y)=k_1(x,y,\varphi(x,y)).$$

显然，$\mathrm{f}_1\theta=\theta$，并且$\mathrm{f}_1$在$\theta$处连续．故$K_1$映$L^*_{M_1}$入$L^*_{M_2}$全

连续．为了证明K映$L^*_{M_1}$入$L^*_{M_2}$全连续，只需证明$K\theta\in L^*_{M_2}$．设

$\psi(x)$满足$\int_G N_2[\psi(x)]dx\leqslant 1$，则$\int_G\int_G N_2[h\psi(x)]dxdy\leqslant 1$，

其中$h=\min\left\{1, \frac{1}{\text{mes}G}\right\}$．所以

$$\int_G\left|\int_G k(x,y,0)dy\right||\psi(x)|dx$$

$$\leqslant\frac{1}{h}\int_G\int_G|k(x,y,0)||h\psi(x)|dxdy\leqslant\frac{1}{h}\|f\theta\|^{\wedge}_{M_2}.$$

这表明$K\theta\in L^*_{M_2}$．证完．

注3.12 定理3.11的意义在于它把Урысон积分算子的全连续性归结为Немыцкий的某些性质，从而可以利用§2中关于Немыцкий算子的结论来研究Урысон算子的全连续性．

推论3.13 设存在$a>0$，满足：对任给$\mu>0$，都存在$\gamma>0$，$\rho>0$，$a(x,y)\in L_1(G\times G)$，使得对一切$(x,y)\in G\times G$，u，$v\in R^1$，都有

$$\begin{aligned}&M_2[\mu(k(x,y,u+v)-k(x,y,u))]\\&\quad\leqslant\gamma M(au)+M(\rho v)+a(x,y).\end{aligned}\tag{3.37}$$

设$M_1(u)$真快于$M(u)$．则K映$L^*_{M_1}$入$L^*_{M_2}$全连续．

证 由定理2.15可知，由(3.34)式定义的算子f映$\hat{E}_M$入$\hat{L}^*_M$，并且处处连续．故根据定理3.11，K映$L^*_{M_1}$入$L^*_{M_2}$全连续．

证完．

推论3.14 设存在$\alpha>0$，$\beta>0$，$\gamma>0$及$a(x,y)\in L_1(G\times G)$，使得对一切$(x,y)\in G\times G, u\in R^1$，都有

$$M_2[\beta k(x,y,u)]\leqslant\gamma M(\alpha u)+a(x,y). \qquad (3.38)$$

又设$M_1(u)$真快于$M(u)$，$M_2(u)$满足Δ_2条件．则K映$L_{M_1}^*$入$L_{M_2}^*$全连续．

证 仿定理2.17的证明，可以证得由(3.34)式定义的算子f映$\hat{E}_M$入$\hat{L}_{M_2}^*$，并且处处连续．故根据定理3.11，K映$L_{M_1}^*$入$L_{M_2}^*$全连续．

推论3.15 设$p>1$，$p_2>1$，并且存在$b\geqslant 0$，使对一切$(x,y)\in G\times G$，$u\in R^1$，有

$$|k(x,y,u)|\leqslant a(x,y)+b|u|^{\frac{p}{p_2}} \qquad (3.39)$$

其中$a(x,y)$满足$\int_G\int_G[a(x,y)]^{p_2}dxdy<+\infty$，则对一切$p_1>p$，$K$映$L_{p_1}$入$L_{p_2}$全连续．

证 利用定理2.21及定理3.11即可．证完．

定理3.16 设$k(x,y,u)$在$G\times G\times R'$上连续．设

$$\lim_{\substack{\text{mes}D\to 0\\(D\subset G)}}\ \sup_{\varphi(x)\in T(\theta,r;\,L_{M_1}^*)}\left\|\int_G|k(x,y,\varphi(y))|\kappa(y;D)dy\right\|_{M_2}$$

$$=0, \qquad (3.40)$$

则K映$T(\theta,r;L_{M_1}^*)$入$L_{M_2}^*$全连续．

证 设$k_n(x,y,u)$由(3.19)式定义．令

$$K_n\varphi(x)=\int_G k(x,y,\varphi(y))dy.$$

则由定理3.5的证明过程可知K_n映$T(\theta,r;L^*_{M_1})$入$L^*_{M_2}$全连续。仿(3.21)式的证明可以证得在定理3.16的条件下，(3.21)式仍成立，即在$T(\theta,r;L^*_{M_1})$上，K可以用K_n一致逼近。故K映$T(\theta,r;L^*_{M_1})$入$L^*_{M_2}$全连续。证完。

定理3.17 设$k(x,y,u)$在$G\times G\times R^1$上连续。设

$$\lim_{\substack{\mathrm{mes}D\to 0\\(D\subset G)}}\sup_{\varphi(x)\in T(\theta,r;E_{M_1})}\left\|\int_G|k(x,y,\varphi(y))|\kappa(y;D)dy\right\|_{M_2}=0. \tag{3.41}$$

则K映$T(\theta,r;E_{M_1})$入$L^*_{M_2}$全连续。

证 证明与定理3.16相同。

注3.18 条件(3.40)式和(3.41)式分别比条件(3.13)式和条件(3.22)式要广泛。但是在定理3.16和定理3.17中，要求$k(x,y,u)$连续，而在定理3.5和定理3.6中，没有这一要求。

再考察作用在C空间上的Урысон积分算子。

定理3.19 设G是R^N中的有界闭集。设对一切$x\in G$和几乎一切$y\in G$，$k(x,y,u)$关于u连续，并且对一切$x\in G$，$u\in R^1$，$k(x,y,u)$关于y可测。则Урысон积分算子K映C入自身全连续的充分必要条件是：对任给$a>0$，下列两个关系

$$\int_G\sup_{|u|\leqslant a}|k(x,y,u)|dy<+\infty, \tag{3.42}$$

$$\lim_{\substack{|h|\to 0\\x+h\in G}}\int_G\sup_{|u|\leqslant a}|k(x+h,y,u)-k(x,y,u)|dy=0 \tag{3.43}$$

对一切$x\in G$成立，其中$|h|$表h在R^N中的范数。

上述定理充分性部分的证明见Л.А.Ладыженский〔1〕，

必要性部分的证明见王声望〔1〕.

推论3.20 设$k(x,y,u)$在$G\times G\times R^1$上连续，则Урысон积分算子K映C入自身全连续.

Урысон积分算子的最重要的特殊情况是形如

$$A\varphi(x)=\int_G k(x,y)f(y,\varphi(y))dy \tag{3.44}$$

的积分算子. 这种算子被称为是Hammerstein 积分积分算子.

令$\mathrm{f}\varphi=f(x,\varphi(x))$，$K\varphi=\int_G k(x,y)\varphi(y)dy$，则显然Hammerstein积分算子(3.44)可以表为$A=K\mathrm{f}$的形式.

为了研究Hammerstein积分算子的全连续性，可以利用Урысон积分算子全连续性的判别准则. 但更方便，而且更常用的，是利用下列定理:

定理3.21 设E_1，E_2，E_3是三个Banach空间，f: $E_1\to E_2$是有界的次连续算子（即f是有界算子，并且若$\{\varphi_n\}\subset E_1$，$\varphi_n\to\varphi_0$，就有$\mathrm{f}\varphi_n\xrightarrow{弱}\mathrm{f}\varphi_0$），$K$:$E_2\to E_3$是全连续线性算子. 则Hammerstein积分算子$A=K\mathrm{f}$是映E_1入E_3的全连续算子.

证 由f是有界算子及K的全连续性知A把E_1的有界集映为E_3的相对紧集，故A是紧算子. 设$\{\varphi_n\}\subset E_1$,$\varphi_n\to\varphi_0$. 由于f是次连续算子，故$\mathrm{f}\varphi_n\xrightarrow{弱}\mathrm{f}\varphi_0$. 注意到全连续线性算子$K$把弱收敛序列映为强收敛序列，故$A\varphi_n=K\mathrm{f}\varphi_n\to K\mathrm{f}\varphi_0=A\varphi_0$，即$A$是连续算子. 证完.

定理3.21的意义在于: 利用这一定理，可以把Hammerstein积分算子$A=K\mathrm{f}$全连续性的判别，归结为Немыцкий算子f的有界性和次连续性（特别地，连续性）的判别与线性积

分算子全连续性的判别.

附注 除了定理3.19和定理3.21之外，本节的其它结论，都是郭大钧〔4〕中获得的.

Урысон积分算子的性质，是由П.С.Урысон在〔1〕中首先加以系统研究的，在L_p空间中，Урысон 积分算子的全连续性的一系列判别准则在M.A.Красносельский〔1〕中被证明. 本节的推论3.10就是该文献的主要结果之一. 随后，以M.A.Красносельский 为代表的苏联学者对L_p空间中Урысон积分算子进行了系统的研究(见M.A.Красносельский, П·П·Забрейкс, E.И.Пустыльник, П.E.Соболевский〔1〕).

Orlicz空间中Урысон积分算子的性质，首先在M.A.Красносельский, Я.Б.Рутицкий〔1〕中被研究. 郭大钧在〔4〕中系统地给出了Orlicz空间中Урысон积分算子全连续性的若干一般性判别准则，从而包含了 M.A.Красносельский〔1〕等人的结果作为特殊情况.

对于C空间，Л.А.Ладыженский〔1〕中的主要结论和王声望〔1〕中的结果，恰好给出了在C空间中，Урысон 积分算子是全连续算子的充要条件（见定理3.19).

关于Урысон积分算子的其它讨论，见张上泰〔1〕、〔2〕，冷生明〔2〕，M.Golomb〔1〕,G.Dragoni〔1〕等.

A.Hammerstein〔1〕首先对Hammerstein积分算子进行了系统的讨论. 定理3.21首先被F.Riesz〔1〕，随后又被一系列作者广泛地用来研究Hammerstein积分算子的全连续性.

第三章　非线性积分方程的可解性——变分方法

形如

$$\varphi(x)=\int_G k(x,y)f(y,\varphi(y))dy$$

（其中G是R^N中的某可测集）的积分方程称为Hammerstein型非线性积分方程，$k(x,y)$称为是该方程的核。本章利用变分方法研究具有对称核（即$k(x,y)=k(y,x)$）的Hammetsrein型非线性积分方程的可解性。

如果对称核$k(x,y)$的一切特征值都是正的，则称$k(x,y)$是正定核；如果$k(x,y)$至多有有限个负特征值，则称$k(x,y)$是拟正定核。

§1　线性积分算子的分解

为了用变分方法研究Hammerstein型非线性积分方程理论，需要研究线性积分算子的分解问题。

考察线性积分算子

$$K\varphi=\int_G k(x,y)\varphi(y)dy \tag{1.1}$$

其中G是R^N中的某可测集，$0<\text{mes}G\leqslant+\infty$，$k(x,y)$是$G\times G$上的实对称核。在考察算子$K$的同时，我们还将考察双线性泛函

$$(K\varphi,\psi)=\int_G\int_G k(x,y)\varphi(y)\psi(x)dydx \tag{1.2}$$

和二次泛函

$$J(\varphi)=\int_G\int_G k(x,y)\varphi(y)\varphi(x)dydx \tag{1.3}$$

设K是映L_2入L_2的自共轭全连续线性算子．K的全体特征值记为λ_1，λ_2，…，λ_n，…．下面用$\psi_i(x)$（$\psi_i\in L_2$）表示K的相应于λ_i的规范化特征函数．令

$$K_n\varphi=\sum_{i=1}^{n}\frac{\psi_i(x)}{\lambda_i}\int_G\psi_i(y)\psi(y)dy=\sum_{i=1}^{n}\frac{(\psi_i,\varphi)}{\lambda_i}\psi_i(x), \tag{1.4}$$

$$J_n(\varphi)=(K_n\varphi,\varphi). \tag{1.5}$$

下面总假定$1<q\leqslant 2$，$p^{-1}+q^{-1}=1$，K由(1.1)式定义．

引理1.1 设K是映L_2入L_2的自共轭线性算子，又是映L_q入L_p的有界算子．则对于任给$\varphi,\psi\in L_q$。

$$(K\varphi,\psi)=(K\psi,\varphi); \tag{1.6}$$

并且对任给$\varphi\in L_q$，$\mathrm{grad}J(\varphi)=2K\varphi$．

证 如果$\varphi\in L_2\cap L_q$，$\psi\in L_2\cap L_q$，则由$K:L_2\to L_2$是自共轭线性算子知(1.6)式成立．因为函数集合$L_2\cap L_q$在L_q中是稠密的，K映L_q入L_p连续，故对任给$\varphi\in L_q$，$\psi\in L_q$，(1.6)式成立．

固定$\varphi\in L_q$，下证$\mathrm{grad}J(\varphi)=2K\varphi$．任取$h\in L_q$，则

$$J(\varphi+th)-J(\varphi)=\int_G\int_G k(x,y)[\varphi(y)+th(y)][\varphi(x)+th(x)]dydx-\int_G\int_G k(x,y)\varphi(y)\varphi(x)dydx$$

$$=t\left[\int_G\int_G k(x,y)\varphi(y)h(x)dydx+\int_G\int_G k(x,y)h(y)\varphi(x)dydx\right]+t^2\int_G\int_G k(x,y)h(y)h(x)dydx$$

于是，注意到（1.6），有

$$\lim_{t\to 0}\frac{J(\varphi+th)-J(\varphi)}{t}=(K\varphi,h)+(Kh,\varphi)=2(K\varphi,h),$$

即$\text{grad}J(K\varphi)=2\varphi$.证完.

定理1.2 设K作为映L_2入L_2的算子是自共轭线性算子,作为映L_q入L_p的算子是全连续的.则$J(\varphi):L_q\to R^1$是弱连续的,并且在每一个闭球 $B_r=\{\varphi\in L_q|\,\|\varphi\|\leqslant r\}$ 上达到上确界和下确界.又若对任给$\varphi\in L_q$,$J(\varphi)\geqslant 0$,则$J(\varphi)$在$S_r=\{\varphi\in L_q|\,\|\varphi\|=r\}$上取到它在$B_r$上的上确界;若对任给$\varphi\in L_q$,$J(\varphi)\leqslant 0$,则$J(\varphi)$在$S_r$上取到它在$B_r$上的下确界.

证 由引理1.1知$\text{grad}J(\varphi)=K\varphi$.因为$K:L_q\to L_p$全连续,故由附录定理3.7知$J(\varphi)$是弱连续的.又因为$L_q$是自反空间,$B_r$是$L_q$中的有界凸闭集,故由附录定理3.4知$J(\varphi)$必在$B_r$上达到上确界和下确界.由$J(\mu(\varphi)=\mu^2J(\varphi)$,易知定理的其余论断成立.证完.

设$J_n(\varphi)$如(4.5)式定义.

引理1.3 设$\text{mes}G<+\infty$.设K是映L_2入L_2的拟正定自共轭全连续线性算子,又是映L_q入L_p的有界算子.则对任给自然数n及$\varphi\in L_q$,$J_n(\varphi)$有定义.更进一步,必存在自然数n_0,使对任给$n\geqslant n_0$及$\varphi\in L_q$,

$$J_n(\varphi)\leqslant J_{n+1}(\varphi)\leqslant J(\varphi)\qquad(1.7)$$

证 因为$\psi_i(x)$是K的(把K看成映L_2入L_2的算子)特征值,所以$\psi_i(x)\in L_2$.又因为$\text{mes}G<+\infty$,$1<q\leqslant 2$,故$\psi_i(x)\in L_q$.又因为K映L_q入L_p,故$\psi_i=\lambda_iK\psi_i\in L_p$.所以由(1.4)式知$K_n$映$L_q$入$L_p$.故对任给$\varphi\in L_q$,$J_n(\varphi)$有定义.由于$K$是拟正定的,故存在$n_0$,使当$n\geqslant n_0$时$\lambda_n>0$,因此,对任给$\varphi\in L_q$,当$n\geqslant n_0$时,有

$$J_{n+1}(\varphi)-J_n(\varphi)\geqslant\frac{1}{\lambda_{n+1}}(\psi_{n+1},\varphi)^2\geqslant 0 \qquad (1.8)$$

对任给$\varphi\in L_2$，显然当$n\geqslant n_0$时，$J_n(\varphi)\leqslant J(\varphi)$。因为$L_2$在$L_q$中稠密，并且$K_n$及$K$都是映$L_q$入$L_p$的有界线性算子。故当$n\geqslant n_0$时，对任给$\varphi\in L_q$，有

$$J_n(\varphi)\leqslant J(\varphi). \qquad (1.9)$$

由(1.8、(1.9)式，知(1.7)式成立。证完。

引理1.4 设引理1.3的条件满足。则对L_q中的每一个闭球$B_r=\{\varphi\in L_q|\,\|\varphi\|\leqslant r\}$，都存在常数$C>0$，使对一切$n$及任给$\varphi_1\in B_r$，$\varphi_2\in B_r$，有

$$|J_n(\varphi_2)-J_n(\varphi_1)|\leqslant C\|\varphi_2-\varphi_1\|_q \qquad (1.10)$$

证 只需考虑K有无穷多个特征值的情况。先证存在常数$C_0>0$，使对一切$n\geqslant n_0$，$\varphi\in B_r$，都有$\|K_n\varphi\|_p\leqslant C_0$，这里$n_0$如引理1.3所述。设$n\geqslant n_0$取定。任给$\varphi\in B_r$，因为$K_n$映$L_q$入$L_p$，故$K_n\varphi\in L_p$。根据Hahn—Banach延拓定理，必定存在$\omega\in L_q$，$\|\omega\|=1$，使得

$$(K_n\varphi,\omega)=\|K_n\varphi\|_p$$

由（1.4）式及柯西不等式，并利用引理1.3，可得

$$\begin{aligned}\|K_n\varphi\|_p&=(K_n\varphi,\omega)=\sum_{i=1}^{n}\frac{(\psi_i,\varphi)(\psi_i,\omega)}{\lambda_i}\\
&\leqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{|(\psi_i,\varphi)|}{\sqrt{|\lambda_i|}}\cdot\frac{|(\psi_i,\omega)|}{\sqrt{|\lambda_i|}}\\
&\leqslant\Big(\sum_{i=1}^{n}\frac{(\psi_i,\varphi)^2}{|\lambda_i|}\Big)^{\frac12}\cdot\Big(\sum_{i=1}^{n}\frac{(\psi_i,\omega)^2}{|\lambda_i|}\Big)^{\frac12}\\
&\leqslant\Big(J(\varphi)+2\sum_{\lambda_i<0}\frac{(\psi_i,\varphi)^2}{|\lambda_i|}\Big)^{\frac12}\cdot\Big(J_n(\omega)+2\sum_{\lambda_i<0}\frac{(\psi_i,\omega)^2}{|\lambda_i|}\Big)^{\frac12}\end{aligned}$$

$$\leqslant\left(J(\varphi)+2\sum_{\lambda_i<0}\frac{(\psi_i,\varphi)^2}{|\lambda_i|}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(J(\omega)+2\sum_{\lambda_i<0}\frac{(\psi_i,\omega)^2}{|\lambda_i|}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{1.11}$$

因为K是映L_q入L_p的有界线性算子，故

$$|J(\varphi)|=|(K\varphi,\varphi)|\leqslant\|K\|\|\varphi\|\|\varphi\|\leqslant\|K\|r^2,$$

$$|J(\omega)|=|K\omega,\omega)|\leqslant\|K\|\|\omega\|\|\omega\|=\|K\|.$$

另一方面，注意到K仅有有限个负特征值，故

$$2\sum_{\lambda_i<0}\frac{(\psi_i,\varphi)^2}{|\lambda_i|}\leqslant 2r^2\sum_{\lambda_i<0}\frac{\|\psi_i\|_p^2}{|\lambda_i|}=b_1<+\infty,$$

$$2\sum_{\lambda_i<0}\frac{(\psi_i,\omega)}{|\lambda_i|}\leqslant 2\sum_{\lambda_i<0}\frac{\|\psi_i\|_p^2}{|\lambda_i|}=b_2<+\infty.$$

因此，由(1.11)式，可以得到

$$\|K_n\varphi\|_p\leqslant(\|K\|r^2+b_1)^{\frac{1}{2}}(\|K\|+b_2)^{\frac{1}{2}}.$$

因此，若取$C_0=(\|K\|r^2+b_1)^{\frac{1}{2}}(\|K\|+b_2)^{\frac{1}{2}}$，则对一切$n\geqslant n_0$，$\varphi\in B_r$，都有$\|K_n\varphi\|_p\leqslant C_0$。

对$1\leqslant i\leqslant n_0-1$，令$C_i=\sup\limits_{\varphi\in B_r}\|K_i\varphi\|$，取$C=2\max\{C_0,$ $C_1, \cdots, C_{n_0-1}\}$。显然$C<+\infty$，并且对一切n及$\varphi\in B_r$，都有

$$\|K_n\varphi\|_p\leqslant\frac{1}{2}C. \tag{1.12}$$

仿引理1.1的证明，可知$\operatorname{grad}J_n\varphi=2K_n\varphi$.故由附录(1.2)式可知存在$0<\tau<1$，使

$$|J_n(\varphi_2)-J_n(\varphi_1)|=|(2K_n(\varphi_1+\tau(\varphi_2-\varphi_1)),\varphi_2-\varphi_1)|$$
$$\leqslant 2\|K_n(\varphi_1+\tau(\varphi_2-\varphi_1))\|\|\varphi_2-\varphi_1\|\leqslant C\|\varphi_2-\varphi_1\|.$$

证完。

定理1.5 设引理1.3的条件成立．则对每一个$\varphi\in L_q$，

$$\lim_{n\to\infty}J_n(\varphi)=J(\varphi). \tag{1.13}$$

证 由引理1.3知对每一个$\varphi\in L_q$，极限

$$l(\varphi)=\lim_{n\to\infty}J_n(\varphi) \tag{1.14}$$

存在且有限．由第一章定理4.24知对$\varphi\in L_2$，$\lim\limits_{n\to\infty}J_n(\varphi)=J(\varphi)$

由于L_2在L_q中稠密，J在L_q中连续，故我们只需证明$l(\varphi)$在L_q中连续即可．取$\varphi_0\in L_q$固定．任给$\varepsilon>0$，令

$$\delta=\min\left\{\frac{\varepsilon}{3C}\cdot r\right\},$$

其中，$r=2\|\varphi_0\|$，C是引理1.4中所述的对应于r的常数，则当$\varphi\in L_q$，$\|\varphi-\varphi_0\|<\delta$时

$$|l(\varphi)-l(\varphi_0|\leqslant|l(\varphi)-J_n(\varphi)|+|J_n(\varphi)-J_n(\varphi_0)|$$
$$+|J_n(\varphi_0)-L(\varphi_0)|.$$

由引理1．4知 $|J_n(\varphi)-J_n(\varphi_0)|\leqslant C\|\varphi-\varphi_0\|\leqslant\frac{\varepsilon}{3}$．由(1.14)知

可取n充分大，使$|l(\varphi)-J_n(\varphi)|<\frac{\varepsilon}{3}$，$|J_n(\varphi_0)-l(\varphi_0)|<\frac{\varepsilon}{3}$．因此，$|l(\varphi)-l(\varphi_0)|<\varepsilon$．由$\varepsilon$的任意性知$l(\varphi)$在$\varphi_0$处连续．因为$\varphi_0\in L_q$是任取的，故$l(\varphi)$在$L_q$上连续．证完．

定理1.6 设K是映L_2入L_2的拟正定自共轭全连续线性算子，并且映L_q入L_p全连续．令$B_r=\{\varphi|\varphi\in L_q,\ \|\varphi\|\leqslant r\}$．则

$$\lim_{n\to\infty}\max_{\varphi\in Br}|J(\varphi)-J_n(\varphi)|=0. \tag{1.15}$$

证 设（1.15）式不成立，则存在$\varepsilon>0$，$\{n\}$的某子列$\{n_i\}$（不失一般可设诸n_i均大于n_0，n_0如引理1.3所述）及$\varphi_{r_i}\in B_r$，使

$$J(\varphi_{n_i})-J_{n_i}(\varphi_{n_i})\geqslant\varepsilon \tag{1.16}$$

（注意(1.7)式）．因为L_q是自反空间，B_r是L_q中的有界凸闭集，故存在$\{\varphi_{n_i}\}$的一个子列，不失一般，可以假定就是$\{\varphi_{n_i}\}$本身弱收敛于某$\varphi_0\in B_r$．由(1.7)式知，对任给$n\leqslant n_i$，

$$J(\varphi_{n_i})-J_n(\varphi_{n_i})\geqslant\varepsilon$$

因此，对任给i_0，当$i\geqslant i_0$时

$$J(\varphi_{n_i})-J_{n_{i_0}}(\varphi_{n_i})\geqslant\varepsilon.$$

根据定理1.2可知，$J(\varphi)$和$J_{n_{i_0}}(\varphi)$都是弱连续的．注意到φ_{n_i}弱收敛到φ_0，故

$$J(\varphi_0)-J_{n_{i_0}}(\varphi_0)\geqslant\varepsilon$$

但另一方面，根据定理1.5，

$$\lim_{i_0\to\infty}J_{n_{i_0}}=J\ (\varphi_0)$$

产生矛盾．因此（1.15）式成立．定理证完．

在做了以上准备之后，下面讨论线性积分算子的分解问题．

设mes$G<+\infty$．设由（1.1）式定义的线性积分算子K是映L_2入L_2的自共轭拟正定全连续算子，根据Hilbert空间自共轭算子的谱分解定理，K可以表为

$$K\varphi=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(\psi_i,\varphi)}{\lambda_i}\psi_i(x)\ . \tag{1.17}$$

定义K的本质平方根$K^{\frac{1}{2}}$如下：

$$K^{\frac{1}{2}}\varphi=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(\psi_i,\varphi)e_i}{\sqrt{|\lambda_i|}}\psi_i(x) \tag{1.18}$$

其中$e_i = \mathrm{sign}\lambda_i$。

对任给$\xi = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n, \cdots) \in L_2$，定义

$$\omega(x;\xi) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\xi_i e_i}{\sqrt{|\lambda_i|}} \psi_i(x). \tag{1.19}$$

显然，若$\varphi \in L_2$，则$\sum_{i=1}^{\infty} (\psi_i, \varphi)^2 = \|\varphi\|^2 < +\infty$。因此若令$\xi_i(\varphi) = (\psi_i, \varphi)$，$\xi(\varphi) = (\xi_1(\varphi), \xi_2(\varphi), \cdots, \xi_i(\varphi), \cdots)$，则$\xi(\varphi) \in l_2$。故由（1.18）、（1.19）式知

$$K^{\frac{1}{2}}\varphi = \omega(x;\xi(\varphi)) \tag{1.20}$$

下面讨论K的本质平方根$K^{\frac{1}{2}}$的某些性质。

引理1.7 设$\mathrm{mes}G < +\infty$，K是映L_2入L_2的拟正定自共轭全连续线性积分算子，并且映L_q入L_p全连续，则任给$\varphi \in L_2$，有$K^{\frac{1}{2}}\varphi \in L_p$。

证 给定$\varphi \in L_2$。若$\varphi = \theta$，则$K^{\frac{1}{2}}\varphi = \theta \in L_p$。故下可设$\varphi \neq \theta$。令

$$\omega_n(x;\xi(\varphi)) = \sum_{i=1}^{n} \frac{(\psi_i, \varphi)\ e_i}{\sqrt{|\lambda_i|}} \psi_i(x). \tag{1.21}$$

任给$\varepsilon > 0$，由定理1.6知存在$N > 0$（不失一般性，可取$N \geq n_0$，n_0如引理1.3所述），使对任给$n \geq N$，$m > 0$ $z(x) \in B_1 = \{z(x) \in L_q \mid \|z(x)\| \leq 1\}$，都有

$$J_{n+m}(z) - J_n(z) \leq \|\varphi\|_p^{-1} \varepsilon^2. \tag{1.22}$$

由K映L_q入L_p及$L_2 \subset L_q$知$\psi_i(x) = \lambda_i K\psi_i \in L_p$，所以$\omega_n(x;\xi(\varphi)) \in L_p$，$\omega_{n+m}(x;\xi(\varphi)) - \omega_n(x;\xi(\varphi)) \in L_p$。根据Hahn－Banach延拓定理知存在$z(x) \in L_q$，$\|z(x)\| = 1$，使

$$\|\omega_{n+m}(x;\xi(\varphi))-\omega_n(x;\xi(\varphi))\|_p=(\omega_{n+m}(x;\xi(\varphi))$$

$$-\omega_n(x;\xi(\varphi)),z(x)) \tag{1.23}$$

由（1.21）式及柯西不等式知

$$(\omega_{n+m}(x;\xi(\varphi))-\omega_n(x;\xi(\varphi)),z(x))$$

$$=\sum_{i=n+1}^{n+m}\frac{(\psi_i,\varphi)e_i}{\sqrt{|\lambda_i|}}(\psi_i,z)$$

$$\leqslant\Big(\sum_{i=n+1}^{n+m}(\psi_i,\varphi)^2\Big)^{\frac{1}{2}}\cdot\Big(\sum_{i=n+1}^{n+m}\frac{(\psi_i,z)^2}{|\lambda_i|}\Big)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant\|\varphi\|_p\Big(\sum_{i=n+1}^{n+m}\frac{(\psi_i,z)^2}{|\lambda_i|}\Big)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.24}$$

注意到当$n\geqslant N\geqslant n_0$时$\lambda_i>0$，故当$n\geqslant N,m>0$时，有

$$\Big(\sum_{i=n+1}^{n+m}\frac{(\psi_i,z)^2}{|\lambda_i|}\Big)^{\frac{1}{2}}=\Big(\sum_{i=n+1}^{n+m}\frac{(\psi_i,z)^2}{\lambda_i}\Big)^{\frac{1}{2}}$$

$$=(J_{n+m}(z)-J_n(z))^{\frac{1}{2}}. \tag{1.25}$$

由（1.23）、（1.24）、（1.25）、及（1.22）式知，当$n\geqslant N$，$m>0$时

$$\|\omega_{n+m}(x;\xi(\varphi))-\omega_n(x;\xi(\varphi))\|_p$$

$$\leqslant\|\varphi\|_p(J_{n+m}(z)-J_n(z))^{\frac{1}{2}}\leqslant\varepsilon \tag{1.26}$$

所以$\{\omega_n(x;\xi(\varphi))\}$是$L_p$中的柯西序列，由于$L_p$是完备的，故$\lim\limits_{n\to\infty}\omega_n(x;\xi(\varphi))=\omega(x;\xi(\varphi))\in L_p$，亦即$K^{\frac{1}{2}}\varphi\in L_p$。证完.

由引理1.7知，（1.18）式定义的算子$K^{\frac{1}{2}}$映L_2入L_p。在下文中，当把$K^{\frac{1}{2}}$看作是映L_2入L_p的算子时，把$K^{\frac{1}{2}}$记作H，即

$$H\varphi=K^{\frac{1}{2}}\varphi. \tag{1.27}$$

于是，H是映L_2入L_p的算子.

定理1.8 设引理1.7的条件成立，则H是映L_2入L_p的全连续线性算子.

证 设$\varphi_k \in L_2(k=1, 2, \cdots)$, $\varphi_0 \in L_2$，并且在L_2中φ_k弱收敛于φ_0。由（1.20）、（1.27）式知

$$H\varphi_k = \omega(x;\xi(\varphi_k)),\quad H\varphi_0 = \omega(x;\xi(\varphi_0)).$$

对$k=0, 1, 2, \cdots$,令

$$\omega_n(x;\xi(\varphi_k)) = \sum_{i=1}^{n} \frac{(\psi_i, \varphi_k)e_i}{\sqrt{|\lambda_i|}}\psi_i(x).$$

则仿（1.26）式的证明可以证得对任给$\varepsilon>0$，存在自然数N，使对一切满足$n\geqslant N, m>0$的自然数m,n，有$\lambda_n>0$，且

$$\|[\omega_{n+m}(x;\xi(\varphi_k)) - \omega_{n+m}(x;\xi(\varphi_0))]$$

$$-[\omega_n(x;\xi(\varphi_k)) - \omega_n(x;\xi(\varphi_0))]\|_p \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \quad (k=1,2,\cdots).$$

因为上式对任意自然数m都成立，故

$$\left\|\sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{(\varphi_k-\varphi_0, \psi_i)e_i}{\sqrt{\lambda_i}}\psi_i(x)\right\|_p \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \quad (k=1,2,\cdots;n\geqslant N) \tag{1.28}$$

另一方面，因为φ_k弱收敛于φ_0，故对一切$i=1, 2, \cdots$,

$$\lim_{k\to\infty}(\varphi_k-\varphi_0, \psi_i) = 0.$$

所以对上述给定之$\varepsilon>0$和N，存在k_0，使当$k\geqslant k_0$时，有

$$\frac{|(\varphi_i-\varphi_0, \psi_i)|}{\sqrt{|\lambda_i|}}\|\psi_i(x)\|_p < \frac{\varepsilon}{2N} \quad (i=1, 2, \cdots, N). \tag{1.29}$$

由（1.28）及（1.29）式可知，当$k\geqslant k_0$时有

$$\|H\varphi_k - H\varphi_0\|_p = \|\omega(x;\xi(\varphi_k)) - \omega(x;\xi(\varphi_0))\|_p$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{N} \frac{|(\varphi_k - \varphi_0, \psi_i)e_i|}{\sqrt{|\lambda_i|}} \|\psi_i\|_p$$

$$+ \left\| \sum_{i=N+1}^{\infty} \frac{(\varphi_k - \varphi_0, \psi_i)e_i}{\sqrt{\lambda_i}} \psi_i(x) \right\|_p$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

故

$$\lim_{k\to\infty} H\varphi_k = H\varphi_0.$$

这表明H把L_2中的任何一个弱收敛序列映成L_p中的收敛序列.由于L_2是自反空间,故H是映L_2入L_p的全连续（线性）算子，证完.

对任给$\psi(x)\in L_q$，定义算子T如下：

$$T\psi = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(\psi_i, \psi)e_i}{\sqrt{|\lambda_i|}} \psi_i(x) \tag{1.30}$$

根据定理1.5，当$\psi\in L_q$时

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(\psi_i, \psi)_2}{|\lambda_i|} < +\infty$$

因此$T\psi\in L_2$. 这表明T是一个映L_q入L_2的算子.

定理1.9 设引理1.7的条件成立，则由（1.30）式定义的算子T是H的共轭算子，即$H^* = T$.因此，T是映L_q入L_2的全连续线性算子

证 由H及T的定义知，对任给$\varphi\in L_2$，$\psi\in L_q$.

$$(H\varphi, \psi) = (\varphi, T\psi).$$

因此，T是H的共轭算子，由定理1.8知H，$L_2\to L_p$是全连续

线性算子，故$T: L_q \to L_2$也是全连续线性算子．证完

根据这一定理，映L_2入L_p的全连续线性算子H的共轭算子H^*可以由下式定义：对任给$\psi \in L_q$，

$$H^*\psi \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(\psi_i, \psi) e_i}{\sqrt{|\lambda_i|}} \psi_i(x) \qquad (1.31)$$

注1.10 检查上述各结论的证明可以知道：在 $\mathrm{mes} G = \infty$的情况下，如果K（把K看作映L_2入L_2的算子）的一切特征函数都属于L_q，则本节上述全部结论仍然成立．

设K是映L_2入L_2的拟正定自共轭全连续线性算子，设$\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_m < 0$是$K$的全体负特征值，$\{\psi_i(x) \mid 1 \leqslant i \leqslant m\}$是相应于$\{\lambda_i \mid 1 \leqslant i \leqslant m\}$的就范特征函数，用$H^{(1)}$表示由$\psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_m$在$L_2$中张成的$m$维子空间，$H^{(2)}$表示$H^{(1)}$在$L_2$中的直交补空间．用$P_1$和$P_2$分别表示由$L_2$到$H^{(1)}$和$H^{(2)}$的投影算子．

定理1.11 设$0 < \mathrm{mes} G \leqslant \infty$*．设$K$是映$L_2$入$L_2$的拟正定自共轭全连续线性积分算子，并且映$L_q$入$L_p$全连续．则当把$K$看作是映$L_q$入$L_p$的算子时，有

$$K = H\ (-P_1 + P_2)\ H^* \qquad (1.32)$$

其中H和H^*分别由（1.27）（1.31）式定义，并且$H: L_2 \to L_p$全连续，$H^*: L_q \to L_2$是H的共轭算子．

证 当$\psi \in L_2$时，直接验证可知$K\psi = H(-P_1 + P_2)H^*\psi$．由定理1.8、定理1.9及注1.10，可知$H(-P_1 + P_2)\ H^*$映$L_q$入$L_p$全连续，注意到$K: L_q \to L_q$连续及$L_2 \cap L_q$在$L_q$中稠密，故对任给$\psi \in L_q$，也有$K\psi = H(-P_1 + P_2)H^*\psi$，即（1.32）式成立，由定理1.8知$H: L_2 \to L_p$连续，证完．

---

*如果$\mathrm{mes} G = +\infty$，则我们假定K（作为映L_2入L_2的算子）的一切特征函数都属于L_q（参见注1.10）．

注1.12 在定理1.11中，如果K是正定算子，则显然$P_1=\phi$，$P_2=I$，从而（1.32）式可以写成

$$K=HH^* \tag{1.33}$$

利用Orlicz空间理论，可以到到下列结果.

定理1.13 设$\mathrm{mes}G<+\infty$. 设线性积分算子K是映L_2入L_2的正定自共轭全连续线性算子. 设N函数$M(u)$快于u^2，并且K是映E_N入L_M^*的全连续线性算子，其中$N(v)$是$M(u)$的余N函数，则存在全连续线性算子$H:L_2\to L_M^*$，使得当把K看成是映E_N入L_M^*的算子时，有

$$K=HH^*, \tag{1.34}$$

这里，$H^*:E_N\to L_2$是H的共轭算子在E_N的限制.

证明见M.A.Красносельский、Я.Б.Рутицкий〔1〕.

附注 关于线性积分算子的分解问题，A. Hammerstein〔1〕和M.Golomb〔1〕就已分别讨论过. L_p空间中线性积分算子分解的若干主要结论是由M.A.красносельский〔2〕、〔3〕和M.M.Вайнберг〔1〕、〔2〕获得的. 本节选自M.M.Вайнберг〔1〕.M.A.Красносельский，П.П.Забрейко，Е.И.Пустыльник和П.Е. Соболевский在其专著〔1〕中，对L_p中线性算子的分解，进行了深入有趣的讨论.

在Orlicz空间中，线性积分算子的分解问题的讨论见M.A.Красносельский和Я.Б.Рутицкий〔1〕

我国学者在这一领域中也获得了某些结果，见陈文嵘〔5〕、吴从炘、王廷辅〔1〕.

关于线性算子分解的其它类型的结论，由F.E.Browder和C.P.Gupta〔1〕获得.

本书将在第四章§2中叙述F.E.Browder和C.P.Gupta的结果.

§2 具有正定核的Hammerstein型非线性积分方程的可解性

本节利用变分方法研究具有正定核的 Hammerstein 型非线性积分方程

$$\varphi(x)=\int_G k(x,y)f(y,\varphi(y))dy=A\varphi \tag{2.1}$$

的可解性，其中G是n维欧氏空间中的一个可测集，$0<\text{mes}G\leqslant+\infty$. 令

$$K\varphi=\int_G k(x,y)\varphi(y)dy. \tag{2.2}$$

在本节中，使用如下假定:

1° $f(x,u)$ 满足Caratheodory条件，并存在$p\geqslant 2$, $a(x)\geqslant 0$, $a(x)\in L_q$ ($p^{-1}+q^{-1}=1$)，使得

$$|f(x,u)|\leqslant a(x)+b|u|^{p-1} \tag{2.3}$$

2° $k(x,y)$ 是正定对称核；由$k(x,y)$确定的线性积分算子K映L_2入L_2全连续，映L_q入L_p全连续；若$\text{mes}G=+\infty$，则我们还假定K（作为映L_2入L_2的算子）的一切特征函数都属于L_q（参见注1.10）.

为了能够利用变分法研究方程（2.1）的解的存在性，需要做某些准备.

由于1°，由$f(x,u)$确定的Немыцкий算子

$$\mathrm{f}\varphi=f(x,\varphi(x)) \tag{2.4}$$

是映L_p入L_q的连续、有界算子（见第二章定理 2.21）对任给φ

$\in L_p$，令

$$\Phi(\varphi)=\int_G dx\int_0^{\varphi(x)} f(x,u)du. \qquad (2.5)$$

引理2.1 设1°成立，则

（i）由（2.5）式定义的$\Phi(\varphi)$在整个L_p上有定义；

（ii）f是梯度算子，并且f=gradΦ.

证 先证（i）.设$\varphi\in L_p$，由积分学中值公式知

$$\int_0^{\varphi(x)} f(x,u)du=f(x,\theta(x)\varphi(x))\varphi(x), \qquad (2.6)$$

其中$0\leqslant\theta(x)\leqslant 1$.若将$\theta(x)$取为满足(2.6)式中的最小者，则仿第二章定理2.5中函数$\varphi_i(x)=\varphi(x;\alpha,\beta,k_i,p_i)$可测性的证明方法，即可证明$\theta(x)$是$G$上的可测函数，因此$\theta(x)\varphi(x)\in L_p$，从而$f(x,\theta(x)\varphi(x))\in L_q$. 所以，$f(x;\theta(x)\varphi(x))\varphi(x)\in L_1$.由(2.6)式知$\Phi(\varphi)$存在.(i)获证.

再证（ii）.事实上，对$h(x)\in L_p$有

$$\frac{1}{t}[\Phi(\varphi+th)-\Phi(\varphi)]=\frac{1}{t}\int_G dx\int_{\varphi(x)}^{\varphi(x)+th(x)} f(x,u)du$$

$$=\frac{1}{t}\int_G f(x,\varphi(x)+t\theta_1(x)h(x))th(x)dx$$

$$=\int_G[f(x,\varphi(x))+t\theta_1(x)h(x))-f(x,\varphi(x))]h(x)dx$$

$$+\int_G f(x,\ \varphi(x))h(x)dx,$$

其中$0\leqslant\theta_1(x)\leqslant 1$是可测函数（只需取$\theta_1(x)$是满足上式中的最小者即可），注意到f的连续性，有

$$\left|\frac{1}{t}[\Phi\ (\varphi+th)-\Phi\ (\varphi)]-\int_G \mathrm{f}\varphi(x)\cdot h(x)dx\right|$$

$$\leqslant \|f(\varphi+t\theta_1 h)-f\varphi\|_q \cdot \|h\|_p.$$

所以

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[\Phi(\varphi+th)-\Phi(\varphi)]=(f\varphi)h,$$

这表明$f=\mathrm{grad}\Phi$.引理证完。

因为2°成立，所以，根据定理1.11及注1.12,K可以表为

$$K=HH^*, \tag{2.7}$$

其中$H=K^{\frac{1}{2}}:L_2\to L_p$是全连续线性算子，$H^*:L_q\to L_2$ 是 H的共轭算子，它也是全连续的.

引理2.2 正定核Hammerstein型非线性积分方程（2.1）在L_p中有解的充分必要条件是方程

$$\psi=H^*fH\psi \tag{2.8}$$

在L_2中有解.

证 若方程（2.1）在L_p中有解φ_0，则$\varphi_0=A\varphi_0=Kf\varphi_0=HH^*f\varphi_0$.所以$H^*f\varphi_0=H^*fH(H^*f\varphi_0)$.这表明$H^*f\varphi_0$是方程（2.8）的解. 显然$H^*f\varphi_0\in L_2$.

若方程(2.8)有解$\psi_0\in L_2$,则$H\psi_0=HH^*fH\psi_0=AH\psi_0$,故$H\psi_0$是方程（2.1）的解.显然$H\psi_0\in L_p$.证完.

设$\Phi(\varphi)$由(2,5)式定义.对$\psi\in L_2$,令

$$\Psi(\psi)=\frac{1}{2}\|\psi\|^2-\Phi(H\psi). \tag{2.9}$$

则根据引理2.1知Ψ在整个L_2上有定义.

引理2.3 设1°,2°成立. 则

$$\mathrm{grad}\Psi=I-H^*fH, \tag{2.10}$$

并且Ψ是L_2上的弱下半连续泛函.

证 根据引理2.1,$\mathrm{grad}\Phi=f$.所以，对于$h\in L_2$,有

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[\Phi(H(\psi+th))-\Phi(H\psi)]$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[\Phi(H\psi+tH\psi)-\Phi(H\psi)]$$

$$=(\mathrm{grad}\Phi(H\psi),Hh)=(\mathfrak{f}H\psi,Hh)$$

$$=(H^*\mathfrak{f}H\psi,h).$$

于是$\mathrm{grad}\Phi(H\psi)=H^*\mathfrak{f}H\psi$.另一方面，对$h\in L_2$，有

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left[\frac{1}{2}\|\psi+th\|^2-\frac{1}{2}\|\psi\|^2\right]$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left[\frac{1}{2}\|\psi\|^2+(\psi,th)+\frac{1}{2}t^2\|h\|^2-\frac{1}{2}\|\psi\|^2\right]$$

$$=\lim_{t\to 0}\left[(\psi,h)+\frac{1}{2}t\|h\|^2\right]=(\psi,h).$$

所以，$\mathrm{grad}\left(\frac{1}{2}\|\psi\|^2\right)=\psi$.因此，$\mathrm{grad}\Psi=I-H^*\mathfrak{f}H$.

因为$\mathrm{grad}\Phi(H\psi)=H^*\mathfrak{f}H\psi$，$H^*\mathfrak{f}H:L_2\to L_2$是全连续算子，故由附录定理3.7知$\Phi(H\psi)$是弱连续泛函.下证$\frac{1}{2}\|\psi\|^2$是弱下半连续的，即若$\psi_n\xrightarrow{弱}\psi_0$，则必有

$$\frac{1}{2}\|\psi_0\|^2\leqslant\varliminf_{n\to\infty}\frac{1}{2}\|\psi_n\|^2. \tag{2.11}$$

用反证法. 设（2.11）式不成立，则$\frac{1}{2}\|\psi_0\|^2>\varliminf_{n\to\infty}\frac{1}{2}\|\psi_n\|^2$.取$c$，使

$$\frac{1}{2}\|\psi_0\|^2>\frac{1}{2}c^2>\varliminf_{n\to\infty}\frac{1}{2}\|\psi_n\|^2 \tag{2.12}$$

则存在$\{\psi_n\}$的子列$\{\psi_{n_k}\}$，使$c>\|\psi_{n_k}\|$（$k=1,2,\cdots$）.由Hahn-Banach定理，存在$l\in L_2$，使$\|l\|=1$，$l(\psi_0)=\|\psi_0\|$.于是

$$|(\psi_{n_\mu})\leqslant\|l\|\|\psi_{n_k}k\|=\|\psi_{n_\mu}\|<c \qquad (k=1,2,\cdots).$$

注意到$\psi_{n_k}\xrightarrow{\text{弱}}\psi_0$，故有

$$\|\psi_0\|=l(\psi_0)=\lim_{k\to\infty}l(\psi_{n_k})\leqslant c.$$

此与(2.12)式矛盾．故(2.11)式成立，即$\frac{1}{2}\|\psi\|^2$是L_2上的弱下半连续泛函．注意到$\Phi(H\psi)$是弱连续的．故Ψ是L_2上的弱下半连续泛函．证完．

利用上述三个引理，立即可以得到：

定理2.4 设条件1°和2°成立．设Ψ由(2.9)式定义．则方程(2.1)在L_p上有解的充分必要条件是ψ在L_2上有临界点．

推论2.5 设条件1°和2°成立．设Ψ由(2.9)式定义．如果Ψ在L_2上强制，即

$$\lim_{\|\psi\|_2\to\infty}\Psi(\psi)=+\infty, \tag{2.13}$$

则方程(2.1)在L_p上必定有解．

下面讨论Hammerstein型非线性积分方程(2.1)解的存在性．

定理2.6 设条件1°和2°成立．又设存在$0<\gamma<2$，$b(x)\in L_{2/\gamma}$，$c(x)\in L$及$0\leqslant a<\lambda_1$（$\lambda_1>0$是K的最小特征值），使

$$\int_0^u f(x,v)dv\leqslant\frac{a}{2}u^2+b(x)|u|^{2-\gamma}+c(x). \tag{2.14}$$

则方程(2.1)在L_p中至少有一个解．

证 根据推论2.5，只需证明(2.13)式成立即可．由(2.14)式知，对$\psi\in L_2$，有

$$\Psi(\psi)=\frac{1}{2}\|\psi\|^2-\int_G dx\int_0^{H\psi}f(x,u)du$$

$$\geqslant\frac{1}{2}\|\psi\|^2-\frac{a}{2}(H\psi,\ H\psi)-\int_G b(x)|H\psi(x)|^{2-\gamma}dx$$

$$-\int_G c(x)dx$$

$$\geqslant\frac{1}{2}\|\psi\|^2-\frac{a}{2}(H\psi,H\psi)-b_1(H\psi,H\psi)^{1-\frac{\gamma}{2}}-c_1$$

$$=\frac{1}{2}\|\psi\|^2-\frac{a}{2}(K\psi,\psi)-b_1(K\psi,\psi)^{1-\frac{\gamma}{2}}-c_1$$

$$\geqslant\frac{1}{2}\|\psi\|^2-\frac{a}{2\lambda_1}\|\psi\|^2-b_1\lambda_1^{\frac{\gamma}{2}-1}\|\psi\|^{1-\frac{\gamma}{2}}-c_1$$

$$=\frac{1}{2}\Big(1-\frac{a}{\lambda_1}\|\psi\|^2-b_1\lambda_1^{\frac{\gamma}{2}-1}\|\psi\|^{1-\frac{\gamma}{2}}-c_1, \qquad (2.15)$$

其中$b_1=\Big(\int_G|b(x)|^{\frac{2}{\gamma}}dx\Big)^{\frac{\gamma}{2}}$，$c_1=\int_G c(x)dx$. 由（2.15）式，知（2.13）式成立. 证完.

推论2.7 设假设成2°立. 又设$f(x,u)$满足Caratheodory条件，并存在$0<\gamma<1$，$b(x)\in L_{\frac{2}{\gamma}}$，$c(x)\in L_2$及$0\leqslant a<\lambda_1$（$\lambda_1>0$是$K$的最小特征值），使

$$|f(x,u)|\leqslant a|u|+b(x)|u|^{1-\gamma}+c(x). \qquad (2.16)$$

则方程(2.1)在L_2中至少有一个解.

证 对任给$\varphi\in L_2$，由$b(x)\in L_{\frac{2}{\gamma}}$知

$$\int_G[b(x)|\varphi(x)|^{1-\gamma}]^2dx$$

$$\leqslant\Big[\int_G[b(x)]^{2\cdot\frac{1}{\gamma}}dx\Big]^{\gamma}\cdot\Big[\int_G[\varphi(x)]^{2(1-\gamma)\cdot\frac{1}{1-\gamma}}dx\Big]^{1-\gamma}$$

$$<+\infty.$$

因此由(2.16)式知f映L_2入L_2，根据第二章定理2.21知，假设

1°成立(取$p=2$)。当$u\geqslant 0$时，由(2.16式可知

$$\int_0^u f(x,v)dv\leqslant\frac{1}{2}au^2+\frac{b(x)}{2-\gamma}u^{2-\gamma}+c(x)u. \qquad (2.17)$$

当$u<0$时，由(2.16)式又有

$$\int_0^u f(x,v)=-\int_u^0 f(x,v)dv$$

$$\leqslant\int_u^0[a|v|+b(x)|v|^{1-\gamma}+c(x)]dv$$

$$=\frac{1}{2}au^2+\frac{b(x)}{2-\nu}|u|^{2-\gamma}+c(x)|u|. \qquad (2.18)$$

用与(2.15)式相同的证明方法，由(2.17)、(2.18)两 式可以证得(2.13)式成立.根据推论2.5，方程(2.1)在L_2中至少有一个解.证完.

定理2.8 设假设1°和2°成立，$f'_u(x,u)$存在，并存在$d(x)\in L_r$(当$p>2$时$\gamma=\frac{p}{p-2}$，当$p=2$时$\gamma=\infty$)，使

$$f'_u(x,u)\leqslant d(x). \qquad (2.19)$$

若$\|d(x)\|_r\|K\|_p<1$（其中$\|K\|_p$是把K看成映L_q入L_p的线性算子时的算子范数），则方程(2.1)在L_p中至少有一个解.

证 考虑由(2.5)式定义的泛函Φ.由引理2.1知$\mathrm{f}=\mathrm{grad}\Phi$，从而

$$\Phi(\varphi)=\Phi(\theta)+\int_0^1(\mathrm{f}(t\varphi),\varphi)dt=\int_0^1(\mathrm{f}(t\varphi,\varphi)dt. \qquad (2.20)$$

另一方面，对任何$h\in L_p$，又有

$$(\mathrm{f}\varphi,h)=(\mathrm{f}\theta,h)+\int_0^1(f'(\tau\varphi)\varphi,h)d\tau. \qquad (2.21)$$

其中f′是f的导算子. 在(2.21)式中，以$t\varphi$代替φ，再以φ代替h.

得到

$$\mathrm{f}(t\varphi),\varphi=(\mathrm{f}\theta,\varphi)+t\int_0^1(\mathrm{f}'(\tau+\varphi,\varphi)d\tau$$

$$=(\mathrm{f}\theta,\varphi)+\int_0^t(\mathrm{f}'(\sigma\varphi)\varphi,\varphi)d\sigma. \tag{2.22}$$

把(2.22)式代入(2.20)式，得到

$$\Phi(\varphi)=(\mathrm{f}\theta,\varphi)+\int_0^1 dt\int_0^t(\mathrm{f}'(\sigma\varphi)\varphi,\varphi)d\sigma$$

$$=(\mathrm{f}\theta,\varphi)+\int_0^1 d\sigma\int_\sigma^1(\mathrm{f}'(\sigma\varphi)\varphi,\varphi)dt$$

$$=(\mathrm{f}\theta,\varphi)+\int_0^1(1-\sigma)(\mathrm{f}'(\sigma\varphi)\varphi,\varphi)d\sigma$$

$$=\int_G \mathrm{f}(x,0)\varphi(x)dx+\int_0^1(1-\sigma)d\sigma$$

$$\int_G \mathrm{f}_u'(x,\sigma\varphi(x))[\varphi(x)]^2dx.$$

再由(2.19)式知

$$\Phi(\varphi)\leqslant a\|\varphi\|_p+\frac{1}{2}\|d(x)\|_r\|\varphi\|_p^2, \tag{2.23}$$

其中$a=\|\mathrm{f}\theta\|_q$.

对任给$\omega\in L_q$,

$$\|H^*w\|_2^2=(H^*\omega,H^*\omega)^2=(HH^*\omega,\omega)$$

$$=(K\omega,\omega)\leqslant\|K\omega\|_p\|\omega\|_q\leqslant\|K\|_p\|\omega\|_q^2.$$

故必有$\|H^*\|\leqslant\|K\|_p^{\frac{1}{2}}$.所以$\|H\|=\|H^*\|\leqslant\|K\|_p^{\frac{1}{2}}$.由(2.23)式可以得到，对$\psi\in L_2$,有

$$\Phi(H\psi)\leqslant a\|K\|_p^{\frac{1}{2}}\|\psi\|_2+\frac{1}{2}\|d(x)\|_r\|K\|_p\|\psi\|_2^2.$$

从而

$$\Psi(\psi)=\frac{1}{2}\|\psi\|^2-\Phi(H\psi)$$

$$\geqslant\frac{1}{2}(1-\|d(x)\|_r\|K\|_p)\|\psi\|^2-\alpha\|K\|_p^{\frac{1}{2}}\|\psi\|.$$

注意到$\|d(x)\|_r\|K\|_p<1$，故(2.13)式成立.从而方程(2.1)在L_p中至少有一个解.证完.

注2.9 现在比较一下条件(2.14)式和(2.19)式.由(2.19)式知

$$\int_0^u f(x,u)du\leqslant\frac{1}{2}d(x)u^2+f(x,0)u \quad (u>0). \tag{2.24}$$

(2.24)式比(2.14)式具有的一个优点就在于u^2的系数在(2.14)式中是一个常数，而在(2.24)式中可以是一个属于L_r的函数（当$p>2$时该函数可以是无界的）. 因而在某些情况下，$f(x,u)$可能满足(2.19)式，但不能满足(2.14)式. 例如

$$f(x,u)=g(x)u+h(x)\sin^3u+r(x)$$

（其中$g(x)$和$h(x)$是属于L_r的非负无界函数）就是这样. 同时条件(2.19)式比(2.14)式更容易检验.

下面讨论$K(x,y)$是本性有界核的情况. 设

3° $0<\text{mes}G<+\infty$；$K(x,y)$是正定对称核，并且

$$\operatorname*{ess\,sup}_{x,y\in G}|k(x,y)|=M<+\infty. \tag{2.25}$$

4° $f(x,u)$满足Caratheodory条件，并存在$1<q\leqslant2$，满足：对任给$r>0$，都存在$a_r(x)\in L_q$，使当$|u|\leqslant r$时

$$|f(x,u)|\leqslant a_r(x). \tag{2.26}$$

由于3°（注意到$\text{mes}G<+\infty$），故K映L_2入L_2全连续，映L_q入L_p全连续.

假设4°显然比假设1°广泛.

定理2.10 设假设3°和4°成立．又设存在$0<\gamma<2$，$b(x)\in L_{\frac{2}{\gamma}}$，$c(x)\in L$及$0\leqslant a<\lambda_1$（$\lambda_1$是$K$的最小特征值，$\lambda_1>0$），使得

$$\int_0^u f(x,v)dv\leqslant\frac{a}{2}u^2+b(x)|u|^{2-\gamma}+c(x). \quad (2.27)$$

则方程(2.1)至少有一个有界解．

证 首先证明：对任给$\psi\in L_2$，都有

$$\operatorname*{ess\,sup}_{x\in G}|K^{\frac{1}{2}}\psi(x)|\leqslant M^{\frac{1}{2}}\|\psi\| \quad (2.28)$$

事实上，设$\psi\in L_2$给定，令

$$G_1=\{x\in G\,|\,|K^{\frac{1}{2}}\psi(x)|>M^{\frac{1}{2}}\|\psi\|\}.$$

取$h(x)$如下：

$$h(x)=\begin{cases}\operatorname{sign}K^{\frac{1}{2}}\psi(x), & \text{若}x\in G_1,\\ 0, & \text{若}x\in G\backslash G_1.\end{cases}$$

于是，

$$(K^{\frac{1}{2}}\psi,h)=(\psi,K^{\frac{1}{2}}h)\leqslant\|\psi\|(K^{\frac{1}{2}}h,K^{\frac{1}{2}}h)^{\frac{1}{2}}=\|\psi\|(Kh,h)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.29)$$

由于

$$(Kh,h)=\int_{G_1}\int_{G_1}k(x,y)h(x)h(y)dxdy\leqslant M(\text{mes}G_1)^2,$$

故由(2.29)式可知，必有

$$(K^{\frac{1}{2}}\psi,h)\leqslant M^{\frac{1}{2}}\|\psi\|\text{mes}G_1 \quad (2.30)$$

但另一方面，若$\text{mes}G_1>0$，则

$$(K^{\frac{1}{2}}\psi,h)=\int_{G_1}|K^{\frac{1}{2}}\psi(x)|dx>M^{\frac{1}{2}}\|\psi\|\text{mes}G_1.$$

此与（2.30）式矛盾.故必有$\text{mes}G_1=0$．因此，（2.28）式成立.

考虑由（2.9）式定义的泛函Ψ.由（2.28）、(2.26)两式易知，Ψ在整个L_2上有定义．由(2.27)式可知(2.15)式仍成立．故存在$R>0$，使对$\psi\in\{\varphi\in L_2 \mid \|\varphi\|=R\}$，有

$$\Psi(\psi)>\Psi(\theta). \tag{2.31}$$

令$D=\{\varphi\in L_2 \mid \|\varphi\|\leqslant R\}$.由(2.28)式可知当$\psi\in D$时，有

$$\operatorname*{esssup}_{x\in G}|H\psi(x)|\leqslant M^{\frac{1}{2}}\|\psi\|\leqslant M^{\frac{1}{2}}R. \tag{2.32}$$

令

$$f_1(x,u)=\begin{cases} f(x,u), & \text{当}|u|\leqslant M^{\frac{1}{2}}R\text{时}, \\ f(x,M^{\frac{1}{2}}R), & \text{当 } u>M^{\frac{1}{2}}R\text{时}, \\ f(x,-M^{\frac{1}{2}}R), & \text{当}u<-M^{\frac{1}{2}}R\text{时}, \end{cases}$$

$$\Psi_1(\psi)=\frac{1}{2}\|\psi\|^2-\int_G dx\int_0^{H\phi}f_1(x,u)du.$$

显然，当$\|\psi\|\leqslant R$时，$\Psi(\psi)=\Psi_1(\psi)$.由于$f_1(x,u)$满足假设1°，故由引理2.3知

$$\text{grad}\Psi_1=I-H^*\mathrm{f}_1H$$

其中f_1由$\mathrm{f}_1\varphi=f_1(x,\varphi(x))$定义.由(2.31)式并注意到当$\|\psi\|\leqslant R$时，$\Psi(\psi)=\Psi_1(\psi)$，可知必存在$\psi_0(x)\in L_2$，$\|\psi_0\|<R$，使

$$\Psi_1(\psi_0)=\inf_{\phi\in D}\Psi_1(\psi).$$

于是，$\psi_0=H^*\mathrm{f}_1H\psi_0$.注意到(2.32)式，所以

$$\psi_0=H^*\mathrm{f}_1H\psi_0=H^*\mathrm{f}H\psi_0.$$

由引理2.2的证明可知，$H\psi_0$是方程(2.1)的解，显然$|H\psi_0|\leqslant M^{\frac{1}{2}}R$，即$H\psi_0$是方程(2.1)的有界解，证完.

推论2.11 设G是R^N中的有界闭域.设 $k(x,y)$ 是$G\times G$上的连续正定对称核，$f(x,u):G\times R^1\to R^1$连续.又设存在 $0<\gamma<2$，$b(x)\in C$，$c(x)\in G$ 及 $0\leqslant a<\lambda_1$（$\lambda_1>0$ 是K的最小正特征值），使得

$$\int_0^u f(x,v)dv\leqslant\frac{a}{2}u^2+b(x)|u|^{2-\gamma}+c(x).$$

则方程(2.1)至少有一个定义在G上的连续解.

证 显然，在推论2.11的假设下，定理2.10的全部条件成立，因此，根据定理2.10，方程(2.1)至少有一个有界解．由于$k(x,y)$连续，故易知该解必定在G上连续.证完.

定理2.6中的一个主要条件是(2.3)式.利用 Orlicz 空间理论，这一条件可以放宽.例如，可以证明下列定理:

定理2.12 设(1)$f(x,u)$满足Caratheodory条件，并且存在$a>0$，$b>0$，使得对任给$x\in G$，$u\in R^1$，有

$$|f(x,u)|\leqslant b+e^{a|u|};$$

(2)$k(x,y)$是正定对称核，并且存在$\varepsilon>0$，使得

$$\int_G\int_G \exp|k(x,y)|^{1+\varepsilon}dxdy<+\infty;$$

(3)存在 $0<\gamma<2$，$b(x)\in L_{\frac{2}{\gamma}}$，$c(x)\in L$及 $0\leqslant a<\lambda_1$（$\lambda_1>0$ 是K的最小特征值），使得(2.14)式成立.

则方程(2.1)至少有一个解$\varphi^*(x)$，满足

$$\int_G \exp|\varphi^*(x)|dx<+\infty.$$

这一定理证明的基本思路与定理2.6相同，见M.A.Красносельский和Я.Б.Рутицкий〔1〕.

附注 利用变分方法研究非线性积分方程的工作，最早出

现在G.Fubini1913年的文献〔1〕中，随后，L.Lichtenstein〔1〕〔2〕，A.Hammerstein〔1〕，M.Golomb〔1〕〔2〕和E.Rothe〔1〕〔2〕〔3〕等人都发展了非线性积分方程理论中的变分方法.M.M.Вайнберг〔1〕〔3〕和M.A.Красносельский〔1〕总结了苏联数学工作者在这一领域中获得的突出成就.

定理2.6选自M.A.Красносельский〔1〕，它是关于正定对称核Hammerstein型积分方程可解性的主要结果之一，定理2.8是郭大钧〔7〕证明的.定理2.10取自M.M.Вайнберг〔1〕.

与本节内容有关的进一步讨论见M.M.Вайнберг〔3〕，D.G.de Figueiredo和C.P.Gupta〔3〕，C.P.Gupta〔2〕，W.V.Petryshyn和P.M.Fitzpatrick〔1〕.

§3 具有拟正定核的Hammerstein型非线性积分方程的可解性

在本节中，将利用变分方法研究具有拟正定核Hammerstein型积分方程

$$\varphi(x)=\int_G k(x,y)f(y,\varphi(y))dy=A\varphi \tag{3.1}$$

的可解性，其中G是n维欧氏空间中的一个可测集，$0<\mathrm{mes}G\leqslant+\infty$.设$K$是由$k(x,y)$确定的线性积分算子.设

1* $f(x,u)$满足Caratheodory条件，并且存在$p\geqslant 2$，$a(x)\geqslant 0$，$a(x)\in L_q(p^{-1}+q^{-1})=1$，使得

$$|f(x,u)|\leqslant a(x)+b|u|^{p-1}. \tag{3.2}$$

2* $k(x,y)$是拟正定对称核，并且由$k(x,y)$确定的线性积

分算子K映L_2入L_2全连续，映L_q入L_p全连续；若$\text{mes}G=+\infty$，则还假定K（作为映L_2入L_2的算子）的一切特征函数都属于L_q（参见注1.10）．由假设2*及定理1.8可知，K的本质平方根H是映L_2入L_p的全连续线性算子．设$\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_m<0\ (1\leqslant i\leqslant m)$是$K$的全体负特征值，相应的就范特征函数为$\{\psi_i(x)\mid 1\leqslant i\leqslant m\}$．用$H^{(1)}$表示由$\psi_1,\psi_2,\cdots,\psi_m$在$L_2$中张成的$m$维子空间，$H^{(2)}$表示$H^{(1)}$在$L_2$中的直交补空间．用$P_1$和$P_2$分别表示由$L_2$到$H^{(1)}$和$H^{(2)}$的投影算子．

引理3.1 设1*和2*成立．则方程(3.1)在L_p中有解的充分必要条件是方程

$$(-P_1+P_2)\psi=H^*\mathrm{f}H\psi \qquad (3.3)$$

在L_2中有解．

证 若方程(3.1)在L_p中有解φ_0，则根据定理1.11知$K=H(-P_1+P_2)H^*$，故

$$\varphi_0=A\varphi_0=K\mathrm{f}\varphi_0=H(-P_1+P_2)H^*\mathrm{f}\varphi_0 \qquad (3.4)$$

以$(-P_1+P_2)H^*\mathrm{f}$作用在(3.4)式两端，并令$\psi_0=(-P_1+P_2)H^*\mathrm{f}\varphi_0$，得到

$$\psi_0=(-P_1+P_2)H^*\mathrm{f}H\psi_0. \qquad (3.5)$$

以$(-P_1+P_2)$作用在(3.5)式两端，并注意到$(-P_1+P_2)^2=I$，即得$(-P_1+P_2)\psi_0=H^*\mathrm{f}H\psi_0$，即$\psi_0$是方程(3.3)的解，并且$\psi_0\in L_2$．

设ψ_0是方程(3.3)在L_2中的解，则$(-P_1+P_2)\psi_0=H^*\mathrm{f}H\psi_0$．该式两端以$H(-P_1+P_2)$作用之，即得

$$H\psi_0=H(-P_1+P_2)H^*\mathrm{f}H\psi_0=K\mathrm{f}H\psi_0.$$

于是$H\psi_0\in L_p$是方程(3.1)的解．证完．

对$\psi\in L_2$，令

$$\Psi(\psi)=-\frac{1}{2}(P_1\psi,\psi)+\frac{1}{2}(P_2\psi,\psi)-\Phi(H\psi), \qquad (3.6)$$

其中Φ由(2.5)式定义．由引理2.1知Ψ在整个L_2上有定义．

引理3.2 设1*和2*成立，则

$$\text{grad}\Psi=(-P_1+P_2)-H^*\text{f}H, \qquad (3.7)$$

并且Ψ是L_2上的弱下半连续泛函．

证 对$\psi\in L_2$，$h\in L_2$，

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left[-\frac{1}{2}(P_1(\psi+th),\psi+th)+\frac{1}{2}(P_1\psi,\psi)\right]$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left[-\frac{1}{2}(P_1\psi,th)-\frac{1}{2}(P_1(th),\psi)-\frac{1}{2}(P_1th,th)\right]$$

$$=\lim_{t\to 0}\left[-(P_1\psi,h)-\frac{1}{2}t(P_1h,h)\right]=(-P_1\psi,h),$$

所以$\text{grad}\left[-\frac{1}{2}(P_1\psi,\psi)\right]=-P_1\psi$．同理$\text{grad}\left[\frac{1}{2}(P_2\psi,\psi)\right]=P_2\psi$．由引理2.3的证明，知$\text{grad}\Phi(H\psi)=H^*\text{f}H\psi$．因此(3.7)式成立．由于$-P_1:L_2\to L_2$，$H^*\text{f}H:L_2\to L_2$都是全连续算子，故$-\frac{1}{2}(P_1\psi,\psi)$和$-\Phi(H\psi)$都是弱连续泛函．下证$\frac{1}{2}(P_2\psi,\psi)$是弱下半连续的．设$\psi_n\in L_2$，$\psi_n\xrightarrow{弱}\psi_0$，则对任给$\varphi\in L_2$，

$$\lim_{n\to\infty}(\psi_n,P_2\varphi)=(\psi_0,P_2\varphi).$$

于是，由P_2的自共轭性，有

$$\lim_{n\to\infty}(P_2\psi_n,\varphi)=(P_2\psi_0,\varphi).$$

这表明$P_2\psi_n\xrightarrow{弱}P_2\psi_0$．由引理2.3的证明可知$\frac{1}{2}\|\psi\|^2$是弱下半连续的，故

$$\frac{1}{2}(P_2\psi_0,\psi_0)=\frac{1}{2}\|P_2\psi_0\|^2\leqslant\varliminf_{n\to\infty}\frac{1}{2}\|P_2x_n\|^2$$

$$=\varliminf_{n\to\infty}\frac{1}{2}(P_2\psi_n,\psi_n).$$

即$\frac{1}{2}(P_2\psi,\psi)$是弱下半连续的.从而$\Psi$是弱下半连续的.证完.

利用上述两个引理，立即可以得到:

定理3.3 设条件1*和2*成立.设Ψ由(3.6)式定义.则方程(3.1)在L_p上有解的充分必要条件是Ψ在L_2上有临界点

推论3.4 设假设1*和2*成立.设Ψ由(3.6)式定义.如果Ψ在L_2上强制，则方程(3.1)在L_p中必定有解.

定理3.5 设条件1*和2*成立.又设存在$0<\gamma<2$，$b(x)\in L_{\frac{2}{\gamma}}$，$c(x)\in L_1$，$a\leqslant\lambda_1$（$\lambda_1$是$K$的绝对值最大的负特征值），使得

$$\int_0^u f(x,v)dv\leqslant au^2+b(x)|u|^{2-\gamma}+c(x) \tag{3.8}$$

则方程（3.1）在L_p中至少有一个解.

证 根据推论3.4，只需证明由(3.6)式定义的Ψ在L_2上强制即可.由（3.8）式知，对$\psi\in L_2$，有

$$\Psi(\psi)=-\frac{1}{2}(P_1\psi,\psi)+\frac{1}{2}(P_2\psi,\psi)-\Phi(H\psi)$$

$$\geqslant-\frac{1}{2}((P_1-P_2)\psi,\psi)-a(H\psi,H\psi)$$

$$-\int_G b(x)|H\psi(x)|^{2-\gamma}dx-\int_G c(x)dx$$

$$\geqslant-\frac{1}{2}((P_1-P_2)\psi,\psi)-a(H\psi,H\psi)$$

$$-b_1(H\psi,H\psi)^{1-\frac{\gamma}{2}}-c_1, \tag{3.9}$$

其中$b_1=\left(\int_G |b(x)|^{\frac{2}{\gamma}}dx\right)^{\frac{\gamma}{2}}$，$c_1=\int_G c(x)dx$.我们有

$$-\frac{1}{2}((P_1-P_2)\psi,\psi)=-\frac{1}{2}((P_1-P_2)\psi,(P_1+P_2)\psi)$$

$$=-\frac{1}{2}(\|P_1\psi\|^2-\|P_2\psi\|^2), \tag{3.10}$$

$$(H\psi,H\psi)^{1-\frac{\gamma}{2}}=(K^{\frac{1}{2}}\psi,K^{\frac{1}{2}}\psi)^{1-\frac{\gamma}{2}}$$

$$=\|K^{\frac{1}{2}}\psi\|^{2-\gamma}\leqslant\|K^{\frac{1}{2}}\|^{2-\gamma},\|\psi\|^{2-\gamma} \tag{3.11}$$

$$(H\psi,H\psi)=\|K^{\frac{1}{2}}\psi\|^2=\|K^{\frac{1}{2}}(P_1\psi+P_2\psi)\|$$

$$=\|K^{\frac{1}{2}}P_1\psi\|^2+\|K^{\frac{1}{2}}P_2\psi\|^2\geqslant\|K^{\frac{1}{2}}P_1\psi\|^2. \tag{3.12}$$

设$P_1\psi\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\psi_i$，则由(1.18)式知$K^{\frac{1}{2}}P_1\psi=-\sum_{i=1}^{m}\frac{\alpha_i\psi_i}{\sqrt{|\lambda_i|}}$,

所以

$$\|K^{\frac{1}{2}}P_1\psi\|^2=\sum_{i=1}^{m}\frac{\alpha_i^2}{|\lambda_i|}\geqslant\frac{1}{|\lambda_1|}\sum_{i=1}^{m}\alpha_i^2=\frac{1}{|\lambda_1|}\|P_1\psi\|^2,$$

再由 (3.12) 式即得

$$(H\psi,H\psi)\geqslant\frac{1}{|\lambda_1|}\|P_1\psi\|^2. \tag{3.13}$$

由 (3.9)、(3.10)、(3.11)、(3.13)式，并注意到$a\leqslant\lambda_1<0$，得

$$\Psi(\psi)\geqslant-\frac{1}{2}(\|P_1\psi\|^2-\|P_2\psi\|^2)-\frac{a}{|\lambda_1|}\|P_1\psi\|^2$$

$$-b_1\|K^{\frac{1}{2}}\|^{2-\gamma}\|\psi\|^{2-\gamma}-c_1$$

$$\geqslant\frac{1}{2}(\|P_1\psi\|^2+\|P_2\psi\|^2)-b_1\|K^{\frac{1}{2}}\|^{2-\gamma}\|\psi\|^{2-\gamma}-c_1$$

$$=\frac{1}{2}\|\psi\|^2-b_1\|K^{\frac{1}{2}}\|^{2-\gamma}\|\psi\|^{2-\gamma}-c_1$$

因此Ψ在L_2上强制.根据推论3.4，方程(3.1)在L_p中必定有解.证完.

定理3.6 设：（1）$k(x,y)$是拟正定对称核，并且

$$\operatorname*{ess\ sup}_{x,\ y\in G}|k(x,y)|=M<+\infty; \tag{3.14}$$

（2）$f(x,u)$满足Caratheodory条件，并存在$1<q\leqslant 2$，满足：对任给$r>0$，都存在$a_r(x)\in L_q$，使当$|u|\leqslant r$时

$$|f(x,u)|\leqslant a_r(x);$$

（3）存在$0<\gamma<2$，$b(x)\in L_{\frac{2}{\gamma}}$，$c(x)\in L_1$，$a\leqslant\lambda_1$（$\lambda_1$是$K$的绝对值最大的负特征值），使得(3.8)式成立；

（4）$\operatorname{mes}G<+\infty$；

则方程(3.1)至少有一个有界解.

证 令$K^{\frac{1}{2}}$是K的本质平方根.首先证明存在常数$N>0$，使对任给$\psi\in L_2$，都有

$$\operatorname*{ess\ sup}_{x\in G}|K^{\frac{1}{2}}\psi(x)|\leqslant N\|\psi\|. \tag{3.15}$$

事实上，由（3.14）式及$\operatorname{mes}G<+\infty$可知$K$的一切属于$L_2$的特征函数都是本性有界函数.从而

$$k_1(x,y)=k(x,y)+2\sum_{i=1}^{m}\frac{\psi_i(x)\psi_i(y)}{|\lambda_i|}$$

也是$G\times G$上的本性有界函数，其中λ_i($1\leqslant i\leqslant m$)是K的一切负特征值，ψ_i($1\leqslant i\leqslant m$)是相应的特征函数.令$K_1^{\frac{1}{2}}$是K_1（由$k_1(x,y)$确定的积分算子）的正平方根.由于K_1是正定算子，故由(2.28)式的证明可知存在常数$M_1>0$，使得对任给$\psi\in L_2$，有

$$\operatorname*{ess\,sup}_{x\in G}|K_1^{\frac{1}{2}}\psi(x)|\leqslant M_1\|\psi\|. \tag{3.16}$$

显然，对任给$\psi\in L_2$，有

$$|K^{\frac{1}{2}}\psi(x)|\leqslant|K_1^{\frac{1}{2}}\psi(x)|+2\sum_{i=1}^{m}\frac{\|\psi_i\|\|\psi\|}{\sqrt{|\lambda_i|}}|\psi_i(x)|. \tag{3.17}$$

由(3.16)、(3.17)两式即可知(3.15)式成立.

然后用与定理2.10相同的证明方法，即可知定理 3.6 的结论成立.证完.

为了研究具有拟正定核的Hammerstein型积分方程的可解性，还可以采用另一种方法，即把具有拟正定核的Hammerstein型积分方程归结为正定核的情况.

先给出某些预备引理.

设$k(x,y)$所确定的线性积分算子映L_2入L_2全连续，令其全系特征值为$\{\lambda_n|n=1,2,\cdots\}$,对应的就范正交特征函数系为$\{\psi_n|n=1,2,\cdots\}$.设$\lambda\neq0$,$\lambda\neq\lambda_n(n=1,2,\cdots)$.用$K$表示$k(x,y)$确定的线性积分算子,$R=\left(K-\frac{1}{\lambda}I\right)^{-1}$.令

$$K_1=KR. \tag{3.18}$$

因为$\lambda\neq0$,$\lambda\neq\lambda_n(n=1,2,\cdots)$，故由线性泛函分析知$R$是映$L_2$入$L_2$的有界线性算子.因此,由(3.18)式可知，$K$是映$L_2$入$L_2$的全连续线性算子.

引理3.7 设K_1由(3.18)式定义.则K_1的全系特征值为$\left\{1-\frac{\lambda_n}{\lambda}\middle|n=1,2,\cdots\right\}$相应的就范正交特征函数系为$\{\psi_n(x)|n=1,2,\cdots\}$.

证 由$\psi_n=\lambda_n K\psi_n$知$\left(K-\frac{1}{\lambda}I\right)\psi_n=\left(\frac{1}{\lambda_n}-\frac{1}{\lambda}\right)\psi_n$，从而$R\psi_n=\frac{\lambda\lambda_n}{\lambda-\lambda_n}\psi_n$，故

$$\left(1-\frac{\lambda_n}{\lambda}\right)K_1\psi_n=\left(1-\frac{\lambda_n}{\lambda}\right)KR\psi_n$$

$$=\left(1-\frac{\lambda_n}{\lambda}\right)\frac{\lambda\lambda_n}{\lambda-\lambda_n}K\psi_n=\psi_n$$

即ψ_n是K_1对应于$1-\frac{\lambda_n}{\lambda}$的特征函数。

反之，设$\lambda^*\neq 0$，$\psi^*\neq\theta$，使$\psi^*=\lambda^* K_1\psi^*$.由$R$的定义易知$RK=KR$，故

$$\lambda^* RK\psi^*=\lambda^* KR\psi^*=\lambda^* K_1\psi^*=\psi^*$$

从而

$$\lambda^* K\psi^*=K\psi^*-\frac{1}{\lambda}\psi^*.$$

由此可知，$\lambda^*\neq 1$，并且$\lambda(1-\lambda^*)K\psi^*=\psi^*$.所以必存在某$\lambda_n$，使$\lambda(1-\lambda^*)=\lambda_n$,并且$\psi^*$是$K$的对应于$\lambda_n$的特征函数. 由$\lambda(1-\lambda^*)=\lambda_n$知$\lambda^*=1-\frac{\lambda_n}{\lambda}$.证完。

下面假定1*和2*成立，且$\mathrm{mes}G<+\infty$。

设拟正定核$k(x,y)$的全系特征值为

$$\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m,\lambda_{m+1},\lambda_{m+2},\cdots\},$$

其中，$\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots\leqslant\lambda_m<0<\lambda_{m+1}\leqslant\lambda_{m+2}\leqslant\cdots$. 设$\{\psi_n|n=1,2,\cdots\}$是对应的就范正交特征函数系.取$\lambda$，使$\lambda>|\lambda_1|$. 令$R=$

$\left(K+\frac{1}{\lambda}I\right)^{-1}$,

$$K_1=KR. \tag{3.19}$$

由引理3.7可知K_1的全系特征值为

$$\left\{1+\frac{\lambda_1}{\lambda},\ 1+\frac{\lambda_2}{\lambda},\cdots,\ 1+\frac{\lambda_m}{\lambda},\ 1+\frac{\lambda_{m+1}}{\lambda},\cdots\right\},$$

这些特征值都是正的，其中最小的一个是$1+\frac{\lambda_1}{\lambda}$，所以$K_1$是正定算子。

由K的自共轭性及K_1的定义，易知K_1也是自共轭算子。

在考察方程(3.1)的同时，考察

$$\varphi=K_1\mathrm{f}_1\varphi, \tag{3.20}$$

其中f_1是由

$$f_1(x,u)=u+\frac{1}{\lambda}f(x,u) \tag{3.21}$$

生成的Немыцкий算子.由(3.2)式知,当$\mathrm{mes}G<+\infty$时

$$|f_1(x,u)|\leqslant a_1(x)+b_1|u|^{p-1},$$

其中$b_1=1+\frac{1}{\lambda}b, a_1(x)=1+\frac{1}{\lambda}a(x)\in L_q$. 所以$\mathrm{f}_1$是映$L_p$入$L_q$的连续、有界算子.

另一方面，根据定理1.11

$$K=H(-P_1+P_2)H^*,$$

其中$H=K^{\frac{1}{2}}$是K的本质平方根，$H:L_2\to L_p$全连续，$H^*:L_q\to$

L_2全连续．直接验证可知，在 L_2 中有 $H^*\left(K+\frac{I}{\lambda}\right)=\left(K+\frac{I}{\lambda}\right)H^*$，故易知有$RH^*=H^*R$．于是，在$L_2$中有

$$K_1=KR=H(-P_1+P_2)H^*R=H(-P_1+P_2)RH^*.$$

所以，K_1可以延拓为映L_q入L_p的全连续算子．延拓后的算子仍记为K_1．

引理3.8 设1*，2*成立，$\operatorname{mes}G<+\infty$，则 $\varphi_0\in L_p$ 是方程(3.1)解的充分必要条件是φ_0是方程(3.20)的解．

证 设$\varphi_0\in L_p$是方程(3.20)的解，由于 $\operatorname{mes}G<+\infty$，故$\varphi_0\in L_2$．于是

$$\varphi_0=KR\left(I+\frac{1}{\lambda}\mathsf{f}\right)\varphi_0=RK\left(I+\frac{1}{\lambda}\mathsf{f}\right)\varphi_0,$$

$$\left(K+\frac{1}{\lambda}I\right)\varphi_0=K\left(I+\frac{1}{\lambda}\mathsf{f}\right)\varphi_0.$$

故$\varphi_0=K\mathsf{f}\varphi_0$，即$\varphi_0$是方程(3.1)的解．由于以上推导过程是可逆的，故若φ_0是方程(3.1)的解，则φ_0也是方程(3.20)的解．证完．

上述引理的意义在于把一个拟正定核Hammerstein型积分方程解的存在性问题归结为一个正定核Hammerstein型积分方程解的存在性问题．

定理3.9 设假设1*和2*成立，$\operatorname{mes}G<+\infty$．又设存在$0<\gamma<2$，$b(x)\in L_{\frac{2}{\gamma}}$，$c(x)\in L$，$a<\lambda_1$（$\lambda_1$是$K$的绝对值最大的负特征值），使得

$$\int_0^u f(x,v)dv \leqslant \frac{a}{2}u^2 + b(x)|u|^{2-\gamma} + c(x) \qquad (3.22)$$

则方程（3.1）在L_p中至少有一个解.

证 由不等式（3.22)式及$f_1(x,u)$的定义知

$$\int_0^u f(x,v)dv \leqslant \frac{a^*}{2}u^2 + b^*(x)|u|^{2-\gamma} + c^*(x), \qquad (3.23)$$

其中$a^* = 1 + \frac{a}{\lambda}$，$b^*(x) = \frac{1}{\lambda}b(x) \in L^{\frac{2}{\gamma}}$，$c^*(x) = \frac{1}{\lambda}c(x) \in L$.由$a < \lambda_1$知$a^* < 1 + \frac{\lambda_1}{\lambda}$，而$1 + \frac{\lambda_1}{\lambda}$是$K_1$的最小正特征值.由（3.23）式并根据定理2.6可知方程（3.20）至少有一个解$\varphi_0 \in L_p$，根据引理3.8，φ_0是方程(3.1）的解.证完.

注3.10 检查引理3.8及定理3.9的证明可以知道，如果$p = 2$，则mes$G < +\infty$这一条件可以删掉.

注3.11 由于$a < 0$，故条件（3.22）比条件（3.8）式要广泛.因此，当mes$G < +\infty$时,定理3.9是定理3.5的推广.此外，当mes$G < +\infty$时，定理3.9也是定理2.6的推广.

附注 利用定理3.3所叙述的方法研究具有拟正定核的Hammerstein型积分方程的性质，已有众多的文献，例如可见M.M.Вайнберг〔1〕〔3〕.定理3.5是利用这一方法的一个主要结果.

引理3.8给出了研究具有拟正定核的Hammerstein型积分方程的另一方法.这一方法是郭大钧〔7〕提出的.这一方法的基本思想可以追溯到G.L.Dolph的〔1〕.定理3.9是郭大钧利用引理3.8在〔7〕中证明的.

§4 具有一般对称核的Hammerstein型积分方程解的存在性和唯一性

在前两节中，我们分别讨论了具有正定核和拟正定核Hammerstein型非线性积分方程解的存在性.本节中在不假定$k(x,y)$是正定核或拟正定核的情况下，讨论非线性Hammerstein型积分方程的可解性及解的唯一性。

考察

$$\varphi(x)=\int_G k(x,y)f(y,\varphi(y))dy, \tag{4.1}$$

其中$0<\text{mes}G\leqslant+\infty$.设

（1）$k(x,y)$是对称核，并且由$k(x,y)$确定的线性积分算子K映L_2入L_2全连续；

（2）$f(x,u)$满足Caratheodory条件，并存在常数$b>0$，使$a(x)\geqslant 0$，$a(x)\in L_2$，使

$$|f(x,u)|\leqslant a(x)+b|u|. \tag{4.2}$$

设K的全体特征值（不计重数）为

$$\cdots\lambda_{-2}<\lambda_{-1}<0<\lambda_0<\lambda_1<\lambda_2<\cdots.$$

令

$$\Phi(\varphi)=\int_G dx\int_0^{\varphi(x)} f(x,v)dv, \tag{4.3}$$

取α满足$\lambda_N<\alpha<\lambda_{N+1}$，令

$$K_1=K(I-\alpha K)^{-1}, \tag{4.4}$$

$$f_1(x,u)=f(x,u)-\alpha u, \tag{4.5}$$

$$\Phi_1(\varphi)=\Phi(\varphi)-\frac{1}{2}\alpha\|\varphi\|^2. \tag{4.6}$$

由引理3.7的证明并注意到注3.10可知，$\varphi_0 \in L_2$是方程(4.1)的解的充分必要条件为φ_0是方程

$$\varphi = K_1 f_1 \varphi \tag{4.7}$$

的解，其中$f_1 \varphi = f_1(x, \varphi(x))$.仿引理3.7的证明可知$K_1$的全体特征值（不计重数）为

$$\cdots < \lambda_{-2} - \alpha < \lambda_{-1} - \alpha < \lambda_0 - \alpha < \lambda_1 - \alpha < \cdots.$$

把K_1的全体正特征值所对应的特征元及全体满足$K_1 \varphi = \theta$的元素张成的空间记为H_1，把K_1的全体负特征值所对应的特征元张成的空间记为H_2.显然，H_1和H_2都是K_1的不变子空间，并且H是H_1与H_2的直交和:

$$H = H_1 \oplus H_2.$$

令P_1和P_2分别是H到H_1和H_2的正交投影算子，且

$$B_1 = K_1 P_1, \quad B_2 = -K_1 P_2. \tag{4.8}$$

则显然B_1和B_2都是全连续自共轭的正定算子，其值域分别包含在H_1和H_2中，并且

$$K_1 = B_1 - B_2, \tag{4.9}$$

$$\|B_1\| = \frac{1}{\lambda_{N+1} - \alpha}, \quad \|B_2\| = \frac{1}{\alpha - \lambda_N}. \tag{4.10}$$

令

$$B = B_1^{\frac{1}{2}} - B_2^{\frac{1}{2}}, \quad J = P_1 - P_2. \tag{4.11}$$

则容易证明

$$JK_1 = K_1 J, \quad JB = BJ, \quad K_1 = JB^2. \tag{4.12}$$

对$\varphi \in L_2$，定义

$$\Psi(\varphi) = \frac{1}{2}(J\varphi, \varphi) - \Phi_1(B\varphi), \tag{4.13}$$

则仿引理3.2的证明可知

$$\mathrm{grad}\Psi = J - B\mathrm{f}_1 B. \tag{4.14}$$

引理4.1 设假设（1）和（2）成立，则方程（4.1）在L_2中有解的充分必要条件是方程

$$J\varphi = B\mathrm{f}_1 B\varphi \tag{4.15}$$

在L_2中有解.

证 显然只需证明：方程（4.7）在L_2中有解的充分必要条件是方程（4.15）在L_2中有解.设φ_0是方程（4.7）的解，则$\varphi_0 = K_1\mathrm{f}_1\varphi_0$.由（4.12）式得

$$\varphi_0 = JBB\mathrm{f}_1\varphi_0 = BJB\mathrm{f}_1\varphi_0. \tag{4.16}$$

用$JB\mathrm{f}_1$作用在(4.16)式两端，并令$\psi_0 = JB\mathrm{f}_1\varphi_0$，得

$$\psi_0 = JB\mathrm{f}_1 B\psi_0.$$

再以J作用在上式两端,并注意到$J^2 = I$，即得$J\psi_0 = B\mathrm{f}_1 B\psi_0$，即$\psi_0$是方程（4.15）的解.

反之，设ψ_0是方程（4.15）的解，即$J\psi_0 = B\mathrm{f}_1 B\psi_0$，于是

$$JBJ\psi_0 = JB^2\mathrm{f}_1 B\psi_0.$$

再由（4.12）式，可得$J^2 B\psi_0 = K_1\mathrm{f}_1 B\psi_0$.注意到$J^2 = I$，所以$B\psi_0 = K_1\mathrm{f}_1 B\psi_0$，即$B\psi_0$是方程（4.7）的解.证完.

对任给$\varphi\in L_2$，必存在唯一的$\psi\in H_1$，$\omega\in H_2$，使$\varphi = \psi + \omega$.考察泛函

$$\Psi(\varphi) = \Psi(\psi + \omega).$$

则当$\omega\in H_2$固定时，$\Psi(\psi+\omega)$作为ψ的泛函，其梯度为

$$\mathrm{grad}_\psi\Psi(\psi+\omega) = \psi - B_1^{\frac{1}{2}}\mathrm{f}_1(B_1^{\frac{1}{2}}\psi - B_2^{\frac{1}{2}}\omega)\in H_1; \tag{4.17}$$

当$\psi\in H_1$固定时，$\Psi(\psi+\omega)$作为ω的泛函，其梯度为

$$\mathrm{grad}_\omega\Psi(\psi+\omega) = -\omega + B_2^{\frac{1}{2}}\mathrm{f}_1(B_1^{\frac{1}{2}}\psi - B_2^{\frac{1}{2}}\omega)\in H_2; \tag{4.18}$$

而$\Psi(\varphi)$的梯度为

$$\text{grad}\Psi(\varphi)=\psi-\omega-(B_1^{\frac{1}{2}}-B_2^{\frac{1}{2}})\mathfrak{f}_1(B_1^{\frac{1}{2}}\psi-B_2^{\frac{1}{2}}\omega)$$
$$=\text{grad}_\psi\Psi(\psi+\omega)+\text{grad}_\omega\Psi(\psi+\omega). \tag{4.19}$$

定理4.2 设假设（1）和（2）成立，又设

（3）存在整数N及满足

$$\lambda_N<\mu_N<\mu_{N+1}<\lambda_{N+1} \tag{4.20}$$

的常数μ_N和μ_{N+1}，使对任给$\varphi\in L_2$，

$$\mu_N\|\varphi\|^2-C_1\leqslant 2\Phi(\varphi)\leqslant\mu_{N+1}\|\varphi\|^2+C_2 \tag{4.21}$$

其中C_1和C_2是常数.

（4）对任给$\varphi\in L_2$，$h\in L_2$，$h\neq\theta$

$$(\mathfrak{f}(\varphi+h)-\mathfrak{f}\varphi,h)<\lambda_{N+1}\|h\|^2. \tag{4.22}$$

则方程（4.1)在L_2中至少有一个解.

证 取

$$\alpha=\frac{1}{2}(\mu_{N+1}+\mu_N),\quad \beta=\frac{1}{2}(\mu_{N+1}-\mu_N) \tag{4.23}$$

取K_1、$f_1(x,u)$、$\Phi_1(\varphi)$、B_1、B_2、B、J分别如（4.4）、（4.5)、（4.6）、(4.8）、(4.11)式所定义.根据引理4.1，只需证明方程（4.15）在L_2中有解.由（4.23）及定理的条件（3）、（4）可知

$$-\beta\|\varphi\|^2-c_1\leqslant 2\Phi_1(\varphi)\leqslant\beta\|\varphi\|^2+c_2,\quad \forall\varphi\in L_2, \tag{4.24}$$

$$(\mathfrak{f}_1(\varphi+h)-\mathfrak{f}(\varphi),h)<(\lambda_{N+1}-\alpha)\|h\|^2,$$
$$\forall\varphi\in L_2,\ h\in L_2,\ h\neq\theta. \tag{4.25}$$

取 $\omega\in H_2$ 固定，令 $H(\omega)=\{\varphi(x)=\psi(x)+\omega(x)\ |\psi(x)\in H_1\}$.在$H(\omega)$中考虑泛函$\Psi(\varphi)$（$\Psi(\varphi)$由（4.13）式定义).显然，$\Psi(\varphi)$可以写成（令$\varphi=\psi+\omega$，$\psi\in H_1$）

$$\Psi(\varphi)=\Psi(\psi+\omega)$$
$$=\frac{1}{2}(\|\psi\|^2-\|\omega\|^2)-\Phi_1(B_1^{\frac{1}{2}}\psi-B_2^{\frac{1}{2}}\omega). \tag{4.26}$$

由于$B_1^{\frac{1}{2}}$是全连续的，故$\Phi_1(B_1^{\frac{1}{2}}\psi - B_2^{\frac{1}{2}}\omega)$关于$\psi\in H_1$是弱连续的.注意到$\frac{1}{2}\|\psi\|^2$关于$\psi\in H_1$是弱下半连续的，故$\Psi(\varphi)=\Psi(\psi+\omega)$关于$\psi\in H_1$是弱下半连续的，即$\Psi(\psi)$是$H(\omega)$上的弱下半连续泛函，由（4.26）、（4.24）两式可知对$\varphi\in H(\omega)$

$$\Psi(\varphi)=\Psi(\psi+\omega)\geqslant\frac{1}{2}(\|\psi\|^2-\|\omega\|^2)$$

$$-\frac{1}{2}\beta(\|B_1^{\frac{1}{2}}\psi\|^2+\|B_2^{\frac{1}{2}}\omega\|^2)-\frac{1}{2}c_2$$

$$\geqslant\frac{1}{2}(1-\beta\|B_1\|)\|\psi\|^2-\frac{1}{2}(1+\beta\|B_2\|)\|\omega\|_2$$

$$-\frac{1}{2}c_2. \tag{4.27}$$

由（4.23）、(4.10)式知

$$\beta\|B_1\|=\frac{1}{2}(\mu_{N+1}-\mu_N)\cdot\frac{1}{\lambda_{N+1}-\frac{1}{2}(\mu_N+\mu_{N+1})}$$

$$=\frac{1}{2}(\mu_{N+1}-\mu_N)\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}(\mu_{N+1}-\mu_N)+(\lambda_{N+1}-\mu_{N+1})}$$

$$<1. \tag{4.28}$$

故由（4.27）式知

$$\lim_{\substack{\varphi\in H(\omega)\\ \|\varphi\|\to+\infty}}\Psi(\varphi)=+\infty.$$

因此，必存在$\varphi_\omega\in H(\omega)$，使

$$\Psi(\varphi_\omega)=\inf_{\varphi\in H(\omega)}\Psi(\varphi)>-\infty. \tag{4.29}$$

下证Ψ在$H(\omega)$上的极小点是唯一的.事实上，对任给ψ，$h\in H_1$，$h\neq\theta$，由（4.17）式，有

$$(\mathrm{grad}_\psi\Psi(\psi+h+\omega)-\mathrm{grad}_\psi\Psi(\psi+\omega),\ h)$$

$$=\|h\|^2-(\mathrm{f}_1(B_1^{\frac{1}{2}}(\psi+h)-B_2^{\frac{1}{2}}\omega)-\mathrm{f}_1(B_1^{\frac{1}{2}}\psi-B_2^{\frac{1}{2}}\omega),B_1^{\frac{1}{2}}h).$$

$$(4.30)$$

当$B_1^{\frac{1}{2}}h\neq\theta$时，由（4.30）、（4.25）、(4.10)三式可知

$$(\mathrm{grad}_\psi\Psi(\psi+h+\omega)-\mathrm{grad}_\psi\Psi(\psi+\omega),h)$$

$$>\|h\|^2-(\lambda_{N+1}-\alpha)\|B_1^{\frac{1}{2}}h\|^2\geqslant 0;$$

当$B_1^{\frac{1}{2}}h=\theta$时，由（4.30）式知

$$(\mathrm{grad}_\psi\Psi(\psi+h+\omega)-\mathrm{grad}_\psi\Psi(\psi+\omega),h)=\|h\|^2>0.$$

总之，对任给$\psi,h\in H_1,h\neq\theta$，都有

$$(\mathrm{grad}_\psi\Psi(\psi+h+\omega)-\mathrm{grad}_\psi\Psi(\psi+\omega),h)>0. \quad (4.31)$$

如果$\Psi(\varphi)$在$H(\omega)$上有两个不同的极小点$\psi_1+\omega$和$\psi_2+\omega$，则

$$\mathrm{grad}_\psi\Psi(\psi_1+\omega)=\mathrm{grad}_\psi\Psi(\psi_2+\omega)=\theta.$$

但由（4.31）式，却有

$$(\mathrm{grad}_\psi\Psi(\psi_2+\omega)-\mathrm{grad}_\psi\Psi(\psi_1+\omega),\ \psi_2-\psi_1)>0,$$

这是一个矛盾.故Ψ在$H(\omega)$上的极小点唯一，从而Ψ在$H(\omega)$上的极小点与最小点一致，令

$$d=\sup_{\omega\in H_2}\Psi(\varphi_\omega)$$

下证d是有限数，在（4.26）式中，令$\psi=\theta$，并利用（4.24）式，有

$$\Psi(\omega)=-\frac{1}{2}\|\omega\|^2-\Phi_1(-B_2^{\frac{1}{2}}\omega)$$

$$\leqslant-\frac{1}{2}\|\omega\|^2+\frac{\beta}{2}\|B_2^{\frac{1}{2}}\omega\|^2+\frac{1}{2}c_1$$

$$\leqslant-\frac{1}{2}(1-\beta\|B_2\|)\|\omega\|^2+\frac{1}{2}c_1 \quad (4.32)$$

仿（4.28）式可以证得$\beta\|B_2\|<1$，故由（4.32）式可知

$$\lim_{\substack{\|\omega\|\to+\infty\\ \omega\in H_2}} \Psi(\omega)=-\infty.$$

注意到$\Psi(\varphi_w)\leqslant\Psi(\theta+\omega)=\Psi(\omega)$，所以

$$\lim_{\substack{\|\omega\|\to+\infty\\ \omega\in H_2}}\Psi(\varphi_\omega)=-\infty.$$

因此，存在H_2中的闭球$S_2=\{\omega\in H_2\,|\,\|\omega\|\leqslant R\}$，使得

$$d=\sup_{\omega\in S_2}\Psi(\varphi_\omega),\quad d>\sup_{\omega\in\partial S_2}\Psi(\varphi_\omega). \tag{4.33}$$

其中∂S_2表S_2在H_2中的边界。对$\psi\in H_1$，$\omega\in S_2$，由（4.27）式知

$$\Psi(\psi+\omega)\geqslant\frac{1}{2}(1-\beta\|B_1\|)\|\psi\|^2$$
$$-\frac{1}{2}(1+\beta\|B_2\|)R^2-\frac{1}{2}c_2.$$

因为$\beta\|B_1\|<1$及$\Psi(\theta+\omega)$在S_2上的有界性，所以可知存在H_1中的闭球S_1，使当$\psi\bar{\in}S_1$时，对任给$\omega\in S_2$，都有

$$\Psi(\psi+\omega)>\Psi(\theta+\omega)+1. \tag{4.34}$$

因此，对每一个$\omega\in S_2$，$\Psi(\varphi)$在$H(\omega)$中的最小点$\varphi_\omega=\psi_\omega+\omega$都满足$\psi_\omega\in S_1$。而$\Psi(\varphi)$在集合$\{\psi+\omega\,|\,\psi\in S_1,\ \omega\in S_2\}$上是有界的，因此，$d<+\infty$。由$d$的定义知$d>-\infty$。故$d$是一个有限数。

取$\{\omega_n\,|\,n=1,2,\cdots\}\subset S_2$，使

$$\lim_{n\to\infty}\Psi(\varphi_{\omega_n})=d.$$

由于L_2中的每一个有界集都是弱列紧的，故存在$\{\omega_n\}$的弱收敛子列，不失一般性，可以假定就是$\{\omega_n\}$本身，弱收敛于某$\omega_0\in S_2$。取$\varphi_0\in H(\omega_0)$，使

$$\Psi(\varphi_0)=\inf_{\varphi\in H(\omega_0)}\Psi(\varphi). \tag{4.35}$$

下证

$$d=\Psi(\varphi_0) \tag{4.36}$$

事实上，取$\psi_0=\varphi_0-\omega_0$，考察泛函$\Psi(\psi_0+\omega)$，则

$$\Psi(\psi_0+\omega)=\frac{1}{2}(\|\psi_0\|^2-\|\omega\|^2)$$
$$-\Phi_1(B_1^{\frac{1}{2}}\psi_0-B_2^{\frac{1}{2}}\omega).$$

因为$B_2^{\frac{1}{2}}$全连续，故$\Phi_1(B_1^{\frac{1}{2}}\psi_0-B_2^{\frac{1}{2}}\omega)$关于$\omega$是弱连续的. 又$\frac{1}{2}(\|\psi_0\|^2-\|\omega\|^2)$关于$\omega$是弱上半连续的，故$\Psi(\psi_0+\omega)$关于$\omega$是弱上半连续的.因为$\omega_n$弱收敛于$\omega_0$，故

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\ \Psi(\psi_0+\omega_n)\leqslant\Psi(\psi_0+\omega_0).$$

又因为$\Psi(\varphi_{\omega_n})\leqslant\Psi(\psi_0+\omega_n)$,故

$$d=\lim_{n\to\infty}\Psi(\varphi_{\omega_n})\leqslant\Psi(\psi_0+\omega_0)=\Psi(\varphi_0).$$

又显然有$d\geqslant\Psi(\varphi_0)$.故$d=\Psi(\varphi_0)$，即（4.36）成立.

下面证明φ_0是方程（4.15）的解，即证明

$$\mathrm{grad}\Psi(\varphi_0)=\theta. \tag{4.37}$$

由于$\Psi(\varphi_0)=\Psi(\psi_0+\omega_0)$是定义在$H_1$上的泛函$\Psi(\psi+\omega_0)$（把$\psi$考虑为自变量）的最小值，所以

$$\mathrm{grad}_\psi\Psi(\psi_0+\omega_0)=\theta. \tag{4.38}$$

因此，由（4.19）式可得

$$\mathrm{grad}\Psi(\varphi_0)=\mathrm{grad}_\psi\Psi(\psi_0+\omega_0)+\mathrm{grad}_\omega\Psi(\psi_0+\omega_0)$$
$$=\mathrm{grad}_\omega\Psi(\psi_0+\omega_0)=-\omega_0+B_2^{\frac{1}{2}}\mathrm{f}_1(B_1^{\frac{1}{2}}\psi_0-B_2^{\frac{1}{2}}\omega_0).$$

这表明$\mathrm{grad}\Psi(\varphi_0)\in H_2$.若（4.37）式不成立，即$\mathrm{grad}\Psi(\varphi_0)\neq\theta$，则令

$$\eta=\frac{\mathrm{grad}\Psi(\varphi_0)}{\|\mathrm{grad}\Psi(\varphi_0)\|}.$$

显然$\eta\in H_2$，$\|\eta\|=1$.由$\mathrm{grad}\Psi$的连续性知存在$\varepsilon_0>0$及φ_0在

L_2中的邻域$U\subset\{\psi+\omega|\psi\in S_1,\ \omega\in S_2\}$，使对任给$\varphi\in U$，都有

$$(\mathrm{grad}\Psi(\varphi),\eta)\geqslant 2\varepsilon_0, \tag{4.39}$$

$$\|\mathrm{grad}\Psi(\varphi)-\mathrm{grad}\Psi(\varphi_0)\|<\frac{\varepsilon_0}{2}. \tag{4.40}$$

令$\tau_t=\omega_0+t\eta(t\geqslant 0)$，则$\tau_t\in H_2$，并且对于任给$\psi\in H_1$，只要$\|\psi-\psi_0\|$充分小，$t$充分小，就有$\psi+\tau_t\in U$.由（4.39）、(4.40)式可知只要$\psi+\tau_t\in U$，就有

$$\begin{aligned}\Psi(\psi+\tau_t)-\Psi(\psi+\omega_0)&=\int_0^1(\mathrm{grad}\Psi(\psi+\omega_0+ts\eta),t\eta)ds\\&=\int_0^1(\mathrm{grad}\Psi(\psi+\omega_0+ts\eta)-\mathrm{grad}\Psi(\psi+\omega_0),t\eta)ds\\&\quad+(\mathrm{grad}\Psi(\psi+\omega_0),t\eta)\\&\geqslant 2t\varepsilon_0-t\varepsilon_0=t\varepsilon_0.\end{aligned}$$

所以，只要$\psi+\tau_t\in U$，就有

$$\Psi(\psi+\tau_t)\geqslant\Psi(\psi+\omega_0)+t\varepsilon_0\geqslant d+t\varepsilon_0. \tag{4.41}$$

下面证明：存在$\varepsilon_1>0$，使得对任给$\psi\in S_1$，当$\psi+\omega_0\bar{\in}U$时，有

$$\|\mathrm{grad}_\psi\Psi(\psi+\omega_0)\|\geqslant 2\varepsilon_1. \tag{4.42}$$

若不然，则存在$\psi_n\in S_1$，$\psi_n+\omega_0\bar{\in}U$，使

$$\lim_{n\to\infty}\|\mathrm{grad}_\psi\Psi(\psi_n+\omega_0)\|=0,$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\|\psi_n-B_1^{\frac{1}{2}}\mathrm{f}_1(B_1^{\frac{1}{2}}\psi_n-B_2^{\frac{1}{2}}\omega_0)\|=0. \tag{4.43}$$

由于$B_1^{\frac{1}{2}}$是全连续的，故存在$\{\psi_n\}$的子列，不失一般可以假定就是$\{\psi_n\}$本身，使得$B_1^{\frac{1}{2}}\psi_n$收敛于某z_0，从而

$$\lim_{n\to\infty}B_1^{\frac{1}{2}}\mathrm{f}_1(B_1^{\frac{1}{2}}\psi_n-B_2^{\frac{1}{2}}\omega_0)=B_1^{\frac{1}{2}}\mathrm{f}_1(z_0-B_2^{\frac{1}{2}}\omega_0).$$

因此，由（4.43）式可知

$$\lim_{n\to\infty}\psi_n = B_1^{\frac{1}{2}}\mathrm{f}_1(z_0 - B_2^{\frac{1}{2}}\omega_0).$$

令$u_0 = B_1^{\frac{1}{2}}\mathrm{f}_1(z_0 - B_2^{\frac{1}{2}}\omega_0)$，则有$u_0 - B_1^{\frac{1}{2}}\mathrm{f}_1(B_1^{\frac{1}{2}}u_0 - B_2^{\frac{1}{2}}\omega_0) = \theta$，即

$$\mathrm{grad}_\psi \Psi(u_0 + \omega_0) = \theta. \tag{4.44}$$

但是另一方面，显然$u_0 + \omega_0 \bar{\in} U$，从而 $u_0 \neq \psi_0$. 因此由（4.31）式可得

$$(\mathrm{grad}_\psi \Psi(u_0 + \omega_0) - \mathrm{grad}_\psi(\psi_0 + \omega_0), u_0 - \psi_0) > 0.$$

此与(4.38)、(4.44)式矛盾，故(4.42)式成立.

因为$S_1 \oplus S_2 = \{\psi + \omega \mid \psi \in S_1, \omega \in S_2\}$是有界集，$B_1^{\frac{1}{2}}$和$B_2^{\frac{1}{2}}$都是全连续算子，故$B(S_1 \oplus S_2)$是列紧集（注意$B = B_1^{\frac{1}{2}} - B_2^{\frac{1}{2}}$），又因$\mathrm{f}_1(\varphi)$在$L_2$上连续，故$\mathrm{f}_1(\varphi)$在$B(S_1 \oplus S_2)$上一致连续，从而

$$\mathrm{grad}_\psi \Psi(\psi + \omega) = \psi - B_1^{\frac{1}{2}}\mathrm{f}_1(B_2^{\frac{1}{2}}\psi - B_2^{\frac{1}{2}}\omega)$$

在$S_1 \oplus S_2$上一致连续.因此，由(4.42)式知必存在$t_0 > 0$，使当$0 \leqslant t \leqslant t_0$时，对一切$\psi \in S_1$，只要$\psi + \tau_t \bar{\in} U$，就有$\|\mathrm{grad}_\psi \Psi(\psi + \tau_t)\| > \varepsilon_1$.同时还可以使$t_0$满足当$0 \leqslant t \leqslant t_0$时$\tau_t \in S_2$. 因此，当$\tau_t(0 \leqslant t \leqslant t_0)$固定时，$\Psi(\psi + \tau_t)$在$(S_1 \oplus S_2) \setminus U$中不可能达到最小值；再注意到(4.34)式，$\Psi(\psi + \tau_t)(0 \leqslant t \leqslant t_0)$在$S_1 \oplus S_2$之外也不能达到最小值，故$\Psi(\psi + \tau_t)(0 \leqslant t \leqslant t_0)$的最小值只能在$U$中达到，特别地，$\Psi(\psi + \tau_{t_0})$的最小点位于$U$中.然而由(4.41)式，当$\psi + \tau_{t_0} \in U$时

$$\Psi(\psi + \tau_{t_0}) \geqslant d + t_0\varepsilon_0,$$

故$\Psi(\psi + \tau_{t_0})$的最小值不小于$d + t_0\varepsilon_0$.这显然与d的定义矛盾.这一矛盾说明$\mathrm{grad}\Psi(\varphi_0) = \theta$.因此方程（4.15）在$L_2$中一定有

解，从而由引理4.1可知方程(4.1)在L_2中一定有解，证完.

定理4.3 设定理4.2的全部条件成立，又设对任给$\varphi\in L_2$，$h\in L_2$，$h\neq\theta$，有

$$(\mathrm{f}(\varphi+h)-\mathrm{f}\varphi,\ h)>\lambda_N\|h\|^2. \tag{4.45}$$

则方程(4.1)在L_2中的解存在并且唯一.

证 先引入一个概念，我们称点$\varphi^*=\psi^*+\omega^*(\psi^*\in H_1$，$\omega^*\in H_2)$是泛函$\Psi$的鞍点，如果$\Psi(\psi+\omega^*)$作为$\psi$的泛函在$\psi=\psi^*$时达到在$H_1$中的极小值，而$\Psi(\psi^*+\omega)$作为$\omega$的泛函在$\omega=\omega^*$时达到在$H_2$中的极大值.下面证明在定理4.3的条件下，$\Psi$的鞍点是存在唯一的.由定理4.2的证明可知，由(4.35)式确定的$\varphi_0(\varphi_0=\psi_0+\omega_0)$是$\Psi$的鞍点，设存在$\varphi_1\neq\varphi_0$，$\varphi_1=\psi_1+\omega_1$ $(\psi_1\in H_1$，$\omega_1\in H_2)$，使得φ_1也是Ψ的鞍点.显然$\psi_0\neq\psi_1$和$\omega_0\neq\omega_1$至少有一个不成立.若$\psi_0\neq\psi_1$，则由定理4.2的证明可知，$\Psi(\psi+\omega_1)$当且仅当$\psi=\psi_1$时达到$\Psi(\psi+\omega_1)$在H_1上的最小值；并且用同样的方法可以证明（此时要用到条件(4.45)式）：$\Psi(\psi_0+\omega)$当且仅当$\omega=\omega_0$时达到$\Psi(\psi_0+\omega)$在H_2上的最大值.因此，

$$\Psi(\psi_1+\omega_1)<\Psi(\psi_0+\omega_1)<\Psi(\psi_0+\omega_0).$$

用完全同样的方法，还可以证明

$$\Psi(\psi_1+\omega_1)>\Psi(\psi_1+\omega_0)>\Psi(\psi_0+\omega_0).$$

这显然是一个矛盾，因此必有$\psi_0=\psi_1$.同理可以证得$\omega_0=\omega_1$.故$\varphi_0=\varphi_1$.这表明Ψ的鞍点存在唯一.

由(4.14)式与(4.19)式易知，Ψ的鞍点必是方程(4.15)的解.反之，我们下面证明方程(4.15)的解一定是Ψ的鞍点，事实上，设$\varphi^*=\psi^*+\omega^*(\psi^*\in H_1,\omega^*\in H_2)$是方程(4.15)的解，则必有

$$\mathrm{grad}_\psi \Psi(\psi^* + \omega^*) = \theta, \quad \mathrm{grad}_\omega \Psi(\psi^* + \omega^*) = \theta.$$

由(4.31)式可知，对任给$h \in H_1$，$h \neq \theta$，有

$$\begin{aligned}
&\Psi(\psi^* + h + \omega^*) - \Psi(\psi^* + \omega^*) \\
&= \int_0^1 \mathrm{grad}_\psi \Psi(\psi^* + th + \omega^*), h) dt \\
&= \int_0^1 (\mathrm{grad}_\psi \Psi(\psi^* + th + \omega^*) - \mathrm{grad}_\psi \Psi(\psi^* + \omega^*), h) dt \\
&> 0,
\end{aligned}$$

故$\Psi(\psi + \omega^*)$当且仅当$\psi = \psi^*$时达到最小值。用类似的方法不难证明，$\Psi(\psi^* + \omega)$作为ω的泛函，当且仅当$\omega = \omega^*$时达到最大值，根据鞍点的定义，φ^*是Ψ的鞍点，由于Ψ的鞍点是存在唯一的，故方程(4.15)的解是存在唯一的。

下证方程(4.7)的解是唯一的。用反证法，设方程(4.7)有两个不同的解φ_1和φ_2，由引理4.1的证明可知$JB\mathrm{f}_1\varphi_1$和$JB\mathrm{f}_1\varphi^2$都是方程(4.15)的解。因为方程(4.15)的解唯一，故$JB\mathrm{f}_1\varphi_1 = JB\mathrm{f}_1\varphi_2$。该式两端用$J$作用，并注意到$J^2 = I$，得$B\mathrm{f}_1\varphi_1 = B\mathrm{f}_1\varphi_2$。所以，由(4.12)式可知

$$\varphi_1 = K_1\mathrm{f}_1\varphi_1 = JBB\mathrm{f}_1\varphi_1 = JBB\mathrm{f}_1\varphi_2 = K_1\mathrm{f}_1\varphi_2 = \varphi_2.$$

产生矛盾。故方程4.7的解是存在唯一的。用类似的方法可以由方程4.7解的存在唯一性推出方程4.1解的存在唯一性。证完。

附注 定理4.2和定理4.3是王声望、楼宇同、冯宝琦〔1〕中证明的。有关的结果还见G.L.Dolph〔1〕。

第四章　非线性积分方程的可解性——拓扑方法

§1　可解性和唯一性

先给出一个一般结果.

定理1.1　设E是Banach空间，E^*是E的共轭空间.设

（1）K是映E入E^*的单调全连续线性算子；

（2）f是映E^*入E的次连续有界算子；

（3）对任给$k>0$，都存在$c(k)\geqslant 0$，使得对任给$\varphi\in E^*$，都有

$$-(\varphi,\ \mathrm{f}\varphi)\geqslant k\|\mathrm{f}\varphi\|-c(k). \tag{1.1}$$

则对任给$\psi\in E^*$，方程

$$\varphi=K\mathrm{f}\varphi+\psi \tag{1.2}$$

在E^*中至少有一个解.

证　根据附录定理2.7，我们只需证明必存在常数$R>0$，使得只要$0\leqslant t\leqslant 1$，φ满足

$$\varphi=tK\mathrm{f}\varphi+\psi, \tag{1.3}$$

就必有$\|\varphi\|\leqslant R$.事实上，若对某$0\leqslant t\leqslant 1$，$\varphi\in E^*$，使得(1.3)式成立，则有

$$(\varphi,\mathrm{f}\varphi)=t(K\mathrm{f}\varphi,\mathrm{f}\varphi)+(\psi,\mathrm{f}\varphi).$$

由于K是单调线性算子，故$(K\mathrm{f}\varphi,\mathrm{f}\varphi)\geqslant 0$.因此，

$$-(\varphi,\mathrm{f}\varphi)\leqslant-(\psi,\mathrm{f}\varphi)\leqslant\|\mathrm{f}\varphi\|\|\psi\|. \tag{1.4}$$

另一方面，取$k\geqslant\|\psi\|+1$，则由(1.1)式可得

$$-(\varphi,\mathrm{f}\varphi)\geqslant k\|\mathrm{f}\varphi\|-c(k). \tag{1.5}$$

由(1.4)、(1.5)两式可得

$$k\|\mathrm{f}\varphi\|\leqslant\|\mathrm{f}\varphi\|\|\psi\|+c(k)\leqslant(k-1)\|\mathrm{f}\varphi\|+c(k),$$

于是$\|\mathrm{f}\varphi\|\leqslant c(k)$.注意到$\varphi$是方程(1.2)的解，故

$$\|\varphi\|\leqslant\|K\mathrm{f}\varphi\|+\|\psi\|\leqslant\|K\|c(k)+\|\psi\|=R,$$

其中$R=\|K\|c(k)+\|\psi\|$是一个常数.证完.

考察Hammerstein型积分方程

$$\varphi(x)=\int_G k(x,y)f(y,\varphi(y))dy+\psi(x). \tag{1.6}$$

设 $K\varphi=\int_G k(x,y)\varphi(y)dy$，$\mathrm{f}\varphi=\mathrm{f}(x,\varphi(x))$.

定理1.2 设:(1)K是映L_1入L_∞的单调全连续线性算子；

(2)对任给$R>0$，存在$g_R(x)\in L_1$，使得当$|u|\leqslant R$时

$$|f(x,u)|\leqslant g_R(x); \tag{1.7}$$

(3)存在常数$R_0>0$及$h(x)\in L_1$，使得当$|u|\geqslant R_0$时有

$$(f(x,u)-h(x))u\leqslant 0. \tag{1.8}$$

则对任给$\psi\in L_\infty$，方程(1.6)在L_∞中至少有一个解.

证 先设$h(x)\equiv 0$.在定理1.1中，取$E=L_1$，$E^*=L_\infty$，则由定理1.2的条件(1)、(2)可知，定理1.1的条件(1)、(2)成立.根据定理1.1，我们只需证明对任给充分大的k，都存在$c(k)\geqslant 0$，使(1.1)式成立即可.事实上，对任意给定的$k\geqslant R_0$，取$R=k$，则对任给$\varphi(x)\in L_\infty$

$$-(\varphi,\mathrm{f}\varphi)=-\int_{G_1}f(x,\varphi(x))\varphi(x)dx$$

$$-\int_{G_2}f(x,\varphi(x))\varphi(x)dx, \tag{1.9}$$

其中$G_1=\{x\in G \mid |\varphi(x)|\leqslant R\}$，$G_2=\{x\in G \mid |\varphi(x)|>R\}$.由条件(2)知

$$\left|\int_{G_1} f(x,\varphi(x))\varphi(x)dx\right|\leqslant\int_{G_1} g_R(x)|\varphi(x)|dx$$
$$\leqslant R\|g_R\|_{L_1}. \tag{1.10}$$

由条件(3)知(已假设$h(x)\equiv 0$)，当$x\in G_2$时

$$-f(x,\varphi(x))\varphi(x)$$
$$=|f(x,\varphi(x)||\varphi(x)|\geqslant R|f(x,\varphi(x)|. \tag{1.11}$$

由(1.9)、(1.10)、(1.11)三式知

$$-(\varphi,f\varphi)\geqslant\int_{G_2} R|f(x,\varphi(x))|dx$$
$$-\left|\int_{G_1} f(x,\varphi(x))\varphi(x)dx\right|$$
$$\geqslant R\|f\varphi\|_{L_1}-\int_{G_1} R|f(x,\varphi(x))|dx-R\|g_R\|_{L_1}$$
$$\geqslant R\|f\varphi\|_{L_1}-2R\|g_R\|_{L_1}=k\|f\varphi\|_{L_1}-2k\|g_R\|_{L_1}.$$

即(1.1)式成立.因此当$h(x)\equiv 0$时结论获证.

若$h(x)\not\equiv 0$，则通过变换

$$f_1(x,u)=f(x,u)-h(x);$$
$$\psi_1=\psi+Kh,$$

就可以化为已讨论的情况.证完.

定理1.3 设$\mathrm{mes}G<+\infty$.又设存在$p>1$，使得

(1)K是映L_q入L_p的全连续单调线性算子，其中q满足$p^{-1}+q^{-1}=1$；

(2)存在常数$b\geqslant 0$及$a(x)\in L_q$，使

$$|f(x,u)|\leqslant a(x)+b|u|^{p-1}; \tag{1.12}$$

(3)存在$R_0>0$及$h(x)\in L_q$，使得当$|u|\geqslant R_0$时

$$(f(x,u)-h(x))u\leqslant 0. \tag{1.13}$$

则对任给$\psi\in L_p$，方程(1.6)在L_p中至少有一个解.

证 由定理1.2的证明可知，我们只需讨论$h(x)\equiv 0$的情况.下面首先证明必存在$c_1>0$，$c_2\geqslant 0$，使得对任给$\varphi\in L_p$，有

$$-(\varphi,\mathrm{f}\varphi)\geqslant c_1\|\mathrm{f}\varphi\|_q^q-c_2. \tag{1.14}$$

设$\varphi\in L_p$给定，令$G_1=\{x\in G\,|\,|\varphi(x)|\leqslant R_0\}$，$G_2=\{x\in G\,|\,|\varphi(x)|>R_0\}$.则

$$-(\varphi,\mathrm{f}\varphi)=-\int_{G_1}f(x,\varphi(x))\varphi(x)dx-$$

$$-\int_{G_2}f(x,\varphi(x))\varphi(x)dx. \tag{1.15}$$

由条件(2)知

$$\left|\int_{G_1}f(x,\varphi(x))\varphi(x)dx\right|\leqslant\int_{G_1}b|\varphi(x)|^p dx$$

$$+\int_{G_1}|\varphi(x)||a(x)|dx\leqslant bR_0^p\operatorname{mes}G$$

$$+\left(\int_{G_1}|\varphi(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\|a(x)\|_q$$

$$\leqslant bR_0^R\operatorname{mes}G+[\operatorname{mes}G]^{\frac{1}{p}}R_0\|a(x)\|_q. \tag{1.16}$$

由条件(2)及两个初等不等式

$$(\alpha+\beta)^\gamma\leqslant 2^{\gamma-1}(\alpha^\gamma+\beta^\gamma)\quad(\alpha\geqslant 0,\beta\geqslant 0,\gamma\geqslant 1),$$

$$(\alpha+\beta)^\gamma\leqslant\alpha^\gamma+\beta^\gamma\quad(\alpha\geqslant 0,\beta\geqslant 0,0<\gamma<1),$$

可知必存在常数$b_1\geqslant 0$和$b_2\geqslant 0$，使

$$|\varphi(x)|\geqslant b_1|f(x,\varphi(x))|^{\frac{1}{p-1}}-b_2|a(x)|^{\frac{1}{p-1}}. \tag{1.17}$$

当$x\in G_2$时，由条件(3)及(1.17)式可得(已假定$h(x)\equiv 0$)

$$-f(x,\varphi(x))\varphi(x)=|f(x,\varphi(x))||\varphi(x)|$$

$$\geqslant b_1|f(x,\varphi(x))|^{\frac{p}{p-1}}-b_2|f(x,\varphi(x))||a(x)|^{\frac{1}{p-1}}.$$

所以

$$-\int_{G_2}f(x,\varphi(x))\varphi(x)dx$$

$$\geqslant b_1\|f\varphi\|_q^q-b_1\int_{G_1}|f(x,\varphi(x))|^q dx-b_2\|a(x)\|_{\frac{p}{q}}^{\frac{q}{p}}\|f\varphi\|_q$$

$$\geqslant b_1\|f\varphi\|_q^q-b_3\|f\varphi\|_q-b_4, \tag{1.18}$$

其中$b_3=b_2\|a(x)\|_{\frac{p}{q}}^{\frac{q}{p}}$，$b_4=\sup\limits_{\varphi\in L_p}b_1\int_{G_1}|f(x,\varphi(x))|^q dx<+\infty$.

由(1.16)、(1.18)两式可知

$$-(\varphi,f\varphi)\geqslant b_1\|f\varphi\|_q^q-b_3\|f\varphi\|_q-b_5, \tag{1.19}$$

其中$b_5=b_4+bR_0^p\,\mathrm{mes}G+[\mathrm{mes}G]^{\frac{1}{p}}R_0\|a(x)\|_q$.由(1.19)式知必存在$c_1>0$，$c_2\geqslant 0$，使(1.14)式成立.

由(1.14)式并注意到$q>1$，可知对任给$k>0$，必存在$c(k)>0$，使对任给$\varphi\in L_p$，都有

$$-(\varphi,\ f\varphi)\geqslant k\|f\varphi\|_q-c(k).$$

在定理1.1中，取$E=L_q$，$E^*=L_p$，即知方程(1.6)在L_p中至少有一个解.证完.

下面讨论唯一性问题.

定理1.4 设定理1.2的假设(1)、(2)成立.又设对每一个$x\in G$，$f(x,u)$是u的减函数，则对每一个$\psi\in L_\infty$，方程(1.6)在L_∞中存在并且仅存在一个唯一解.

证 由(1.7)式知，$f(x,0)\in L_1$.因为$f(x,u)$是u的减函数，故有

$$(f(x,u)-f(x,0))u\leqslant 0.$$

这表明定理1.2的假设(3)成立(令$h(x)=f(x,0)$).根据定理1.2，方程(1.6)在L_∞中至少有一个解.

下面证明方程(1.6)解的唯一性.设

$$\varphi_1-K\mathrm{f}\varphi_1=\psi,\quad \varphi_2-K\mathrm{f}\varphi_2=\psi.$$

则显然有

$$(\varphi_1-\varphi_2,\ \mathrm{f}\varphi_1-\mathrm{f}\varphi_2)-(K\mathrm{f}\varphi_1-K\mathrm{f}\varphi_2,\mathrm{f}\varphi_1-\mathrm{f}\varphi_2)=0.$$

注意到$(K\mathrm{f}\varphi_1-K\mathrm{f}\varphi_2,\mathrm{f}\varphi_1-\mathrm{f}\varphi_2)\geqslant 0$，故有

$$(\varphi_1-\varphi_2,\mathrm{f}\varphi_1-\mathrm{f}\varphi_2)\geqslant 0.$$

因为$f(x,u)$关于u是减的，故

$$(\varphi_1-\varphi_2,\mathrm{f}\varphi_1-\mathrm{f}\varphi_2)=\int_G[\varphi_1(y)-\varphi_2(y)][\mathrm{f}(y,\varphi_1(y))$$
$$-f(y,\varphi_2(y))]dy\leqslant 0.$$

因此，对几乎所有的$y\in G$，都有

$$[\varphi_1(y)-\varphi_2(y)][f(y,\varphi_1(y))-f(y,\varphi_2(y))]=0.$$

令 $G_1=\{y\in G|\varphi_1(y)=\varphi_2(y)\}$，$G_2=\{y\in G|f(y,\varphi_1(y))=f(y,\varphi_2(y))\}$.则显然$\mathrm{mes}(G\backslash(G_1\cup G_2))=0$，并且当$y\in G_1$时必有$y\in G_2$. 于是$\mathrm{mes}G_2=\mathrm{mes}G$. 这表明对几乎一切$y\in G$，都一定有$f(y,\varphi_1(y))=f(y,\varphi_2(y))$,从而

$$\varphi_1=\psi+K\mathrm{f}\varphi_1=\psi+K\mathrm{f}\varphi_2=\varphi_2.$$

这就证明了方程(1.6)的解是唯一的. 证完.

定理1.5 设$\mathrm{mes}G<+\infty$.又设存在$p>1$，使得定理1.3的假设(1)、(2)成立，并且对每一个$x\in G$, $f(x,u)$是u的减函数.则对每一个$\psi\in L_p$，方程(1.6)在L_p中具有唯一解.

定理1.5的证明与定理1.4类似，故从略.

附注 非线性泛函分析中的拓扑方法起源于G.D.Birkhoff和O.D.Kellogg[1].在此基础上,J.Schauder[2]才得以

给出著名的Schauder不动点定理．随后，J．Leray和J．Schauder〔1〕建立了无穷维空间全连续场的拓扑度理论．经过G．S．Dragoni〔1〕，M．Golomb〔1〕〔2〕，C．L．Dolph〔1〕，M．A．Красносельский〔1〕等许多数学家的努力，拓扑度理论已经成为研究非线性积分方程和其它非线性问题的强有力的工具．

利用拓扑度理论研究非线性积分方程早期所获得的结果，已总结在M．A．Красносельский的著名专著〔1〕中．本章主要给出拓扑度理论近二十年来在非线性积分方程可解性理论方程的主要结果．本节的结论是H．Brezis和F．E．Browder〔3〕、〔4〕中证明的．

§2 角有界算子

设E是一个Banach空间，E^*是E的共轭空间．

定义2.1 设T是$D(T)(\subset E)$到E^*的一个算子．如果存在常数$C>0$，使对任给$x,y,z\in D(T)$，有

$$(Tx-Tz,z-y)\leqslant C(Tx-Ty,x-y), \qquad (2.1)$$

则称T是一个角有界算子．

定理2.2 设K是$D(K)(\subset E)$到E^*的一个线性算子，则K是角有界算子的充分必要条件是对任给x，$y\in D(K)$，下列两式成立：

$$(Kx,x)\geqslant 0 \qquad (2.2)$$

$$|(Kx,y)-(Ky,x)|\leqslant\alpha(Kx,x)^{\frac{1}{2}}(Ky,y)^{\frac{1}{2}}, \qquad (2.3)$$

这里，$\alpha\geqslant 0$是一个与x,y无关的常数．

证 设$K:D(K)\to E^*$是一个线性算子，并设(2.2)式成

立．对任给$u,v\in D(K)$，令

$$\langle u,v\rangle=\frac{1}{2}[(Ku,v)+(Kv,u)], \tag{2.4}$$

则显然有$\langle u,u\rangle\geqslant 0$，$\langle u,v\rangle=\langle v,u\rangle$．令

$$N=\{u\in D(K)\mid\langle u,u\rangle=0\}.$$

做商空间$H_0=D(K)/N$，其中对任意的$u\in D(K)$，都可以确定H_0的一个元素$[u]$，$[u]=\{u'\in D(K)\mid u'-u\in N\}$．任给$[u]\in H_0$，$[v]\in H_0$，定义

$$\langle[u],[v]\rangle=\langle u,v\rangle, \tag{2.5}$$

这里$u\in[u]$，$v\in[v]$，则(2.5)式定义了H_0上的一个内积，H_0在该内积下构成一内积空间．任给$[u]\in H_0$，按下式定义$K_0[u]$：

$$\langle K_0[u],[v]\rangle=(Ku,v),\quad\forall[v]\in H_0, \tag{2.6}$$

其中$u\in[u]$，$v\in[v]$．则$K_0: H_0\to H_0$是一个线性算子．令$S=K_0-I$，则

$$\begin{aligned}\langle S[u],[v]\rangle&=(Ku,v)-\langle[u],[v]\rangle\\&=\frac{1}{2}[(Ku,v)-(Kv,u)]=-\langle S[v],[u]\rangle,\end{aligned} \tag{2.7}$$

$$\begin{aligned}\|K_0[u]\|_0^2&=\langle[u]+S[u],[u]+S[u]\rangle\\&=\|[u]\|_0^2+\|S[u]\|_0^2,\end{aligned} \tag{2.8}$$

其中$\|\cdot\|_0$表由$\langle\cdot,\cdot\rangle$导出的$H_0$中的范数．

下面证明定理的结论．必要性．设K是一个角有界的线性算子，则存在常数$C>0$，使对任给$x,y,z\in D(K)$，

$$(Kx-Kz,z-y)\leqslant C(Kx-Ky,x-y). \tag{2.9}$$

在(2.9)式中，令$z=y$，并且用x代替$x-y$，即可知(2.2)式成立．设$u\in D(K)$，$v\in D(K)$给定．对任意实数t，都存在$x,y,z\in D(K)$，使

$$x-y=tu,\quad z-y=v. \tag{2.10}$$

将(2.10)式代入(2.9)式，可得

$$C(Ku,u)t^2-(Ku,v)t+K(v,v)\geq 0 \tag{2.11}$$

由于(2.11)式对任意实数t都成立，故该式与

$$|(Ku,v)|\leq 2C^{\frac{1}{2}}(Ku,u)^{\frac{1}{2}}(Kv,v)^{\frac{1}{2}} \tag{2.12}$$

等价．由(2.6)、(2.12)、(2.4)、(2.5)式可以得到

$$|\langle K_0[u],[v]\rangle|=|(Ku,v)|\leq 2C^{\frac{1}{2}}(Ku,u)^{\frac{1}{2}}(Kv,v)^{\frac{1}{2}}$$

$$=2C^{\frac{1}{2}}\langle[u],[u]\rangle^{\frac{1}{2}}\langle[v],[v]\rangle^{\frac{1}{2}}$$

$$=2C^{\frac{1}{2}}\|[u]\|_0.\|[v]\|_0. \tag{2.13}$$

因此K_0是一个有界线性算子．并且$\|K_0\|\leq 2C^{\frac{1}{2}}$．由(2.8)式知，$S$也是一个有界线性算子，并且

$$\|S\|^2=1+\|K_0\|^2. \tag{2.14}$$

因此，由(2.7)式知

$$|(Ku,v)-K(v,u)|\leq 2\|S\|\|[u]\|\|[v]\|$$

$$=2\|S\|(Ku,u)^{\frac{1}{2}}(Kv,v)^{\frac{1}{2}} \tag{2.15}$$

分别用x,y代替(2.15)式中的u,v，并令$a=2\|S\|$，即知(2.3) 式成立．必要性获证．

充分性．设(2.2)、(2.3)式成立．则任给$u,v\in D(K)$，由(2.7)、(2.3)、(2.4)、(2.5)式可知

$$|\langle S[u],[v]\rangle|=\frac{1}{2}|(Ku,v)-K(v,u)|$$

$$\leq\frac{a}{2}(Ku,u)^{\frac{1}{2}}(Kv,v)^{\frac{1}{2}}=\frac{a}{2}\|[u]\|_0[v]\|_0,$$

因此S是一个有界线性算子，并且$\|S\|\leq\frac{a}{2}$．由(2.8) 式知，K_0也是一个有界线性算子，并且(2.14)式成立．取C，使$2C^{\frac{1}{2}}=$

$\|K_0\|$，则由(2.6)、(2.5)、(2.4)可得

$$|(Ku,v)|=|\langle K_0[u],[v]\rangle|\leqslant\|K_0\|\|[u]\|\|[v]\|$$
$$=\|K_0\|\langle u,u\rangle^{\frac{1}{2}}\langle v,v\rangle^{\frac{1}{2}}=2C^{\frac{1}{2}}(Ku,u)^{\frac{1}{2}}(Kv,v)^{\frac{1}{2}} \quad (2.16)$$

所以(2.11)式对任意实数t都成立。任给x，y，$z\in D(K)$，在(2.11)式中，令

$$u=x-y,\ v=z-y,\ t=1,$$

并经整理即知

$$(Kx-Kz,z-y)\leqslant C(Kx-Ky,x-y). \quad (2.17)$$

因此，K是一个角有界算子.证完

注2.3 定理2.2给出了线性算子是角有界算子的充分必要条件. 由定理2.2可知，如果一个线性算子$K:D(K)\to E^*$满足(2.2)式，并且是一个自共轭算子，则K是角有界算子.

注2.4 由定理2.3的证明，可以得到下列结论：设K是$D(K)\subset E$到E^*的角有界线性算子，令

$$\alpha^*=\inf\{\alpha\,|\,\text{对任给}x,y\in D(K),(2.3)\text{式成立}\} \quad (2.18)$$

$$C^*=\inf\{C\,|\,\text{对任给}x,y,z\in D(K),(2.17)\text{式成立}\}, \quad (2.19)$$

则
$$C^*=\frac{1}{16}[(\alpha^*)^2+4], \quad (2.20)$$

其中α^*称为是K的角有界系数.

下面讨论角有界线性算子的结构.

定理2.5 设E是Banach空间，$K:E\to E^*$是角有界线性算子. 则

(i)存在Hilbert空间H（其内积为$\langle\cdot,\cdot\rangle$），有界线性算子$S:E\to H$和有界线性算子$B:H\to H$，使

$$K=S^*(I+B)S, \quad (2.21)$$

$$B^* = -B, \qquad \|S\|^2 \leqslant \|K\|, \|B\| \leqslant \frac{\alpha^*}{2} \tag{2.22}$$

其中α^*是K的角有界系数，B^*是B的共轭算子，S^*是S的共轭算子；

(ii) $(I+B)^{-1}: H \to H$是有界线性同构，并且对任给$f \in H$，

$$\langle (I+B)^{-1} f, f \rangle \geqslant \frac{4}{4+(\alpha^*)^2} \|f\|; \tag{2.23}$$

(iii) $S^*: H \to E^*$是$1-1$的；

(iv) 如果K是全连续算子，则S也是全连续算子.

证 因为K是线性算子，满足(2.2)式，并且K是定义在E上的，故根据附录引理4.2，K是有界线性算子. 令$K^*: E^{**} \to E^*$是K的共轭算子，

$$K_1 x = \frac{1}{2}(Kx + K^* x), \quad K_2 x = \frac{1}{2}(Kx - K^* x),$$
$$\forall x \in E. \tag{2.24}$$

任给$x, y \in E$，定义

$$\langle x, y \rangle = (K_1 x, y). \tag{2.25}$$

则显然有$\langle x, x \rangle \geqslant 0$，$\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$. 令$N = \{x \in E \mid \langle x, x \rangle = 0\}$，做商空间$H_0 = E/N$，于是对任给$x \in E$，都可以确定$H_0$的一个元素$[x] = \{x' \in E \mid x' - x \in N\}$. 任给$[x] \in H_0$，$[y] \in H_0$，定义内积如下：

$$\langle [x], [y] \rangle = \langle x, y \rangle, \tag{2.26}$$

其中$x \in [x]$，$y \in [y]$. 则H_0在上述内积下为一内积空间. 令H是H_0的完备化空间. 任给$x \in E$，定义

$$Sx = [x]. \tag{2.27}$$

则$S: E \to H$是一个线性算子. 由(2.26)、(2.25)式可知，对任给

$x \in E$,

$$\|Sx\|^2 = \langle Sx, Sx\rangle = \langle [x], [x]\rangle = (K_1 x, x)$$
$$\leqslant \|K_1\| \|x\|^2. \qquad (2.28)$$

由于$\|K_1\| = \|K\|$,故由(2.28)式可知，$\|S\|^2 \leqslant \|K\|$.

因为K是角有界线性算子，所以对任给$x, y \in E$，有

$$|(K_2 x, y)| = \frac{1}{2}|(Kx, y) - (Ky, x)|$$
$$\leqslant \frac{\alpha^*}{2}(Kx, x)^{\frac{1}{2}}(Ky, y)^{\frac{1}{2}}$$
$$= \frac{\alpha^*}{2}\langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}}\langle y, y\rangle^{\frac{1}{2}} = \frac{\alpha^*}{2}\|Sx\|\|Sy\|. \qquad (2.29)$$

于是$\varphi([x], [y]) = (K_2 x, y)$定义了$H_0$上的一个有界双线性泛函.把$\varphi$延拓到$H$上,则存在唯一的线性有界算子$B: H \to H$，使对任给$f, g \in H$,

$$\langle Bf, g\rangle = \varphi(f, g). \qquad (2.30)$$

由φ的定义及(2.29)式易知，$\|B\| \leqslant \frac{\alpha^*}{2}$. 对任给 x，$y \in E$，由(2.24)、(2.25)、(2.27)、(2.30)式得

$$(Kx, y) = (K_1 x, y) + (K_2 x, y) = \langle x, y\rangle + \varphi([x], [y])$$
$$= \langle Sx, Sy\rangle + \langle BSx, Sy\rangle = \langle (I - B)Sx, Sy\rangle$$
$$= \langle S^*(I + B)Sx, y\rangle,$$

所以，$K = S^*(I+B)S$.此外,对任给$[x], [y] \in H_0$,有

$$\langle B^*[x], [y]\rangle = \langle B[y], [x]\rangle = (K_2 y, x)$$
$$= -(K_2 x, y) = \langle -B[x], [y]\rangle,$$

故$B^* = -B$.(i)获证.

由$B^* = -B$可知，对任给$g \in H$，必有$\langle Bg, g\rangle = 0$.因此

$$\langle (I - B)g, g\rangle = \|g\|^2, \quad \forall g \in H,$$

$$\langle (I+B)g,g\rangle=\|g\|^2,\quad \forall g\in H.$$

根据Lax-Milgram定理，$I-B$和$I+B$都有有界逆．注意到$(I+B)^*=I-B$，故$(I+B)^*$有有界逆．因此，由闭值域定理可知$R(I+B)=H$．故$I+B:H\to H$是一个有界线性同构．对任给$f\in H$，令$g=(I+B)^{-1}f$，则

$$\begin{aligned}
&\langle (I+B)^{-1}f,f\rangle=\langle g,(I+B)g\rangle=\|g\|^2\\
&=(1+\|B\|^2)^{-1}[(1+\|B\|^2)\|g\|^2]\\
&\geqslant(1+\|B\|^2)^{-1}(\|g\|^2+\|Bg\|^2)\\
&=(1+\|B\|^2)^{-1}\langle (I+B)g,(I+B)g\rangle\\
&=(1+\|B\|^2)^{-1}\|f\|^2.
\end{aligned}\tag{2.31}$$

注意到$\|B\|\leqslant\frac{\alpha^*}{2}$，故由(2.31)式，知(2.23)式成立．(ii)获证．

因为$R(S)=H_0$在H中稠密，故$S^*:H\to E^*$是1—1的．(iii)获证．最后，设K是紧算子．令$\{u_n\}$是E中的一个有界序列，则必存在$\{u_n\}$的一个子序列$\{u_{n_i}\}$，使$\{Ku_{n_i}\}$是E^*中的柯西序列．于是

$$\begin{aligned}
&\|Su_{n_i}-Su_{n_j}\|^2=\|S(u_{n_i}-u_{n_j})\|^2\\
&=(Ku_{n_i}-Ku_{n_j}),u_{n_i}-u_{n_j})\leqslant\|K\|\|u_{n_i}-u_{n_j}\|^2.
\end{aligned}$$

这表明$\{Su_{n_i}\}$也是一个柯西序列．故S是紧算子，从而是全连续算子．(iv)获证．定理2.5证完．

定义2.6 设E是一个Banach空间，$K:E\to E^*$是一个有界线性算子．如果

$$\mu_K=\inf\left\{\frac{(Kx,x)}{\|Kx\|^2}\,\middle|\,x\in E,Kx\neq 0\right\}>-\infty,\tag{2.32}$$

则称K是一个拟正算子．

引理2.7 设$K:E\to E^*$是角有界的线性算子，则存在常

数$d>0$，使

$$(Kx,x)\geqslant d\|Kx\|^2,\quad \forall x\in E. \tag{2.33}$$

因此，角有界线性算子是拟正的.

证 根据定理2.5，存在Hilbert空间H，有界线性算子S：$E\to H$和有界线性算子B:$H\to H$，使$K=S^*(I+B)S$，并且使(2.23)式成立.由定理2.5知$\|S\|^2\leqslant\|K\|$，故

$$\begin{aligned}\|Kx\|^2&=\|S^*(I+B)Sx\|^2\leqslant\|S^*\|^2\|(I+B)Sx\|^2\\&\leqslant\|K\|\|(I+B)Sx\|^2.\end{aligned} \tag{2.34}$$

令$f=(I+B)Sx$，则$Sx=(I+B)^{-1}f$. 根据(2.23)、(2.34)两式，有

$$\begin{aligned}(Kx,x)&=\langle(I+B)Sx,Sx\rangle=\langle f,(I+B)^{-1}f\rangle\\&=\langle(I+B)^{-1}(I+B)Sx,(I+B)Sx\rangle\\&\geqslant\frac{4}{4+(\alpha^*)^2}\|(I+B)Sx\|^2\\&\geqslant\frac{4}{4+(\alpha^*)^2}\|K\|^{-1}\|Kx\|^2.\end{aligned} \tag{2.35}$$

在(2.35)式中，令$d=\dfrac{4}{4+(\alpha^*)^2}\|K\|^{-1}$，即知(2.33)式成立.证完.

设E是一个Banach空间，E^*是E的共轭空间，H是一个Hilbert空间，H中的内积用$\langle\cdot,\cdot\rangle$表示. 如果(i)$E^*$嵌入$H$，$H$嵌入$E$；(ii)对一切$f\in E^*$和$x\in H$，$(f,x)=\langle f,x\rangle$；(iii)$H$在$E$中稠密.则称$(E,H,E^*)$处于正规位置.

如果$p\geqslant 2$，$p^{-1}+q^{-1}=1$，G是R^N中的有界区域，则$(L_q(G),L_2(G),L_p(G))$处于正规位置.

定义2.8 设(E,H,E^*)处于正规位置，K：$E\to E^*$是一个有界线性算子. 如果

$$\gamma_K=\inf\left\{\frac{(Kx,x)}{\|Kx\|_H^2}\,\middle|\,x\in E, Kx\neq 0\right\}>-\infty, \quad (2.36)$$

这里$\|\cdot\|_H$表示H中的范数，则K称为是拟增生算子。

显然，拟增生算子一定是拟正的。

若$K:E\to E^*$是拟增生线性算子。对任给$x\in H$，令$K_Hx=Kx$，则显然K_H定义了一个映H入H的有界线性算子。下面的K_H都是这样定义的。

引理2.9 设$K:E\to E^*$是拟增生的线性算子，$\lambda<\gamma_K$。则

(i) $I-\lambda K_H:H\to H$是1—1的；

(ii) $R(I-\lambda K_H)$是H的闭线性子空间。

证 若$u\in H, u-\lambda K_Hu=0$，则

$$0=\langle K_Hu, u-\lambda K_Hu\rangle$$
$$=(Ku,u)-\lambda\|K_Hu\|_H^2\geqslant(\gamma_K-\lambda)\|K_Hu\|_H^2.$$

故$K_Hu=0$，亦即$u=0$。(i)获证。

设$v_n\in R(I-\lambda K_H)$，$v_n\to v$。则存在$u_n\in H$，使得$v_n=(I-\lambda K_H)u_n$。于是

$$\|K_Hu_n\|_H\|v_n\|\geqslant\langle K_Hu_n, v_n\rangle$$
$$=\langle K_Hu_n, u_n-\lambda K_Hu_n\rangle=(Ku_n,u_n)-\lambda\|K_Hu_n\|_H^2$$
$$\geqslant(\nu_K-\lambda)\|K_Hu_n\|_H^2.$$

显然由上式可知，$\{K_Hu_n\}$在H中是有界的。因此，$\{K_Hu_n\}$有一子列，不失一般，可以假定就是$\{K_Hu_n\}$本身弱收敛于H中的某一元素w。于是$u_n\xrightarrow{弱}v+\lambda w$。令$z=v+\lambda w$，则由$K_H$的有界性可知，$K_Hu_n\xrightarrow{弱}K_Hz$，注意到$K_Hu_n\xrightarrow{弱}w$，故$w=K_Hz$。所以$v=z-\lambda w=z-\lambda K_Hz$，即$v\in R(I-\lambda K_H)$。(ii)获证。引理2.9证完。

引理2.10 设$K:E\to E^*$是拟增生的全连续线性算子，$\lambda<$

v_K.则

(i) $R(I-\lambda K_H)=H$;

(ii) $K_\lambda=(I-\lambda K_H)^{-1}K$: $E\to E^*$是单调的全连续线性算子，从而是拟正算子.

证 因为$\lambda<v_K$，故λ不是K_H的特征值.根据全连续线性算子的Riesz-Schauder理论，(i)成立.显然$(I-\lambda K_H)^{-1}$:$H\to H$是有界线性算子，故K_λ: $E\to H$是全连续线性算子.任给$x\in E$，令$y=K_\lambda x=(I-\lambda K_H)^{-1}Kx$，则$y=\lambda K_H y+Kx=\lambda Ky+Kx\in E^*$.因此，$K_\lambda$:$E\to E^*$是全连续线性算子. 对任给$u\in H$，易知

$$(I-\lambda K_H)^{-1}K_H u=K_H(I-\lambda K_H)^{-1}u.$$

因此，对任给$u\in H$，令$v=(I-\lambda K_H)^{-1}u$，则有

$$\begin{aligned}\langle K_\lambda u,u\rangle&=((I-\lambda K_H)^{-1}K_H u,u)\\&=(K_H(I-\lambda K_H)^{-1}u,u)=(K_H v,(I-\lambda K_H)v)\\&=\langle Kv,v\rangle-\lambda\|Kv\|_H^2\geqslant 0\,.\end{aligned}\qquad(2.37)$$

又因为K_λ映E入E^*是连续的，并且H在E中是稠密的，故(2.37)式对任给$u\in E$，都是成立的.证完.

定义2.11 设(E,H,E^*)处于正规位置，K:$E\to E^*$是一个拟增生的线性算子. 如果存在常数$\alpha<\gamma_K$及$\gamma\geqslant 0$，使得对任给$x,y\in E$，都有

$$\begin{aligned}&|(Kx,y)-(Ky,x)|\\&\leqslant\gamma[(Kx,x)-\alpha\|Kx\|_H^2]^{\frac{1}{2}}[(Ky,y)-\alpha\|Ky\|_H^2]^{\frac{1}{2}},\end{aligned}\qquad(2.38)$$

则称K是拟角有界算子.

显然，拟增生自共轭算子是拟角有界的.

引理2.12 设K:$E\to E^*$是拟角有界的全连续线性算子，$\lambda\leqslant\alpha$，其中α如定义2.11所述，则$K_\lambda=(I-\lambda K_H)^{-1}K$: $E\to$

E^*是角有界的.

证 任给$u,v\in H$,令$x=(I-\lambda K_H)^{-1}u$, $y=(I-\lambda K_H)^{-1}v$. 则由(2.38)式可知，有

$$
\begin{aligned}
&|(K_\lambda u,v)-(K_\lambda v,u)| \\
&=|((I-\lambda K_H)^{-1}Ku,v)-((I-\lambda K_H)^{-1}Kv,u)| \\
&=|(K(I-\lambda K_H)^{-1}u,v)-(K(I-\lambda K_H)^{-1}v,u)| \\
&=|(Kx,y)-(Ky,x)|\leqslant\gamma(Kx, \\
&\quad (I-\lambda K_H)x)^{\frac{1}{2}}(Ky,(I-\lambda K_H)y)^{\frac{1}{2}} \\
&=\gamma(K_\lambda u,u)^{\frac{1}{2}}(K_\lambda v,v)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}
\tag{2.39}
$$

由于$K_\lambda:E\to E^*$是连续的，H在E中稠密，故(2.39)式对任给$u,v\in E$都成立.这表明K_λ是角有界的.证完.

例2.13 设$\varphi_i(t)\in C[0,1]$($1\leqslant i\leqslant n$)，$a_i>0$($1\leqslant i\leqslant n$)，$b_{ij}\neq 0$($1\leqslant i\leqslant n$, $1\leqslant j\leqslant n$).令

$$
k(t,s)=\sum_{i=1}^{n}a_i\varphi_i(t)\varphi_i(s)+\sum_{i,j=1}^{n}b_{ij}[\varphi_i(t)\varphi_j(s)-\varphi_i(s)\varphi_j(t)]
\tag{2.40}
$$

$$
Kx(t)=\int_0^1 k(t,s)x(s)ds.
\tag{2.41}
$$

下面证明：$K:L_2\to L_2$是角有界算子.

证 任给$x(t)\in L_2$, $y(t)\in L_2$,利用Cauchy不等式，可得

$$
\begin{aligned}
&|(Kx,y)-(Ky,x)| \\
&=|2\sum_{i,j=1}^{n}b_{ij}[(\varphi_i,x)(\varphi_j,y)-(\varphi_i,y)(\varphi_j,x)]|^2 \\
&\leqslant 4\left\{\sum_{i,j=1}^{n}|b_{ij}|[(\varphi_i,x)^2+(\varphi_j,x)^2]\right\}
\end{aligned}
$$

$$\cdot\left\{\sum_{i,\ j=1}^{n}|b_{i_j}|[(\varphi_i,y)^2+(\varphi_j,y)^2]\right\}$$

$$\leqslant 16b^2n^2\sum_{i=1}^{n}(\varphi_i,x)^2\sum_{i=1}^{n}(\varphi_i,y)^2. \qquad (2.42)$$

其中，$b=\max\limits_{1\leqslant i,\ j\leqslant n}|b_{i_j}|$.另一方面，

$$(Kx,x)=\sum_{i=1}^{n}a_i(\varphi_i,x)^2\geqslant c\sum_{i=1}^{n}(\varphi_i,x)^2, \qquad (2.43)$$

其中$c=\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}a_i>0$. 由(2.42)、(2.43)两式即可知$K$是角有界算子.证完.

满足(2.40)式的一个具体例子是

$$K(t,s)=1-t+s+ts.$$

附注 线性角有界算子的概念是H.Amann〔5〕中提出的.定义2.1和定理2.2是属于H.Brezis和F.E.Browder〔4〕的.定理2.5是F.E.Browder和C.P.Gupta〔1〕证明的.

本节的其余部分见H.Amann〔6〕、〔4〕, C.P.Gupta〔1〕,D.Pascali和S.Sburlan〔1〕.

§3 含有线性角有界算子的非线性积分方程

本节将研究含有线性角有界算子的Hammerstein型非线性积分方程解的存在性.为了使本节的结论更具有一般性，我们将对抽象Hammerstein型积分方程

$$\varphi=Kf\varphi \qquad (3.1)$$

给出本节的主要结果.由此，读者不难自行给出Hammerstein型积分方程

$$\varphi(x)=\int_G k(x,y)f(y,\varphi(y))dy \tag{3.2}$$

在具体函数空间中的可解性条件.在本节中，我们总假定E是一个Banach空间，E^*是E的共轭空间.

定理3.1 设(1)K是映E入E^*的拟正的全连续线性算子；

(2)f是映E^*入E的有界次连续算子；

(3)存在函数$\beta: R^+ \to R^+$,

$$\lim_{\rho\to+\infty}\beta(\rho)\rho^{-2}=0, \tag{3.3}$$

以及$\lambda<\mu_K$(μ_K的意义见定义2.6)，使得对任给$\varphi\in E^*$，都有

$$(\varphi,\mathrm{f}\varphi)\leqslant\lambda\|\varphi\|^2+\beta(\|\varphi\|). \tag{3.4}$$

则方程(3.1)在E^*中至少有一个解.

证 显然，$K\mathrm{f}: E^*\to E^*$是全连续算子. 由(3.3)式知，存在$R>0$，使

$$\mu_K-\lambda-\beta(R)R^{-2}>0. \tag{3.5}$$

设存在$\varphi\in E^*$，$\|\varphi\|=R$，$0\leqslant t\leqslant 1$，使$\varphi=tK\mathrm{f}\varphi$.则由(3.4)式可知

$$\begin{aligned}0&=(\varphi,\mathrm{f}\varphi)-t(K\mathrm{f}\varphi,\mathrm{f}\varphi)\\&\leqslant\lambda\|\varphi\|^2+\beta(\|\varphi\|)-t(K\mathrm{f}\varphi,\mathrm{f}\varphi)\\&\leqslant\lambda\|\varphi\|^2+\beta(\|\varphi\|)-t\mu_K\|K\mathrm{f}\varphi\|^2\\&=\lambda\|\varphi\|^2+\beta(\|\varphi\|)-\frac{\mu_K}{t}\|\varphi\|^2\\&\leqslant[\lambda-\mu_K+\beta(R)R^{-2}]R^2,\end{aligned}$$

此与(3.5)式矛盾.因此，对任给$\varphi\in E^*$，$\|\varphi\|=R$，$0\leqslant t\leqslant 1$，都有$\varphi\neq tK\mathrm{f}\varphi$.故$\deg(I-K\mathrm{f},B_R,0)=1$，其中$B_R=\{\varphi\in E^* \mid \|\varphi\|<R\}$.这表明方程(3.1)在$B_R$中至少有一个解.证完.

注3.2 在定理3.1中，如果$\beta(\rho)$满足：存在$\rho_0>0$，使

对任给$\rho\geqslant\rho_0$，$\beta(\rho)\equiv 0$，则条件“$\lambda<\mu_K$”可以放宽为“$\lambda\leqslant\mu_K$”.

定理3.3 设E是Banach空间，E^*是E的共轭空间，H是Hilbert空间，(E,H,E^*)处于正规位置.又设：

(1) K是映E入E^*的拟增生的全连续线性算子；

(2) $\mathfrak{f}$是映E^*入E的有界次连续算子；

(3) 存在$\rho>0$及$\lambda<\nu_K$(ν_K的意义见定义2.8).使得对任给$\varphi\in E^*$，只要$\|\varphi\|\geqslant\rho$，就有

$$(\varphi,\mathfrak{f}\varphi)\leqslant\lambda\|\varphi\|_H^2. \tag{3.6}$$

则方程(3.1)在E^*中至少有一个解.

证 因为$\lambda<\nu_K$，故根据引理2.10,

$$K_\lambda=(I-\lambda K_H)^{-1}K \tag{3.7}$$

是映E入E^*的单调（从而拟正）线性全连续算子.令

$$\mathfrak{f}_\lambda\varphi=\mathfrak{f}\varphi-\lambda\varphi,\quad\forall\varphi\in E^* \tag{3.8}$$

则$\mathfrak{f}_\lambda$是映E^*入E的有界次连续算子.由(3.6)、(3.8)两式可知，对任给$\varphi\in E^*$，$\|\varphi\|\geqslant\rho$，有

$$(\varphi,\mathfrak{f}_\lambda\varphi)\leqslant 0.$$

故根据定理3.1及注3.2（在其中取$\lambda=\mu_{K_\lambda}=0$，$\beta(\rho)\equiv 0$），即知方程

$$\varphi=K_\lambda\mathfrak{f}_\lambda\varphi \tag{3.9}$$

在E^*中至少有一个解φ^*.于是,

$$\varphi^*=(I-\lambda K_H)^{-1}K(\mathfrak{f}\varphi^*-\lambda\varphi^*). \tag{3.10}$$

用$I-\lambda K_H$作用在(3.10)式两端，即得$\varphi^*=K\mathfrak{f}\varphi^*$.证完.

定理3.4 设(E,H,E^*)处于正规位置.又设:

(1) K是映E入E^*的拟角有界的全连续线性算子；

(2) $\mathfrak{f}$是映E^*入E的有界次连续算子；

（3）存在函数$\beta: R^+ \to R^+$,

$$\lim_{\rho \to +\infty} \beta(\rho)\rho^{-2} = 0, \tag{3.11}$$

及$\lambda \leqslant \alpha$（α的意义见定义2.11），使得

$$(\varphi, \mathrm{f}\varphi) \leqslant \lambda \|\varphi\|_H^2 + \beta(\|\varphi\|_{E^*}), \quad \forall \varphi \in E^*. \tag{3.12}$$

则方程(3.1)在E^*中至少有一个解.

证 因为$\lambda \leqslant \alpha$，故根据引理2.12知，由(3.7)式定义的算子K_λ是映E入E^*的角有界的全连续算子. 根据引理2.7, K_λ是拟正的，并且$\mu_{K_\lambda} > 0$. 令f_λ由(3.8)式定义，并考察方程(3.9). 由(3.12)式可知对任给$\varphi \in E^*$，有

$$(\varphi, \mathrm{f}_\lambda \varphi) \leqslant \beta(\|\varphi\|_{E^*}).$$

根据定理3.1（令$\lambda = 0$）可知，方程(3.9)在E^*中至少有一个解. 由定理3.3的证明可知，该解即为方程(3.1)的解. 证完.

定理3.5 设E是Banach空间，E^*是E的共轭空间. 又设：

（1）K是映E入E^*的角有界的全连续线性算子，α^*是K的角有界系数（参见(2.18)式）；

（2）f是映E^*入E的有界次连续算子；

（3）存在$R > 0$，使对任给$\varphi \in E^*$，$\|\varphi\| \geqslant R$，有

$$(\varphi, \mathrm{f}\varphi) \leqslant \frac{4}{4 + (\alpha^*)^2} \|K\|^{-1} \|\varphi\|. \tag{3.13}$$

则方程(3.1)至少有一个解.

证 令$\Omega = \{\varphi \in E^* \mid \|\varphi\| < R\}$. 设存在$\varphi \in \partial\Omega$，$0 \leqslant t < 1$，使$\varphi = tK\mathrm{f}\varphi$. 于是，

$$0 = (\varphi, \mathrm{f}\varphi) - t(K\mathrm{f}\varphi, \mathrm{f}\varphi). \tag{3.14}$$

根据定理2.5，$K = S^*(I + B)S$，并且$B^* = -B$. 因此，对$g \in H$，有$\langle Bg, g \rangle = 0$. 故对任给$\psi \in E$，有

$$(K\psi,\psi)=(S^*(I+B)S\psi,\psi)$$
$$=\langle (I+B)S\psi,\psi\rangle=\|S\psi\|_H^2. \tag{3.15}$$

另一方面

$$\|K\psi\|^2=\|S^*(I+B)S\psi\|^2\leqslant\|S^*\|^2\|(I+B)S\psi\|^2. \tag{3.16}$$

注意到(2.22)式，有

$$\|(I+B)S\psi\|^2=\langle S\psi+BS\psi,S\psi+BS\psi\rangle$$
$$=\|S\psi\|^2+\|BS\psi\|^2\leqslant(1+\|B\|^2)\|S\psi\|^2$$
$$\leqslant\left[1+\frac{(\alpha^*)^2}{4}\right]\|S\psi\|^2. \tag{3.17}$$

由(3.15)、(3.16)、(3.17)三式，并注意到

$$\|S^*\|^2=\|S\|^2\leqslant\|K\|,$$

可得

$$(K\psi,\psi)\geqslant\frac{4}{4+(\alpha^*)^2}\|K\|^{-1}\|K\psi\|^2. \tag{3.18}$$

由(3.14)、(3.18)两式可得

$$0\leqslant(\varphi,\mathrm{f}\varphi)-\frac{4t}{4+(\alpha^*)^2}\|K\|^{-1}\|K\mathrm{f}\varphi\|^2.$$

$$=(\varphi,\mathrm{f}\varphi)-\frac{4}{[4+(\alpha^*)^2]t}\|K\|^{-1}\|\varphi\|^2$$

$$<(\varphi,\mathrm{f}\varphi)-\frac{4}{4+(\alpha^*)^2}\|K\|^{-1}\|\varphi\|^2.$$

此与(3.13)式矛盾.因此，对任给$\varphi\in E^*$，$\|\varphi\|=R$，$0\leqslant t<1$，都有$\varphi\neq tK\mathrm{f}\varphi$.这表明方程(3.1)在$E$中至少有一个解.证完.

定理3.6 设E是Banach空间，E^*是E的共轭空间. 又设:

(1) K是映E入E^*的角有界线性算子，α^*是K的角有界系数（参见(2.18)式）；

(2) f是映E^*入E的次连续算子，并且存在常数$k\geqslant 0$，使

对一切$\varphi_1 \in E^*$，$\varphi_2 \in E^*$，有

$$(\varphi_1-\varphi_2,\ \mathfrak{f}\varphi_1-\mathfrak{f}\varphi_2)\leqslant k\|\varphi_1-\varphi_2\|^2; \tag{3.19}$$

（3）$k\left(1+\frac{\alpha^{*2}}{4}\right)\|K\|<1$.

则方程(3.1)在E^*中有且仅有一个解.

证 因为K是映E入E^*的角有界线性算子，故根据定理2.5，存在Hilbert空间H（其内积为$\langle\cdot,\cdot\rangle$），有界线性算子$S$：$E\to H$和有界线性算子$B:H\to H$，使$K=S^*(I+B)S$，并且定理2.5的结论(i)、(ii)、(iii)成立.

下面首先证明方程

$$\psi=(I+B)S\mathfrak{f}S^*\psi \tag{3.20}$$

在H中有唯一解．事实上，由定理2.5结论(ii)可知，方程(3.20)与

$$(I+B)^{-1}\psi=S\mathfrak{f}S^*\psi \tag{3.21}$$

是等价的．令$T=(I+B)^{-1}-S\mathfrak{f}S^*$，则对任给$\psi_1,\psi_2\in H$，

$$\langle T\psi_1-T\psi_2,\psi_1-\psi_2\rangle=\langle (I+B)^{-1}(\psi_1-\psi_2),\psi_1-\psi_2\rangle$$
$$-\langle S\mathfrak{f}S^*\psi_1-S\mathfrak{f}S^*\psi_2,\psi_1-\psi_2\rangle.$$

由定理2.5之结论(ii)，有

$$\langle (I+B)^{-1}(\psi_1-\psi_2),\psi_1-\psi_2\rangle$$
$$\geqslant\frac{4}{4+(\alpha^*)^2}\|\psi_1-\psi_2\|^2. \tag{3.22}$$

另一方面，由定理2.5结论(i)及(3.19)式，有

$$\langle S\mathfrak{f}S^*\psi_1-S\mathfrak{f}S^*\psi_2,\psi_1-\psi_2\rangle$$
$$=(S^*\psi_1-S^*\psi_2,\mathfrak{f}S^*\psi_1-\mathfrak{f}S^*\psi_2)\leqslant k\|S^*\psi_1-S^*\psi_2\|^2$$
$$\leqslant k\|S^*\|^2\|\psi_1-\psi_2\|^2\leqslant k\|K\|\|\psi_1-\psi_2\|^2. \tag{3.23}$$

由(3.22)、(3.23)两式可知

$$\langle T\psi_1-T\psi_2,\psi_1-\psi_2\rangle$$

$$\geqslant \frac{4}{4+(\alpha^*)^3}\|\psi_1-\psi_2\|^2-k\|K\|\|\psi_1-\psi_2\|^2$$

$$=\left(\frac{4}{4+(\alpha^*)^2}-k\|K\|\right)\|\psi_1-\psi_2\|^2=c\|\psi_1-\psi_2\|^2, \quad (3.24)$$

其中$c=\dfrac{4}{4+(\alpha^*)^2}-k\|K\|>0$.因此，$T$是1—1的强单调次连续映射.

对任给$\psi\in H$，由(3.24)式可知，对任给$\psi\in H$，有

$$\langle T\psi,\psi\rangle=\langle T\psi-T\theta,\psi-\theta\rangle+\langle T\theta,\psi\rangle$$
$$\geqslant c\|\psi\|^2-\|T\theta\|\|\psi\|,$$

所以T在H上又是强制的. 因此，根据附录定理4.12，方程(3.21)，亦即方程(3.20)在H上有唯一解.

设ψ^*是方程(3.20)在H上的唯一解，即

$$\psi^*=(I+B)S\mathsf{f}S^*\psi^*. \quad (3.25)$$

以S^*作用在(3.25)式两端，并令$\varphi^*=S^*\psi^*$，即知

$$\varphi^*=S^*(I+B)S\mathsf{f}\varphi^*=K\mathsf{f}\varphi^*,$$

即φ^*是方程(3.1)的解.设方程(3.1)还有一个解$\varphi_1^*\neq\varphi^*$，则由定理2.5的结论（iii）知，$(S^*)^{-1}\varphi_1^*\neq\psi^*$，并且容易验证，$(S^*)^{-1}\varphi_1^*$也是方程(3.20)的解，此与方程(3.20)解的唯一性矛盾.综上所述，方程(3.1)在E^*上的解存在且唯一.证完.

注3.7 由定理3.6容易知道，对任给$\psi\in E^*$，方程

$$\varphi=K\mathsf{f}\varphi+\psi \quad (3.26)$$

在E^*中的解存在唯一.因此，算子$(I-K\mathsf{f})^{-1}$在E^*上有定义，并且是单值的.

定理3.8 设定理3.6的全部条件满足，并进一步假定f：$E^*\to E$连续.则$(I-K\mathsf{f})^{-1}$：$E^*\to E^*$连续.

证 设$\psi_n \in E^*$，$\psi_n \to \psi_0$. 令$\varphi_n = (I - K\mathsf{f})^{-1}\psi_n$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$，$u_n = \varphi_n - \psi_n (n = 0, 1, 2, \cdots)$. 则根据定理2.5知

$$u_n = K\mathsf{f}(u_n + \psi_n) = S^*(I + B)S\mathsf{f}(u_n + \psi_n) \quad (n = 0, 1, 2, \cdots).$$

令$h_n = (I + B)S\mathsf{f}(u_n + \psi_n)$，则$u_n = S^* h_n$. 于是

$$h_n = (I + B)S\mathsf{f}(S^* h_n + \psi_n) \quad (n = 0, 1, 2, \cdots). \quad (3.27)$$

(3.27) 式两端以$(I + B)^{-1}$作用之，得

$$(I + B)^{-1} h_n = S\mathsf{f}(S^* h_n + \psi_n) \ (n = 0, 1, 2, \cdots). \ (3.28)$$

于是，由定理2.5及(3.28)式，可得

$$\begin{aligned}
&\frac{4}{4 + (\alpha^*)^2} \|h_n - h_0\|^2 \leqslant \langle (I + B)^{-1}(h_n - h_0), h_n - h_0 \rangle \\
&= \langle S\mathsf{f}(S^* h_n + \psi_n) - S\mathsf{f}(S^* h_0 + \psi_0), h_n - h_0 \rangle \\
&= (\mathsf{f}(S^* h_n + \psi_n) - \mathsf{f}(S^* h_0 + \psi_0), S^*(h_n - h_0)) \\
&= (\mathsf{f}(S^* h_n + \psi_n) - \mathsf{f}(S^* h_0 + \psi_n), S^*(h_n - h_0)) \\
&\quad + (\mathsf{f}(S^* h_0 + \psi_n) - \mathsf{f}(S^* h_0 + \psi_0), S^*(h_n - h_0)) \\
&\leqslant k\|S^*\|^2 \|h_n - h_0\|^2 + \|S^*\| \|h_n - h_0\| \|\mathsf{f}(S^* h_0 + \psi_n) \\
&\quad - \mathsf{f}(S^* h_0 + \psi_n)\| \leqslant k\|K\| \|h_n - h_0\|^2 \\
&\quad + \|S\| \|h_n - h_0\| \|\mathsf{f}(S^* h_0 + \psi_n) - \mathsf{f}(S^* h_0 + \psi_n)\|. \quad (3.29)
\end{aligned}$$

由定理3.6的条件(3)知，$\frac{4}{4 + (\alpha^*)^2} - k\|K\| > 0$. 故由(3.29)式及f的连续性可知，有

$$\lim_{n \to \infty} h_n = h_0.$$

于是$\lim\limits_{n \to \infty} u_n = u_0$，从而$\lim\limits_{n \to \infty} \varphi_n = \varphi_0$. 这表明$(I - K\mathsf{f})^{-1}$是连续的. 证完.

注3.9 在定理3.6及定理3.8中，我们并没有假定K是全连续线性算子.

定理3.10 设E是Banach空间，E^*是E的共轭空间，H是Hilbert空间，(E, H, E^*)处于正规位置. 又设

（1）K是映E入E^*的拟角有界的全连续线性算子；

（2）f是映E^*入E的次连续算子；

（3）存在$\lambda \leqslant \alpha$（α的意义见定义2.11），使得对任给φ_1，$\varphi_2 \in E^*$，都有

$$(\varphi_1 - \varphi_2, \mathrm{f}\varphi_1 - \mathrm{f}\varphi_2) \leqslant \lambda \|\varphi_1 - \varphi_2\|_H^2. \tag{3.30}$$

则方程(3.1)在E^*中有且仅有一个解.

证 考察方程(3.9)，其中K_λ和f_λ分别由(3.7)和(3.8)式定义.由第三章引理3.8可知，我们只需证明方程(3.9)在E^*中有且仅有一个解.

由(3.30)式知，对任给φ_1，$\varphi_2 \in E^*$，有

$$(\varphi_1 - \varphi_2,\ \mathrm{f}_\lambda\varphi_1 - \mathrm{f}_\lambda\varphi_2) \leqslant 0\ . \tag{3.31}$$

由引理2.12知K_λ是角有界算子，因此，根据定理3.6，方程(3.9)在E^*中有且仅有一个解.证完.

附注 利用线性角有界算子的概念研究非线性积分方程可解性，是H.Amann〔5〕中提出的.本节的结果及其进一步讨论，可见H.Amann〔4〕，C.P.Gupta〔1〕，F.E.Browder和C.P.Gupta〔1〕，F.E.Browder〔1〕.

利用线性角有界算子研究非线性积分方程的其它工作可见C.P.Gupta〔2〕，W.V.Petryshyn和P.M.Fitzpatrick〔1〕，M.Backwinkel-Schillings〔1〕，J.Berger和J.Robert〔1〕等.

§4 含有非线性角有界算子的非线性积分方程

先给出某些一般性定理.

定理4.1 设E是自反的Banach空间，$K: E\to E^*$是半连续有界单调算子（不假定K是线性的），$\mathrm{f}: E^*\to E$是有界半连续的角有界算子.则对任给$\psi\in E^*$，方程

$$\varphi+K\mathrm{f}\varphi=\psi \tag{4.1}$$

在E^*中具有唯一解.

证 设φ_1和φ_2都是方程(4.1)的解,则有$\varphi_1-\varphi_2+K\mathrm{f}\varphi_1-K\mathrm{f}\varphi_2=0$.于是

$$(\varphi_1-\varphi_2,\mathrm{f}\varphi_1-\mathrm{f}\varphi_2)+(K\mathrm{f}\varphi_1-K\mathrm{f}\varphi_2,\mathrm{f}\varphi_1-\mathrm{f}\varphi_2)=0. \tag{4.2}$$

由于K是单调的，故$(K\mathrm{f}\varphi_1-K\mathrm{f}\varphi_2,\ \mathrm{f}\varphi_1-\mathrm{f}\varphi_2)\geqslant 0$.由于f是角有界的，故f也是单调的，即$(\varphi_1-\varphi_2,\mathrm{f}\varphi_1-\mathrm{f}\varphi_2)\geqslant 0$. 因此由(4.2)式知，必有

$$(\varphi_1-\varphi_2,\mathrm{f}\varphi_1-\mathrm{f}\varphi_2)=0. \tag{4.3}$$

根据角有界算子的定义知，对任给$\varphi\in E^*$，有

$$(\varphi-\varphi_2,\mathrm{f}\varphi_1-\mathrm{f}\varphi)\leqslant C(\varphi_1-\varphi_2,\mathrm{f}\varphi_1-\mathrm{f}\varphi_2)=0. \tag{4.4}$$

令$\varphi=\varphi_2+th(t>0)$，则由(4.4)可知

$$(h,\mathrm{f}\varphi_1-\mathrm{f}(\varphi_2+th))\leqslant 0 \tag{4.5}$$

令$t\to 0$，得$(h,\mathrm{f}\varphi_1-\mathrm{f}\varphi_2)\leqslant 0$.注意到$h\in E^*$是任意的，故必有$\mathrm{f}\varphi_1=\mathrm{f}\varphi_2$.从而$\varphi_1=-K\mathrm{f}\varphi_1=-K\mathrm{f}\varphi_2=\varphi_2$. 这表明方程(4.1)至多有一个解.

如果$K\theta=\theta$和$\mathrm{f}\theta=\theta$至少有一个不成立，则令$\mathrm{f}_1\varphi=\mathrm{f}\varphi-\mathrm{f}\theta$，$K_1\varphi=K(\varphi+\mathrm{f}\varphi)-K\mathrm{f}\theta$，$\psi_1=\psi-K\mathrm{f}\theta$.显然方程(4.1)必等价于$\varphi+K_1\mathrm{f}_1\varphi=\psi_1$，并且$K_1\theta=\theta$，$\mathrm{f}_1\theta=\theta$. 因此，不失一般可以假定$K\theta=\theta$，$\mathrm{f}\theta=\theta$.

因为f是角有界算子，故存在$C>0$，使对任给$\varphi\in E^*$，$h\in E^*$，$g\in E^*$，有

$$(h-g,\mathfrak{f}\varphi-\mathfrak{f}h)\leqslant C(\varphi-g,\mathfrak{f}\varphi-\mathfrak{f}g). \tag{4.6}$$

令$g=\theta$，并注意到$\mathfrak{f}\theta=\theta$，由(4.6)式可得

$$(h,\mathfrak{f}\varphi)\leqslant C(\varphi,\mathfrak{f}\varphi)+(h,\mathfrak{f}h)$$

取$R>C\|\psi\|$，由于$\mathfrak{f}$是有界算子，并注意到$h\in E^*$是任意的，故有

$$R\|\mathfrak{f}\varphi\|=\sup_{\|h\|=R}|(h,\mathfrak{f}\varphi)|\leqslant C(\varphi,\mathfrak{f}\varphi)+m, \tag{4.7}$$

其中$m=R\sup\limits_{\|h\|=R}\|\mathfrak{f}h\|$是一常数。取$M=\dfrac{m}{R-C\|\psi\|}$，并取定$r>\sup\limits_{\|\varphi\|\leqslant M+1}\|K\varphi-\psi\|$。令$D=\{\varphi\in E^*\mid\|\varphi\|\leqslant r\}$。令

$$T\varphi=-K^{-1}(\psi-\varphi)$$

则T是单调映射。故根据Debrunner-Flor引理（见附录引理4.7），存在$\varphi^*\in D$，使对任给$(g,-u)\in G(T|_D)$有

$$(g-\varphi^*,\mathfrak{f}\varphi^*-u)\geqslant 0$$

由$(g,-u)\in G(T|_D)$知，$\|g\|\leqslant r$，并且$g+Ku=\psi$。因此，

$$(\psi-Ku-\varphi^*,\mathfrak{f}\varphi^*-u)\geqslant 0 \tag{4.8}$$

对一切$u\in\{u\in E\mid\|Ku-\psi\|\leqslant r\}$成立。在(4.8)式中令$u=\theta$，得$(\varphi^*,\mathfrak{f}\varphi^*)\leqslant(\varphi,\mathfrak{f}\varphi^*)$，故由(4.7)式得

$$R\|\mathfrak{f}\varphi^*\|\leqslant C(\varphi^*,\mathfrak{f}\varphi^*)+m\leqslant C\|\mathfrak{f}\varphi^*\|\|\psi\|+m. \tag{4.9}$$

故有$\|\mathfrak{f}\varphi^*\|\leqslant M$。令$u_t=\mathfrak{f}\varphi^*-th$，其中$0\leqslant t\leqslant 1$，$h\in E$，$\|h\|\leqslant 1$，则由$r$定义知，有$\|Ku_t-\psi\|\leqslant r$。在(4.8)式中令$u=u_t$，得

$$(\psi-Ku_t-\varphi^*,h)\geqslant 0.$$

令$t\to 0$，得$(\psi-K\mathfrak{f}\varphi^*-\varphi^*,h)\geqslant 0$。由于$h\in\{h\in E\mid\|h\|\leqslant 1\}$是任意的，故必有$\varphi^*+K\mathfrak{f}\varphi^*=\psi$.证完。

定理4.2 设E是自反Banach空间，$K:E\to E^*$是连续有界的单调算子(不假定K是线性的)，$\mathfrak{f}:E^*\to E$是连续有界的角有界算子.则$(I+K\mathfrak{f})^{-1}:E^*\to E^*$是连续的。

证 由定理4.1知，$(I+K\mathrm{f})^{-1}$映E^*入E^*. 下证$(I+K\mathrm{f})^{-1}$的连续性.设

$$\varphi_1+K\mathrm{f}\varphi_1=\psi_1,\quad \varphi_2+K\mathrm{f}\varphi_2=\psi_2,$$

则有

$$\varphi_1=(I+K\mathrm{f})^{-1}\psi_1,\quad \varphi_2=(I+K\mathrm{f})^{-1}\psi_2.$$

由K的单调性知

$$((\psi_1-\psi_2)-(\varphi_1-\varphi_2),\ \mathrm{f}\varphi_1-\mathrm{f}\varphi_2)$$
$$=(K\mathrm{f}\varphi_1-K\mathrm{f}\varphi_2,\ \mathrm{f}\varphi_1-\mathrm{f}\varphi_2)\geqslant 0.$$

故有

$$(\varphi_1-\varphi_2,\ \mathrm{f}\varphi_1-\mathrm{f}\varphi_2)\leqslant(\psi_1-\psi_2,\mathrm{f}\varphi_1-\mathrm{f}\varphi_2)$$

由f的角有界性知，对任给$\omega\in E^*$，有

$$(\omega-\varphi_1,\mathrm{f}\varphi_2-\mathrm{f}\omega)\leqslant C(\varphi_1-\varphi_2,\mathrm{f}\varphi_1-\mathrm{f}\varphi_2)$$
$$\leqslant C(\psi_1-\varphi_2,\mathrm{f}\varphi_1-\mathrm{f}\varphi_2)\leqslant C\|\mathrm{f}\varphi_1-\mathrm{f}\varphi_2\|\|\psi_1-\psi_2\|.$$

所以

$$(\omega-\varphi_1,\mathrm{f}\varphi_2-\mathrm{f}\varphi_1)=(\omega-\varphi_1,\mathrm{f}\omega-\mathrm{f}\varphi_1)$$
$$+(\omega-\varphi_1,\mathrm{f}\varphi_2-\mathrm{f}\omega)\leqslant\|\mathrm{f}\omega-\mathrm{f}\varphi_1\|\|\omega-\varphi_1\|$$
$$+C\|\mathrm{f}\varphi_1-\mathrm{f}\varphi_2\|\|\psi_1-\psi_2\|. \tag{4.10}$$

在(4.10)式中，令$\omega=\varphi_1+h$，$\|h\|=t$，得

$$t\|\mathrm{f}\varphi_1-\mathrm{f}\varphi_2\|\leqslant t\alpha(t)+C\|\mathrm{f}\varphi_1-\mathrm{f}\varphi_2\|\|\psi_1-\psi_2\|, \tag{4.11}$$

其中$\alpha(t)=\sup\limits_{\|\omega-\varphi_1\|\leqslant t}\|\mathrm{f}\omega-\mathrm{f}\varphi_1\|$. 因此，当$\|\psi_1-\psi_2\|\leqslant\dfrac{t}{2C}$时，$\|\mathrm{f}\varphi_1-\mathrm{f}\varphi_2\|\leqslant 2\alpha(t)$.由f在$\varphi_1$处的连续性知$\lim\limits_{t\to 0}\alpha(t)=0$.因此，注意到$K$的连续性.即可由

$$(I+K\mathrm{f})^{-1}\psi_1-(I+K\mathrm{f})^{-1}\psi_2=\varphi_1-\varphi_2$$
$$=(\psi_1-\psi_2)-(K\mathrm{f}\varphi_1-K\mathrm{f}\varphi_2)$$

知$(I+K\mathrm{f})^{-1}$是连续的.证完.

设E是Banach空间，$\{E_n\}$是E的有限维子空间族，满足$E_1\subset E_2\subset E_3\subset\cdots\subset E_n\subset\cdots$；$P_n: E\to E_n$是投影算子。$P_n$的共轭算子$P_n^*$映$E^*$入$E_n^*$。显然$\dim E_n=\dim E_n^*$。称$\{E_n,P_n;E_n^*P_n^*\}$是投影完备的，如果对任给$x\in E$和$y\in E^*$，都有$P_nx\to x$，$P_n^*y\to y$。在下面一个定理中，假定$E$是自反空间，并且$\{E_n, P_n; E_n^*, P_n^*\}$是投影完备的。

设$\psi\in E^*$给定。在考察方程(4.1)的同时，考察有限维方程

$$(I+K_n\mathfrak{f}_n)\varphi_n=P_n^*\varphi \qquad (4.12)$$

其中，$\mathfrak{f}_n=P_n\mathfrak{f}P_n^*$，$K_n=P_n^*KP$。很显然，$\mathfrak{f}_n$: $E^*\to E_n$，K_n: $E_n\to E_n^*$。下面讨论方程(4.1)的解与方程4.12的解之间的关系。

定理4.3 设$K: E\to E^*$是连续有界单调算子(不假定K是线性的)，$\mathfrak{f}: E^*\to E$是有界连续的角有界算子，则对每一个自然数n，方程(4.12)都存在唯一的解φ_n^*，并且φ_n^*收敛于方程(4.1)的唯一解φ^*。

证 因为$\{E_n, P_n, E_n^*, P_n^*\}$是投影完备的，故根据共鸣定理容易证明，存在常数$M$，使得对每一个$n$，都有

$$\|P_n\|\leqslant M,\quad \|P_n^*\|\leqslant M. \qquad (4.13)$$

对每一个n，当$u,v,w\in E^*$时，

$$(\mathfrak{f}_nu-\mathfrak{f}_nw,w-v)=(P_n\mathfrak{f}P_n^*u-P_n\mathfrak{f}P_n^*w,w-v)$$

$$=(\mathfrak{f}P_n^*u-\mathfrak{f}P_n^*w,P_n^*w-P_n^*v)$$

$$\leqslant C(\mathfrak{f}P_n^*u-\mathfrak{f}P_n^*v,P_p^*u-P_n^*v)$$

$$=C(P_n\mathfrak{f}P_n^*u-P_n\mathfrak{f}P_n^*v,u-v)=C(\mathfrak{f}_nu-\mathfrak{f}_nv,u-v)$$

即$\mathfrak{f}_n$是角有界算子，同样可以证明对每一个n，K_n是单调算子。因此，根据定理4.1，对每一个n，方程4.12必存在唯一的解$\varphi_n^*\in E_n^*$，即

$$\varphi_n^* + K_n \mathfrak{f}_n \varphi_n^* = P_n^* \psi. \qquad (4.14)$$

由K_n的单调性和(4.14)式，有

$$(P_n^*\psi - \varphi_n^* - K_n \mathfrak{f}_n \theta, \mathfrak{f}_n \varphi_n^* - \mathfrak{f}\theta)$$
$$= (K_n \mathfrak{f}_n \varphi_n^* - K_n \mathfrak{f}_n \theta, \mathfrak{f}_n \varphi_n^* - \mathfrak{f}\theta) \geqslant 0. \qquad (4.15)$$

取$r > C\|P_n^*\psi - K_n \mathfrak{f}_n \theta\|$，仿(4.7)式之证明可知有

$$r\|\mathfrak{f}_n \varphi_n^*\| \leqslant C(\mathfrak{f}_n \varphi_n^* - \mathfrak{f}_n \theta, \varphi_n^*) + m, \qquad (4.16)$$

其中m是一常数.由(4.14)、(4.16)两式，可以得到

$$r\|\mathfrak{f}_n \varphi_n^*\| \leqslant C(\mathfrak{f}_n \varphi_n^* - \mathfrak{f}_n \theta, P_n^*\psi - K_n \mathfrak{f}_n \theta) + m$$
$$\leqslant C\|\mathfrak{f}_n \varphi_n^*\| \|P_n^*\psi - K_n \mathfrak{f}_n \theta\| + \|\mathfrak{f}_n \theta\| \|P_n^*\psi - K_n \mathfrak{f}_n \theta\| + m.$$

所以$\{\|\mathfrak{f}_n \varphi_n^*\|\}$是有界集.由(4.14)式即可知，$\{\|\varphi_n^*\|\}$也是 有 界集.

设 φ^*是方程(4.1)的唯一解，令$u_n = \mathfrak{f}_n \varphi^* - \mathfrak{f}\varphi^*, h_n = P_n^*\psi - K_n \mathfrak{f}\varphi^* - \varphi^*$，则由$K_n$的单调性可得

$$(\varphi_n^* - \varphi^* - h_n,\ \mathfrak{f}_n \varphi_n^* - \mathfrak{f}_n \varphi^* + u_n)$$
$$= (K_n \mathfrak{f}\varphi^* - K_n \mathfrak{f}_n \varphi_n^*,\ \mathfrak{f}_n \varphi_n^* - \mathfrak{f}\varphi^*) \leqslant 0. \qquad (4.17)$$

所以，由(4.17)式知

$$0 \leqslant (\varphi_n^* - \varphi^*, \mathfrak{f}_n \varphi_n^* - \mathfrak{f}_n \varphi^*)$$
$$\leqslant \|h_n\| \|\mathfrak{f}_n \varphi_n^* - \mathfrak{f}_n \varphi^*\| + \|u_n\| \|\varphi^* - \varphi_n^*\| + \|h_n\| \|u_n\|.$$

注意$\|h_n\| \to 0$,$\|u_n\| \to 0$，$\{\|\mathfrak{f}_n \varphi_n^*\|\}$和$\{\|\varphi_n^*\|\}$都是有界集，故

$$\varepsilon_n = (\varphi_n^* - \varphi^*, \mathfrak{f}_n \varphi_n^* - \mathfrak{f}_n \varphi^*) \to 0 \qquad (4.18)$$

另一方面，若令$\alpha_n(t) = \sup\limits_{\|\omega - \varphi^*\| \leqslant t} \|\mathfrak{f}_n \omega - \mathfrak{f}_n \varphi^*\|$，则仿(4.11)式的证明可以证得

$$t\|\mathfrak{f}_n \varphi_n^* - \mathfrak{f}_n \varphi^*\| \leqslant t\alpha_n(t) + C(\varphi_n^* - \varphi^*, \mathfrak{f}_n \varphi_n^* - \mathfrak{f}_n \varphi^*) \quad (4.19)$$

由(4.13)式易知，$\lim\limits_{t \to 0} \alpha_n(t) = 0$关于$n$一致成立，即对 任给$\varepsilon > 0$，存在$0 < t_0 < \varepsilon$，使当$|t| < t_0$时，对一切$n$都有$\alpha_n(t)$

$<\varepsilon$.对上述t_0，由(4.18)式知，必存在N,使当$n\geqslant N$时，$\varepsilon_n^{\frac{1}{2}}<t_0$.在(4.19)式中，令$t=\varepsilon_n^{\frac{1}{2}}$，即可知当$n\geqslant N$时，有

$$\|\mathrm{f}_n\varphi_n^*-\mathrm{f}_n\varphi^*\|\leqslant a_n(\varepsilon_n^{\frac{1}{2}})+C\varepsilon_n^{\frac{1}{2}}\leqslant\varepsilon+C\cdot\varepsilon^{\frac{1}{2}}. \tag{4.20}$$

在(4.20)式中令$\varepsilon\to 0$,并注意到$\mathrm{f}_n\varphi^*\to\mathrm{f}\varphi^*$. 即得 $\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{f}_n\varphi_n^*=\mathrm{f}\varphi^*$.所以

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n^*=\lim_{n\to\infty}(P_n^*\psi-K_n\mathrm{f}_n\varphi_n^*)$$

$$=\psi-\lim_{n\to\infty}K_n\mathrm{f}_n\varphi_n^*=\psi-K\mathrm{f}\varphi^*=\varphi^*.$$

证完.

注4.4 在定理4.1、定理4.2和定理4.3中，假定了E是自反空间，如果E不是自反空间，但f满足条件：f把E^*中的每一个有界集映为E中的相对弱紧集；则定理4.1、定理4.2和定理4.3的结论仍然成立.

作为应用，下面考察Hammerstein型积分方程

$$\varphi(x)+\int_G k(x,y)f(y,\varphi(y))dy=\psi(x), \tag{4.21}$$

其中G是R^n中的可测集，$0<\mathrm{mes}G\leqslant+\infty$.

定理4.5 设：(1)存在$1<p<+\infty$，常数$c_1>0$以及$c_0(x)\in L_q(p^{-1}+q^{-1}=1)$，使得对一切$x\in G,u\in R^1$,有

$$|f(x,u)|\leqslant c_1|u|^{p-1}+c_0(x); \tag{4.22}$$

(2)存在$C>0$,使对一切$x\in G,u,v,w\in R^1$，都有

$$[f(x,u)-f(x,w)](w-v)$$

$$\leqslant C[f(x,u)-f(x,v)](u-v) \tag{4.23}$$

(3)由$k(x,y)$确定的线性积分算子K映L_q入L_p并且是单调的.

则对每一个$\psi\in L_p$，方程(4.21)在L_p中存在唯一的解．更进一步，算子$(I+K\mathfrak{f})^{-1}$是映L_p入L_p的连续算子．

证 在定理4.1和定理4.2中，令$E=L_q$，则易知定理4.1和定理4.2的全部条件都满足．故由定理4.1和定理4.2知，定理4.5的结论成立．证完．

定理4.6 设：(1)对任给$R>0$，都存在$g_R(x)\in L_1$，使得对几乎所有的$x\in G$，和一切$|u|\leqslant R$，都有

$$|f(x,u)|\leqslant g_R(x); \tag{4.24}$$

(2)存在$C>0$，使对一切$x\in G,u,v,w\in R^1$，都有

$$[f(x,u)-f(x,w)](w-v)$$
$$\leqslant C[f(x,u)-f(x,v)](u-v) \tag{4.25}$$

(3)K是映L_1到L_∞的单调算子．

则对每一个$\psi\in L_\infty$，方程(4.21)在L_∞中存在唯一的解．更进一步，算子$(I+K\mathfrak{f})^{-1}$是映L_∞入L_∞的连续算子．

证 令$E=L_1$．由条件(1)并根据N.Dunford和J.T.Schwartz[1]第四章§3定理9可知，$\mathfrak{f}$是映L_∞中的有界集成为L_1中的相对弱紧集．因此，根据定理4.1和定理4.2并注意到注4.4，即知定理4.6的结论成立．证完．

附注 与本节内容有关的进一步讨论，可见H.Brezis和F.E.Browder[4]，D.Pascali[1]．

§5 单调算子理论的应用

在本节中，我们给出单调算子理论在非线性积分方程理论中的某些应用．关于单调算子的有关概念、符号和结论，见附录§4．

定理5.1 设E是自反的Banach空间，$K: E^* \to P(E)$极大单调，$\theta \in R(K)$. $\mathrm{f}: E \to E^*$是单调的，半连续的，有界的，并且是强制的.则对任给$\psi \in E$，抽象Hammerstein型方程

$$\psi \in (I + K\mathrm{f})\varphi \tag{5.1}$$

至少在E中有一个解.

证 显然，只需证明存在$\varphi \in E$，使

$$\theta \in \mathrm{f}\varphi - K^{-1}(\psi - \varphi). \tag{5.2}$$

对任给$\varphi \in E$，定义

$$T\varphi = -K^{-1}(\psi - \varphi).$$

显然T的图象$G(T) = -G(K^{-1}) + [\psi, \theta]$. 由于$K$是极大单调的，从而$K^{-1}$是极大单调的.所以$T$也是极大单调的.根据附录定理4.8，必存在$\varphi \in E$，使得$\theta \in (\mathrm{f} + T)\varphi$. 这表明（5.2）式成立、证完.

推论5.2 设E是自反的Banach空间，$K: E^* \to E$是线性单调算子，$D(K) = E^*$，$\mathrm{f}: E \to E^*$是单调、半连续、有界的，并且是强制的.则对任给$\psi \in E$，抽象Hammerstein型方程

$$\varphi + K\mathrm{f}\varphi = \psi \tag{5.3}$$

在E中至少有一个解.

证 由附录引理4.11和定理5.1推出.证完.

定理5.3 设E是自反空间，$K: E^* \to E$ 是半连续单调算子（不要求线性），$D(K) = E^*$.设$\mathrm{f}: E \to P(E^*)$是有界的极大单调映射.如果$(I + K\mathrm{f})^{-1}: E \to P(E)$是局部有界的，则对任给$\psi \in E$，都存在$\varphi \in E$，使得$\varphi + K\mathrm{f}\varphi = \psi$.

证 设$\psi \in E$给定.令$\omega = \varphi - \psi$，

$$\mathrm{g}\omega = \mathrm{f}(\omega + \psi).$$

则方程$\varphi + K\mathrm{f}\varphi = \psi$可以写成

$$\omega+K\mathrm{g}\omega=\theta$$

的形式.显然g也是有界的极大单调映射. 下面证明$(I+K\mathrm{g})^{-1}$也是局部有界的.事实上，设$h_n\in(I+K\mathrm{g})\psi_n, h_n\to h$，则$h_n+\psi\to h+\psi$,并且

$$h_n+\psi\in(\psi_n+\psi)+K\mathrm{f}(\psi_n+\psi).$$

由$(I+K\mathrm{f})^{-1}$的局部有界性知，$\{\psi_n+\psi\}$是有界的，从而$\{\psi_n\}$也是有界的.这表明$(I+K\mathrm{g})^{-1}$也是局部有界的.因此，不失一般性，我们可以假定$\psi=\theta$.

因为K是半连续的单调算子，故K是极大单调的. 由f的极大单调性可知f^{-1}也是极大单调的. 因此，根据附录引理4.11(iv),$\mathrm{f}^{-1}+K$是极大单调的. 下证$(\mathrm{f}^{-1}+K)^{-1}$是局部有界的. 设$x_n\in(\mathrm{f}^{-1}+K)y_n, x_n\to x$.取$u_n\in\mathrm{f}^{-1}y_n$，使得

$$x_n=u_n+Ky_n=u_n+K\mathrm{f}u_n=(I+K\mathrm{f})u_n$$

因为$(I+K\mathrm{f})^{-1}$是局部有界的，故$\{u_n\}$是有界集.由于f是有界映射,故$\{y_n\}$也是有界集,从而$(\mathrm{f}^{-1}+K)^{-1}$是局部有界的. 根据附录定理4.10，存在$v\in E^*$,使$\theta\in(\mathrm{f}^{-1}+K)v$. 取$\varphi^*\in\mathrm{f}^{-1}v$，使$\theta=\varphi^*+Kv$，则显然$\varphi^*+K\mathrm{f}\varphi^*=\theta$.证完.

如果K是线性算子，则定理5.3中关于f有界的假设可以删掉.

定理5.4 设E是自反空间，$K:E^*\to E$是线性单调算子，$D(K)=E^*$,$\mathrm{f}:E\to E^*$是半连续单调算子，$D(\mathrm{f})=E$. 如果$(I+K\mathrm{f})^{-1}$是局部有界的，则对任给$\psi\in E$，都存在$\varphi\in E$，使得$\varphi+K\mathrm{f}\varphi=\psi$.

证 不失一般性，假定$\psi=\theta$. 因为K是线性单调算子，$D(K)=E^*$，所以由附录引理4.2知，K是连续的. 从而根据附录引理4.11知，K和f都是极大单调的. 因此，

$K^{-1}+\mathrm{f}$也是极大单调的。下面证明$(K^{-1}+\mathrm{f})^{-1}$是局部有界的，为此只需证明：对任给$\{x_n\}\subset E$，由$y_n\in(K^{-1}+\mathrm{f})x_n$和$y_n\to y$可以推出$\{x_n\}$有界。事实上，取$u_n\in K^{-1}x_n$，则有$y_n=u_n+\mathrm{f}x_n$。故

$$Ky_n=Ku_n+K\mathrm{f}x_n=x_n+K\mathrm{f}x_n$$

K的连续性表明$Ky_n\to Ky$。于是由$(I+K\mathrm{f})^{-1}$的局部有界性知$\{x_n\}$有界。故$(K^{-1}+\mathrm{f})^{-1}$是局部有界的。根据附录定理4.10，存在$\varphi^*\in E$，使$\theta\in(K^{-1}+\mathrm{f})\varphi^*$。显然$\varphi^*+K\mathrm{f}\varphi^*=\theta$。证完。

下面讨论非线性积分方程的唯一性问题。

设H是一个Hilbert空间，H_1是H的闭子空间，H_2是H_1在H中的直交补空间，令$P_1:H\to H_1$和$P_2:H\to H_2$分别是H到H_1和H_2的直交投影算子。

定理5.5 设：(1)K_1：$H_1\to H_1$是线性极大单调算子；

(2)K_2：$H_2\to H_2$是线性极大单调算子，并且存在$m>0$，使得对任给$\varphi\in D(K_2)$有

$$(K_2\varphi,\varphi)\geqslant m\|\varphi\|^2; \tag{5.4}$$

(3)$\mathrm{f}:H\to H$是有界连续的强单调算子，即存在$c>0$，使得对任给$\varphi_1\in H$，$\varphi_2\in H$，有

$$(\mathrm{f}\varphi_1-\mathrm{f}\varphi_2,\varphi_1-\varphi_2)\geqslant c\|\varphi_1-\varphi_2\|^2; \tag{5.5}$$

(4)$cm>1$；

则对任给$\psi\in H$，方程

$$\varphi+(K_1P_1-K_2P_2)\mathrm{f}\varphi=\psi \tag{5.6}$$

在H中具有唯一解。

证 先设$\psi=\theta$，下证方程

$$\varphi+(K_1P_1-K_2P_2)\mathrm{f}\varphi=\theta \tag{5.7}$$

在H中存在唯一解。对$\varphi\in H$，存在$\varphi_1\in H_1$，$\varphi_2\in H_2$，使得$\varphi=$

$\varphi_1+\varphi_2$.显然方程(5.7)等价于

$$\varphi_1+K_1P_1\mathsf{f}(\varphi_1+\varphi_2)=\theta, \tag{5.8}$$

$$\varphi_2-K_2P_2\mathsf{f}(\varphi_1+\varphi_2)=\theta. \tag{5.9}$$

首先证明对任意固定的$\varphi_1\in H_1$，方程(5.9)在H_2中恰有一个解.事实上，当$\varphi_1\in H_1$固定时，由条件(3)知，映射$S(\varphi_2)=$ $=P_2\mathsf{f}(\varphi_1+\varphi_2)$是映$H_2$入$H_2$的连续强单调映射，即对任给$\varphi_2'\in H_2$，$\varphi_2''\in H_2$,有

$$(S(\varphi_2')-S(\varphi_2''),\varphi_2'-\varphi_2'')\geqslant c\|\varphi_2'-\varphi_2''\|^2.$$

根据附录定理4.12，$R(S)=H_2$,并且对任给$u_1\in H_2$,$u_2\in H_2$,有

$$\|S^{-1}(u_1)-S^{-1}(u_2)\|\leqslant\frac{1}{c}\|u_1-u_2\|. \tag{5.10}$$

因为K_2是极大单调并且是强单调的，根据附录定理4.9，$R(K_2)=H_2$,并且对任给$v_1\in H_2$，$v_2\in H_2$,

$$\|K_2^{-1}v_1-K_2^{-1}v_2\|\leqslant\frac{1}{m}\|v_1-v_2\|. \tag{5.11}$$

因为$cm>1$,故由(5.10)、(5.11)两式知，$S^{-1}K_2^{-1}$: $H_2\to H_2$是压缩映射.故必存在$\varphi_2^*\in H_2$,使

$$\varphi_2^*=S^{-1}K_2^{-1}\varphi_2^*.$$

这表明对每一个$\varphi_1\in H_1$,方程(5.9)在H_2中存在唯一的解φ_2^*.定义$\varphi_2^*=R\varphi_1$则R:$H_1\to H_2$，并且方程(5.9)等价于

$$R\varphi_1-K_2P_2\mathsf{f}(\varphi_1+R\varphi_1)=\theta \tag{5.12}$$

下面证明R是一个有界连续映射.事实上,对任给$\varphi_1\in H_1$,$\psi_1\in H_1$，有

$$\begin{aligned}&c\|R\varphi_1-R\psi_1\|^2\leqslant(\mathsf{f}(\varphi_1+R\varphi_1)\\&-\mathsf{f}(\psi_1+R\psi_1),R\varphi_1-R\psi_1)+(\mathsf{f}(\psi_1+R\psi_1)\\&-\mathsf{f}(\varphi_1+R\psi_1),R\varphi_1-R\psi_1).\end{aligned} \tag{5.13}$$

由(5.12)式可知

$$(\mathsf{f}(\varphi_1+R\varphi_1)-\mathsf{f}(\psi_1+R\psi_1),R\varphi_1-R\psi_1)$$
$$=(K_2^{-1}R\varphi_1-K_2^{-1}R\psi_1,R\varphi_1-R\psi_1)$$
$$\leqslant\frac{1}{m}\|R\varphi_1-R\psi_1\|^2. \tag{5.14}$$

由(5.13)、(5.14)两式即可知，有

$$\left(c-\frac{1}{m}\right)\|R\varphi_1-R\psi_1\|\leqslant\mathsf{f}(\psi_1+R\psi_1)-\mathsf{f}(\varphi_1+R\psi_1)\|.$$

这表明$R:H_1\to H_2$是一个有界连续映射.

为了完成定理的证明,只需证明在H_1中，方程

$$\varphi_1+K_1P_1\mathsf{f}(\varphi_1+R\varphi_1)=\theta \tag{5.15}$$

存在并且仅存在一个解即可.令$Q=P_1\mathsf{f}(I+R)$,则由R及f的有界连续性知，Q是有界连续的.由于f的强单调性，对任给$\varphi_1\in H_1,\psi_1\in H_1$，有

$$c\|\varphi_1-\psi_1\|^2+c\|R\varphi_1-R\psi_1\|^2$$
$$\leqslant(\mathsf{f}(\varphi_1+R\varphi_1)-\mathsf{f}(\psi_1+R\psi_1),\varphi_1-\psi_1)$$
$$+(\mathsf{f}(\varphi_1+R\varphi_1)-\mathsf{f}(\psi_1+R\psi_1),R\varphi_1-R\psi_1)$$

由(5.14)式，可以得到

$$c\|\varphi_1-\psi_1\|^2+\left(c-\frac{1}{m}\right)\|R\varphi_1-R\psi_1\|^2$$
$$\leqslant(\mathsf{f}(\varphi_1+R\varphi_1)-\mathsf{f}(\psi_1+R\psi_1),\varphi_1-\psi_1).$$

于是，对任给$\varphi_1\in H_1,\psi_1\in H_1$,

$$c\|\varphi_1-\psi_1\|^2\leqslant(Q\varphi_1-Q\psi_1,\varphi_1-\psi_1). \tag{5.16}$$

故Q是强单调的.因此Q强制.根据定理5.1,

$$\varphi_1+K_1Q\varphi_1=\theta \tag{5.17}$$

在H_1中至少有一个解.下证方程(5.17)解的唯一性.事实上,若$\varphi_1+K_1Q\varphi_1=\theta,\psi_1+K_1Q\psi_1=\theta$,则由(5.16)式并注意到

K_1的单调性，有

$$c\|\varphi_1-\psi_1\|^2\leqslant(\varphi_1-\psi_1+K_1Q\varphi_1-K_1Q\psi_1,Q\varphi_1-Q\psi_1)$$
$$=0,$$

即$\varphi_1=\psi_1$。这表明方程(5.17)，亦即方程(5.6)的解是唯一的。因此，当$\psi=\theta$时定理的结论获证。

当$\psi\neq 0$时，做代换$\omega=\varphi-\psi$，即可化为上面已经讨论的情况。证完。

附注 利用单调算子理论研究Hammerstein型非线性积分方程的工作除D.Pascali和S.Sburlan〔1〕外，还见I.I.Kolodner〔1〕,J.Kolomy〔1〕、〔2〕，F.E.Browder〔1〕，F.E.Browder,D.G.de Figueiredo和C.P.Gupta〔1〕,W.V.Petryshyn和P.M.Fitzpatrick〔1〕等。

第五章　非线性积分方程的多重解——拓扑方法

本章及下面两章，将研究非线性积分方程非平凡解的存在性及其它性质．本章使用的方法，主要是拓扑方法．

§1　拓扑度的计算

定义1.1　设E是Banach空间，Ω是E中的有界开集，A：$\overline{\Omega}\to E$是全连续算子．如果存在E的收缩核W_1，使$A(\partial\Omega)\subset W_1$，则称$W_1$是（$A$，$\Omega$）的一重本质核；利用归纳法定义（$A$，$\Omega$）的$n$重本质核如下：设$W_{n-1}$是（$A$，$\Omega$）的$n-1$重本质核，$\partial\Omega\cap W_{n-1}\neq\phi$，$W_n$是$W_{n-1}$的收缩核，满足$A(\partial\Omega\cap W_{n-1})\subset W_n$，则称$W_n$是（$A$，$\Omega$）的$n$重本质核．

注1.2　（A，Ω）的一重本质核总是存在的，例如取$W_1=\overline{\mathrm{co}}A(\partial\Omega)$，$W_1$就是($A$,$\Omega$)的一重本质核；若$\partial\Omega\cap W_1\neq\phi$，取$W_2=\overline{\mathrm{co}}A(\partial\Omega\cap W_1)$，$W_2$就是（$A$，$\Omega$）的二重本质核；$n$重本质核可以类推得到．由定义易知，（$A$，$\Omega$）的$n$重本质核不唯一确定．又按定义，$n$重本质核$W_n$的存在并不保证$n+1$重本质核的存在，只有$\partial\Omega\cap W_n\neq\phi$时，$n+1$重本质核才存在．最后，在定义1.1中，$W_n$显然也是$E$的收缩核，故存在保核收缩$r_n$：$E\to W_n$．

定理1.3　设A：$\overline{\Omega}\to E$是全连续算子，并在$\partial\Omega$上没有不动

点．设W_n是（A, Ω）的某一n重本质核．则下列结论成立：

（i）若 $\partial\Omega\cap W_n\neq\phi$，$\Omega\cap W_n\neq\phi$，取 r_n: $E\to W_n$是保核收缩，$\Omega(W_n)=\Omega\cap W_n$，则

$$\deg(I-A,\Omega,0)=\deg(I-r_nA,\Omega(W_n),0;W_n);$$

（ii）若$\Omega\cap W_n=\phi$，则 $\deg(I-A,\Omega,0)=0$；

（iii）若 $W_n\subset\overline{\Omega}$，则 $\deg(I-A,\Omega,0)=1$．

为了证明定理1.3，先证明如下引理：

引理1.4 设W是E的收缩核，r: $E\to W$是保核收缩，$\Omega(W)$是W中的有界区域，A: $\overline{\Omega(W)}\to E$ 是全连续算子，并且在$\partial\Omega(W)$上没有不动点，其中$\partial\Omega(W)$表示$\Omega(W)$在W中的边界．设W_1是W的收缩核，A映$\partial\Omega(W)$入W_1，则下列结论成立：

（i）若$\partial\Omega(W)\cap W_1\neq\phi$，$\Omega(W)\cap W_1\neq\phi$，取$r_1$: $E\to W_1$是保核收缩，$\Omega(W_1)=\Omega(W)\cap W_1$，则

$$\deg(I-rA,\ \Omega(W),\ 0;\ W)$$
$$=\deg(I-r_1A,\ \Omega(W_1),\ 0;\ W_1); \tag{1.1}$$

（ii）若$\Omega(W)\cap W_1=\phi$，则

$$\deg(I-rA,\ \Omega(W),\ 0;\ W)=0;$$

（iii）若 $W_1\subset\overline{\Omega(W)}$，则

$$\deg(I-rA,\ \Omega(W),\ 0;\ W)=1.$$

证 因为rA: $\overline{\Omega(W)}\to W$，并且当$x\in\partial\Omega(W)$时，$Ax\in W_1\subset W$，故对 $x\in\partial\Omega(W)$，$rAx=Ax\neq x$．因此，$\deg(I-rA,\Omega(W),0;W)$ 有定义．同理可以知道，$\deg(I-r_1A,\Omega(W_1),0;W_1)$ 也有定义．令r_1^*: $W\to W_1$是保核收缩，$A_1=r_1^*rA$，则A_1: $\overline{\Omega(W)}\to W_1\subset W$；另一方面，$rA$: $\overline{\Omega(W)}\to W$．注意到$A$映$\partial\Omega(W)$入$W_1$，故当$x\in\partial\Omega(W)$时，$r_1^*rAx=$

$Ax=rAx$. 根据相对拓扑度的边界值性质，有

$$\begin{aligned}&\deg(I-rA,\ \Omega(W),\ 0;\ W)\\&=\deg(I-A_1,\ \Omega(W),\ 0;\ W).\end{aligned}\tag{1.2}$$

先证（i） 取E的有界区域Ω，使$\Omega\cap W=\Omega(W)$，把A_1保持全连续性延拓到$\overline{\Omega}$上，延拓后的算子记为A_1^*. 令$A_2=r_1^*rA_1^*$，则$A_2:\overline{\Omega}\to W_1\subset W$. 由于当$x\in\overline{\Omega(W)}$时，$A_2x=r_1^*rA_1x=A_1x$，故由相对拓扑度的定义有

$$\begin{aligned}&\deg(I-A_1,\ \Omega(W),\ 0;\ W)\\&=\deg(I-A_2,\ \Omega,\ 0).\end{aligned}\tag{1.3}$$

由于$A_2:\overline{\Omega}\to W_1$，并且当$x\in\overline{\Omega(W_1)}$时，$A_2x=A_1x$，故把$A_1$看成是局限在$\overline{\Omega(W_1)}$上的算子时，由相对拓扑度的定义，又有

$$\begin{aligned}&\deg(I-A_1,\ \Omega(W_1),\ 0;\ W_1)\\&=\deg(I-A_2,\ \Omega,\ 0).\end{aligned}\tag{1.4}$$

又当$x\in\partial\Omega(W_1)$时，$A_1x=Ax=r_1Ax$，故由边界值性质，有

$$\begin{aligned}&\deg(I-A_1,\ \Omega(W_1),\ 0;\ W_1)\\&=\deg(I-r_1A,\ \Omega(W_1),\ 0;\ W_1).\end{aligned}\tag{1.5}$$

由（1.2）～（1.5）式，引理的结论（i）成立.

再证（ii） 用反证法. 设$\deg(I-rA,\ \Omega(W),\ 0;\ W)\neq 0$，则由(1.2)式及可解性知，$A_1$必有不动点$x^*\in\Omega(W)$. 但另一方面，$x^*=A_1x^*\in W_1$，此与$\Omega(W)\cap W_1=\phi$矛盾. 故（ii）得证.

最后证（iii） 取Ω，A_2同（i）的证明，由(1.2)(1.3)两式可知

$$\deg(I-rA,\ \Omega(W),\ 0;\ W)$$

$$=\deg(I-A_2,\ \Omega,\ 0). \tag{1.6}$$

取半径充分大的开球 $B_R=\{x\in E \mid \|x\|<R\}$，使$\overline{\Omega}\subset B_R$；把$A_2$保持全连续性由$\overline{\Omega}$延拓到$\overline{B_R}$上，延拓后的算子记为$A_2^*$。令$A_3=r_1^* rA_2^*$，则当$x\in\overline{\Omega}$时，$A_3x=A_2x$。由$A_3$：$\overline{B_R}\to W_1\subset\overline{\Omega}$，并注意到$A$在$\partial\Omega(W)$上没有不动点，可知$A_3$在$\overline{B_R}\setminus\Omega$上没有不动点，故

$$\deg(I-A_2,\ \Omega,\ 0)=\deg(I-A_3,\ \Omega,\ 0)$$
$$=\deg(I-A_3,\ B_R,\ 0). \tag{1.7}$$

由于A_3映$\overline{B_R}$入自身，故$\deg(I-A_3,\ B_R,\ 0)=1$。再由(1.6)、(1.7)式知结论（iii）成立. 引理1.4证完.

定理1.3的证明 由于E是其本身的收缩核，故有

$$\deg(I-A,\ \Omega,\ 0)$$
$$=\deg(I-IA,\ \Omega(E),\ 0;\ E). \tag{1.8}$$

设$W_i(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$是$(A,\ \Omega)$的$i$重本质核. 由本质核的定义知$W_i\cap\partial\Omega\neq\phi$ $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1$，下同）. 先设$\Omega\cap W_i\neq\phi$，令r_i：$E\to W_i$是相应的保核收缩，反复运用引理1.4的结论（i），可得

$$\deg(I-IA,\ \Omega(E),\ 0;\ E)$$
$$=\deg(I-r_{n-1}A,\ \Omega(W_{n-1}),\ 0;\ W_{n-1}). \tag{1.9}$$

再利用引理1.4的结论（i）、(ii)、（iii)，即知定理1.3的结论(i)、(ii)、(iii）成立.

再设对某$i_0(1\leqslant i_0\leqslant n-1$，下设$i_0>1$，$i_0=1$仿证），$\Omega\cap W_{i_0}=\phi$，而对$1\leqslant i<i_0$，$\Omega\cap W_i\neq\phi$. 显然这只有在定理1.3（ii）的情况下才会出现. 仿（1.8)、(1.9）式的证明，可知

$$\deg(I-A,\ \Omega,\ 0)$$

$= \deg(I - r_{i_0-1}A,\ \Omega(W_{i_0-1}),\ 0;\ W_{i_0-1})$.

再利用引理1.4的结论（ii），即知$\deg(I-A,\ \Omega,\ 0)=0$. 证完.

注1.5 设Ω是有界凸开集，$A: \overline{\Omega}\to E$ 是全连续算子，在$\partial\Omega$ 上没有不动点，$A(\partial\Omega)\subset\overline{\Omega}$. 则$\overline{\Omega}$是（$A$, Ω）的一重本质核. 故著名的Rothe 不动点定理是定理1.3 之结论（iii）的特例.

与定义1.1与定理1.3相平行，有

定义1.6 设W是Banach空间E中的收缩核，$\Omega(W)$是W中的有界开集，$A:\overline{\Omega(W)}\to W$是全连续算子. 如果存在$W$的收缩核$W_1$，使$A(\partial\Omega(W))\subset W_1$，则称$W_1$是（$A$, $\Omega(W)$）的一重本质核. 利用归纳法定义（A, $\Omega(W)$）的n重本质核如下：设W_{n-1}是(A, $\Omega(W)$)的$n-1$ 重本质核，$\partial\Omega(W)\cap W_{n-1}\neq\phi$，$W_n$是$W_{n-1}$的收缩核，满足$A(\partial\Omega(W)\cap W_{n-1})\subset W_n$，则称$W_n$是（$A$, $\Omega(W)$）的n重本质核.

定理1.7 设$A: \overline{\Omega(W)}\to W$是全连续算子，并在$\partial\Omega(W)$上没有不动点. 设$W_n$是（$A$, $\Omega(W)$）的某一n重本质核. 则下列结论成立：

（i）若$\partial\Omega(W)\cap W_n\neq\phi$，$\Omega(W)\cap W_n\neq\phi$，取$r_n$: $W\to W_n$是保核收缩，$\Omega(W_n)=\Omega(W)\cap W_n$，则

$$\deg(I-A,\ \Omega(W),\ 0;\ W)$$
$$=\deg(I-r_nA,\ \Omega(W_n),\ 0;\ W_n);$$

（ii）若$\Omega(W)\cap W_n=\phi$，则

$$\deg(I-A,\ \Omega(W),\ 0;\ W)=1;$$

（iii）若$W_n\subset\overline{\Omega(W)}$，则

$$\deg(I-A,\ \Omega(W),\ 0;\ W)=1.$$

定理1.7的证明与定理1.3相仿.

下面利用定理1.3和定理1.7给出拓扑度计算的若干具体方法.

引理1.8 设E是一个无穷维的 Banach 空间，$r>0$，则$D_r=\{x\in E\mid \|x\|\geqslant r\}$是$E$的一个收缩核.

这一引理的证明见 J.Dugundji〔1〕.

定理1.9 设E是无穷维Banach空间，A: $\overline{\Omega}\to E$ 是全连续算子. 设存在全连续算子B: $\partial\Omega\to E$，满足:

（1）$\inf\limits_{x\in\partial\Omega}\|Ax+Bx\|>0$；

（2）对任给 $x\in\partial\Omega$，$t\in(0, 1]$，有

$$Ax+Bx\neq t(x+Bx).$$

则$\deg(I-A, \Omega, 0)=0$.

证 把B保持全连续性延拓到$\overline{\Omega}$上，延拓后的算子仍记为B. 令

$$\beta=\inf_{x\in\partial\Omega}\|Ax+Bx\|, \quad m=\sup_{x\in\partial\Omega}\|Bx\|,$$

$$M=2\sup_{x\in\overline{\Omega}}\|x\|,$$

取$N=\max\left\{1, \dfrac{m+M}{\beta}\right\}$. 令

$$H(t, x)=[t+(1-t)N]Ax+(1-t)(N-1)Bx.$$

设存在$t_0\in[0, 1]$，$x_0\in\partial\Omega$，使$x_0=H(t_0, x_0)$，则

$$Ax_0+Bx_0=\frac{1}{t_0+(1-t_0)N}(x+Bx_0). \qquad (1.10)$$

由$N\geqslant 1$知，当$t_0\in[0, 1]$时，$t_0+(1-t_0)N\geqslant 1$. 故（1.10）式与定理条件（2）矛盾. 因此，对任给$t\in[0, 1]$，$x\in\partial\Omega$，都必有$x\neq H(t, x)$. 所以，

$$\deg(I-A,\ \Omega,\ 0)=\deg(I-H(1,\ \cdot),\ \Omega,\ 0)$$
$$=\deg(I-H(0,\ \cdot),\ \Omega,\ 0)$$
$$=\deg(I-(NA+(N-1)B),\ \Omega,\ 0). \qquad (1.11)$$

取$W_1=\{x\in E\mid \|x\|\geqslant M\}$．因为$E$是无穷维Banach空间，故由引理1.8知，$W_1$是$E$的收缩核．任给$x\in\partial\Omega$，有

$$\|NAx+(N-1)Bx\|\geqslant N\|Ax+Bx\|-\|Bx\|$$
$$\geqslant N\beta-m\geqslant M,$$

故$(NA+(N-1)B)(\partial\Omega)\subset W_1$，即$W_1$是$(NA+(N-1)B,\ \Omega)$的一重本质核．另一方面显然又有$W_1\cap\Omega=\phi$．故由定理1.3的结论（ii）可知

$$\deg(I-(NA+(N-1)B),\ \Omega,\ 0)=0.$$

注意到（1.11）式，即知$\deg(I-A,\ \Omega,\ 0)=0$．证完．

推论1.10 设E是无穷维Banach空间，Ω是E中的有界开集，$A:\overline{\Omega}\to E$是全连续算子．又设

（1）$\inf\limits_{x\in\partial\Omega}\|Ax\|>0$；

（2）对任给$x\in\partial\Omega$，$t\in(0,\ 1]$，有$Ax\neq tx$．

则$\deg(I-A,\ \Omega,\ 0)=0$．

证 在定理1.9中，令$Bx\equiv 0$即可．证完．

推论1.11 设E是无穷维Banach空间，Ω是E中的有界开集，$A:\overline{\Omega}\to E$是全连续算子．设存在全连续算子$B:\partial\Omega\to E$，满足：

（1）$\inf\limits_{x\in\partial\Omega}\|Bx\|>0$；

（2）对任给$x\in\partial\Omega$，$t\geqslant 0$，有$x-Ax\neq tBx$．

则$\deg(I-A,\ \Omega,\ 0)=0$．

证 令$B_1=B-A$，则$A+B_1=B$．因此由条件（1）知

$$\inf_{x\in\partial\Omega}\|Ax+B_1x\|>0. \tag{1.12}$$

下证对任给$x\in\partial\Omega$，$t\in(0, 1]$，有

$$Ax+B_1x\neq t(x+B_1x). \tag{1.13}$$

事实上，如果存在 $x_0\in\partial\Omega$，$t_0\in(0, 1]$，使$Ax_0+B_1x_0=t_0(x_0+B_1x_0)$，则有（注意到$B_1=B-A$）

$$x_0-Ax_0=\frac{1-t_0}{t_0}Bx_0.$$

此显然与定理条件（2）矛盾．故对任给 $x\in\partial\Omega$，$t\in(0, 1]$，（1.13）式成立．由（1.12）、（1.13）式可知，定理1.19的条件满足．故根据定理1.9，有 $\deg(I-A, \Omega, 0)=0$．证完．

利用上述推论1.10，可以证明下列的区域拉伸与压缩不动点定理．

定理1.12 设Ω_1和Ω_2是无穷维Banach 空间E中的两个有界开集，$\theta\in\Omega_1$，$\overline{\Omega}_1\subset\Omega_2$，$A$：$\overline{\Omega}_2\backslash\Omega_1\to E$是全连续算子．又设下列两条件之一成立：

（1）对任给 $x\in\partial\Omega_1$，有$\|Ax\|\leqslant\|x\|$，对任给 $x\in\partial\Omega_2$，有$\|Ax\|\geqslant\|x\|$（区域拉伸）；

（2）对任给 $x\in\partial\Omega_1$，有$\|Ax\|\geqslant\|x\|$，对任给 $x\in\partial\Omega_2$，有$\|Ax\|\leqslant\|x\|$（区域压缩）；

则A在$\overline{\Omega}_2\backslash\Omega_1$中至少有一个不动点．

证 把A延拓成映$\overline{\Omega}_2$入E的全连续算子，延拓后的算子仍记为A．先设条件（1）成立．若A在$\partial\Omega_1$或$\partial\Omega_2$上有不动点，则定理已获证．故不失一般，可以假定A在$\partial\Omega_1\cup\partial\Omega_2$上没有不动点．于是由附录定理2.5和本节推论1.10可知有

$$\deg(I-A, \Omega_2, 0)=0, \tag{1.14}$$

$$\deg(I-A,\ \Omega_1,\ 0)=1. \tag{1.15}$$

由此并利用拓扑度的可加性知

$$\deg(I-A,\ \Omega_2\setminus\overline{\Omega}_1,\ 0)=-1.$$

由此可知A在$\Omega_2\setminus\overline{\Omega}_1$中有不动点。故在条件（1）下定理的结论成立。

同理可以证明在条件（2）下定理的结论也成立。证完。

推论1.10中的条件（1）是一个较强的条件。下述定理放宽了这一条件。

定理1.13 设E是无穷维Banach空间，Ω是E中的有界开集，$A: \overline{\Omega}\to E$是全连续算子。又设：

（1）$\left\{\dfrac{Ax}{\|Ax\|}\,\middle|\, x\in\partial\Omega\right\}$是$E$中的相对紧集；

（2）对任给$x\in\partial\Omega$，$t\in[0,1]$，有$Ax\neq tx$；

则$\deg(I-A,\ \Omega,\ 0)=0$.

证 由于A在$\partial\Omega$上没有不动点及A的全连续性，可知

$$\alpha=\inf_{x\in\partial\Omega}\|x-Ax\|>0. \tag{1.16}$$

在$\partial\Omega$上定义算子B如下：

$$Bx=\begin{cases} Ax, & 若\ x\in\partial\Omega,\ \|Ax\|\geqslant\dfrac{\alpha}{4}, \\ \dfrac{\alpha Ax}{4\|Ax\|}, & 若\ x\in\partial\Omega,\ \|Ax\|<\dfrac{\alpha}{4}. \end{cases} \tag{1.17}$$

显然$B: \partial\Omega\to E$是全连续算子。把B保持全连续性延拓到$\overline{\Omega}$上，延拓后的算子仍记为B。对任给$0\leqslant\lambda\leqslant 1$，$x\in\partial\Omega$，有

$$\begin{aligned}&\|x-(1-\lambda)Ax-\lambda Bx\| \\ \geqslant&\|x-Ax\|-\lambda\|Ax-Bx\|\geqslant\alpha-\frac{\alpha}{2}=\frac{\alpha}{2}>0.\end{aligned}$$

因此，$I-A$与$I-B$在$\partial\Omega$上同伦．故

$$\deg(I-A,\ \Omega,\ 0)=\deg(I-B,\ \Omega,\ 0). \qquad (1.18)$$

由B的定义知 $\inf\limits_{x\in\partial\Omega}\|Bx\|\geqslant\frac{\alpha}{4}>0$。另一方面，若存在$x_0\in\partial\Omega$，$0<\mu_0\leqslant 1$，使$Bx_0=\mu_0 x_0$，则由$B$的定义及条件（2）知，必有$\|Ax_0\|<\frac{\alpha}{4}$。因此，由$B$的定义知

$$Ax_0=\frac{4\|Ax_0\|}{\alpha}Bx_0=\frac{4\|Ax_0\|}{\alpha}\mu_0 x_0. \qquad (1.19)$$

但显然$0<\frac{4\|Ax_0\|}{\alpha}\mu_0\leqslant 1$，故（1.19）式与定理条件（2）矛盾．所以，对任给$x\in\partial\Omega$，$0<\mu\leqslant 1$，有$Bx\neq\mu x$。根据推论1.10，$\deg(I-B,\ \Omega,\ 0)=0$．再由（1.18）式即知

$$\deg(I-A,\ \Omega,\ 0)=0$$

证完．

下面给出关于锥映射的相对拓扑度计算的若干方法．

定理1.14 设P是Banach 空间E中的一个锥，$\Omega(P)$是P中的有界开集，$A:\overline{\Omega(P)}\to P$是全连续算子．设存在全连续算子$B:\partial\Omega(P)\to P$，满足

（1）$\inf\limits_{x\in\partial\Omega(P)}\|Ax+Bx\|>0$；

（2）对任给$x\in\partial\Omega(P)$，$t\in(0,\ 1]$，有$Ax+Bx\neq t(x+Bx)$。

则 $\deg(I-A,\ \Omega(P),\ 0;\ P)=0$

证 取β，m，M，N，$H(t,\ x)$同定理1.9之证明中所述（把其中的Ω换成$\Omega(P)$）．仿（1.11）式的证明，可以证得

$$\begin{aligned}&\deg(I-A,\ \Omega(P),\ 0;\ P)\\&=\deg(I-(NA+(N-1)B),\Omega(P),\ 0;\ P). \qquad (1.20)\end{aligned}$$

取$u_0\in P\backslash\{\theta\}$，使$\|u_0\|<\frac{M}{4}$；令$W_1=P\cap\left\{x\in E\ \middle|\ \|x+u_0\|\geqslant\frac{3M}{4}\right\}$. 下证$W_1$是$P$的收缩核. 作映射$r(x)$如下：

$$r(x)=\begin{cases} x, & x\in W_1\text{时}, \\ \dfrac{3Mx}{4\|x+u_0\|}+\left(\dfrac{3M}{4\|x+u_0\|}-1\right)u_0 & x\in P\backslash W_1\text{时}. \end{cases} \tag{1.21}$$

根据锥的定义知$-u_0\bar{\in}P$，注意到P是闭集，故有$\inf\limits_{x\in P}\|x+u_0\|>0$. 由（1.21）式易知$r(x)$连续. 当$x\in P\backslash W_1$时，有$\|x+u_0\|<\frac{3M}{4}$，故$\frac{3M}{4\|x+u_0\|}-1>0$. 由于$P$是锥，故由（1.21）式即知$r(x)\in P$. 又当$x\in P\backslash W_1$时，$\|r(x)+u_0\|=\frac{3M}{4}$，故$r(x)\in W_1$. 因此$r(x)$：$P\to W_1$是一个保核收缩，即$W_1$是$P$的收缩核. 当$x\in\partial\Omega(P)$时

$$\|NAx+(N-1)Bx+u_0\|\geqslant N\beta-m-\frac{M}{4}\geqslant\frac{3M}{4},$$

故$(NA+(N-1)B)(\partial\Omega(P))\subset W_1$，即$W_1$是$(NA+(N-1)B,\ \Omega(P))$的一重本质核. 又显然$\Omega(P)\cup W_1=\phi$，故根据定理1.7的结论（ii），有

$$\deg(I-(NA+(N-1)B),\ \Omega(P),\ 0;\ P)=0.$$

再由（1.20）式即知，有$\deg(I-A,\ \Omega(P),\ 0;\ P)=0$. 证完.

推论1.15 设P是Banach空间E中的一个锥，$\Omega(P)$是P中的有界开集，A：$\overline{\Omega(P)}\to P$是全连续算子. 又设

（1）$\inf\limits_{x\in\partial\Omega(P)}\|Ax\|>0$；

（2）对任给$x\in\partial\Omega(P)$，$t\in(0,\ 1]$，有$Ax\neq tx$；

则$\deg(I-A, \Omega(P), 0; P)=0$.

证 在定理1.14中，令$Bx\equiv 0$即可．证完．

定理1.16 设P是Banach空间E中的锥，$\Omega(P)$是P中的有界开集，A: $\overline{\Omega(P)}\to P$是全连续算子．又设存在全连续算子$B$: $\partial\Omega(P)\to P$，满足

（1）$\inf\limits_{x\in\partial\Omega(P)}\|Bx\|>0$；

（2）对任给$x\in\partial\Omega(P)$，$t\geqslant 0$，有$x-Ax\neq tBx$；

则$\deg(I-A, \Omega(P), 0; P)=0$.

证 令

$$R=\sup_{x\in\partial\Omega(P)}\|x\|,\quad M=\sup_{x\in\partial\Omega(P)}\|Ax\|,$$

$$\tau=\inf_{x\in\partial\Omega(P)}\|Bx\|.$$

取定t_0，使$t_0>\frac{1}{\tau}(R+M)$．由条件（2）可知$I-A$和$I-A-t_0B$在$\partial\Omega(P)$上同伦，因此，

$$\deg(I-A, \Omega(P), 0; P)$$
$$=\deg(I-A-t_0B, \Omega(P), 0; P). \tag{1.22}$$

另一方面，当$x\in\partial\Omega(P)$，$0\leqslant\mu\leqslant 1$时，由R、M、τ及t_0的选取可知

$$\|x-\mu Ax-t_0Bx\|\geqslant t_0\|Bx\|-\|x\|-\mu\|Ax\|$$
$$\geqslant t_0\tau-R-M>0.$$

因此$I-A-t_0B$与$I-t_0B$在$\partial\Omega(P)$上同伦．故

$$\deg(I-A-t_0B, \Omega(P), 0; P)$$
$$=\deg(I-t_0B, \Omega(P), 0; P). \tag{1.23}$$

对任给$x\in\partial\Omega(P)$，

$$\|t_0Bx\|\geqslant t_0\tau>R\geqslant\|x\|.$$

由此易知推论1.15的条件满足（取$A=t_0B$）．所以由推论1.15可知$\deg(I-t_0B,\ \Omega(P),\ 0;\ P)=0$．再由（1.22）、（1.23）式即知，$\deg(I-A,\ \Omega(P),\ 0;\ P)=0$．证完．

推论1.17 设P是Banach空间E中的锥，$\Omega(P)$是P中的有界开集，$A:\overline{\Omega(P)}\to P$是全连续算子．又设存在$u_0\in P\setminus\{\theta\}$，使得对任给$x\in\partial\Omega(P)$，$t\geqslant 0$，有

$$x-Ax\neq tu_0. \tag{1.24}$$

则$\deg(I-A,\ \Omega(P),\ 0;\ P)=0$．

证 在定理1.16中，取$Bx\equiv u_0$即可．证完．

设E是Banach空间，P是E中的一个锥，E中的半序关系"$\leqslant$"由P导出．下面将给出若干基于序关系的拓扑度计算方法．它们在非线性积分方程的研究中，是有效的工具．下面假设$\Omega(P)$是P中的有界开集．

定理1.18 设$\theta\in\Omega(P)$，$A:\overline{\Omega(P)}\to P$是全连续算子，并且在$\partial\Omega(P)$上没有不动点．又设

（1）存在有界正线性算子$B:P\to P$，使对任给$x\in\partial\Omega(P)$，有$Ax\leqslant Bx$；

（2）$r(B)\leqslant 1$，其中$r(B)$是把B延拓成映$\overline{P-P}$入$\overline{P-P}$的线性算子的谱半径；

则$\deg(I-A,\ \Omega(P),\ 0;\ P)=1$．

证 设存在$x_0\in\partial\Omega(P)$，$\mu_0\geqslant 1$，使$Ax_0=\mu_0x_0$．由A在$\partial\Omega(P)$上没有不动点可知$\mu_0>1$．由条件（1）知，$\mu_0x_0=Ax_0\leqslant Bx_0$．该式用$B$作用$n-1$次，得$\mu_0^nx_0\leqslant B^nx_0$．于是$\mu_0^{-n}B^nx_0\geqslant x_0$，即

$$\{\mu_0^{-n}B^nx_0\mid n=1,\ 2,\ \cdots\}\subset\{y\mid y\geqslant x_0\}..$$

由于$d=d(\theta,\ \{y\mid y\geqslant x_0\})>0$，故$\|\mu_0^{-n}B^nx_0\|\geqslant d$（$n=1$，

2，…）．于是

$$\|B^n\|=\frac{1}{\|x_0\|}\|B^n x_0\|\geqslant\frac{d}{\|x_0\|}\mu_0^n\quad(n=1,2,\cdots).$$

根据Гельфанд公式（见夏道行等〔1〕），有

$$r(B)=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\|B^n\|}\geqslant\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{d}{\|x_0\|}\mu_0^n}=\mu_0>1.$$

此与条件（2）矛盾．所以对任给$x\in\partial\Omega(P)$，$\mu\geqslant1$，有$Ax\neq\mu x$。根据Leray-Schauder定理，

$$\deg(I-A,\ \Omega(P),\ 0;\ P)=1.$$

证完．

定理1.19 设P是正规锥，A：$P\to P$是全连续算子．又设

（1）存在有界正线性算子B：$P\to P$及$u_0\in P$，使对任给$x\in P$，有$Ax\leqslant Bx+u_0$；

（2）$r(B)<1$；

则$\text{ind}(I-A,\ \infty;\ P)=1$．

证 用$\|\cdot\|$表示E中的范数．因为P是正规锥，故存在E中的等价范数$\|\cdot\|^*$，使P在该范数下满足$\theta\leqslant x\leqslant y$蕴含$\|x\|^*\leqslant\|y\|^*$（见附录引理1.23）．令$\varepsilon=\frac{1}{2}(1-r(B))$，根据Гельфанд公式可知，必存在$N$，使得当$n\geqslant N$时，有

$$\|B^n\|^*\leqslant[r(B)+\varepsilon]^n,\tag{1.25}$$

其中$\|B^n\|^*$是B^n相对于$(\overline{P-P},\ \|\cdot\|^*)$的算子范数（把$B$延拓成映$\overline{P-P}$入$\overline{P-P}$的线性算子）．任给$x\in\overline{P-P}$，令

$$\|x\|^{**}=\sum_{i=1}^{N}[r(B)+\varepsilon]^{N-i}\|B^{i-1}x\|^*,\tag{1.26}$$

其中$B^0=I$．易知$\|\cdot\|^{**}$是$\overline{P-P}$上的范数．设$\theta\leqslant x\leqslant y$，则

$\|x\|^*\leqslant\|y\|^*$. 由于 B 是正算子，故对 $j=1, 2, \cdots, N-1$，有 $\theta\leqslant B^j x\leqslant B^j y$，于是$\|B^j x\|^*\leqslant\|B^j y\|^*$. 所以，

$$\|x\|^{**}=\sum_{i=1}^{N}[r(B)+\varepsilon]^{N-i}\|B^{i-1}x\|^*$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{N}[r(B)+\varepsilon]^{N-i}\|B^{i-1}y\|^*=\|y\|^{**},$$

故$\|\cdot\|^{**}$关于P单调. 又因为

$$[r(B)+\varepsilon]^{N-1}\|x\|^*\leqslant\|x\|^{**}$$

$$\leqslant\left(\sum_{i=1}^{N}[r(B)+\varepsilon]^{N-i}\|B^{i-1}\|^*\right)\|x\|^*,$$

故在$\overline{P-P}$上，$\|\cdot\|^*$与$\|\cdot\|^{**}$等价. 于是$\|\cdot\|$与$\|\cdot\|^{**}$等价.

取 $R'>\frac{2}{\varepsilon}\|u_0\|^{**}$. 由于$\|\cdot\|$与$\|\cdot\|^{**}$的等价性，故可取 R，使得只要 $x\in P$，$\|x\|\geqslant R$，就有$\|x\|^{**}>R'$. 任取 P 中的有界开集 $\Omega(P)$，使 $\{x\in P\mid\|x\|\leqslant R\}\subset\Omega(P)$. 设存在 $x_0\in\partial\Omega$，$\mu_0\geqslant 1$，使$Ax_0=\mu_0x_0$. 由条件（1）知，有

$$\theta\leqslant\mu_0x_0=Ax_0\leqslant Bx_0+u_0.$$

由于$\|x_0\|\geqslant R$，故$\|x_0\|^{**}>R'$. 于是，由（1.25）、（1.26）式知

$$\mu_0\|x_0\|^{**}=\|Ax_0\|^{**}\leqslant\|Bx_0\|^{**}+\|u_0\|^{**}$$

$$=\sum_{i=1}^{N}[r(B)+\varepsilon]^{N-i}\|B^ix_0\|^*+\|u_0\|^{**}$$

$$=[r(B)+\varepsilon]\sum_{i=1}^{N-1}[r(B)+\varepsilon]^{N-i-1}\|B^ix_0\|^*$$

$$+\|B^Nx_0\|^*+\|u_0\|^{**}$$

$$\leqslant [r(B)+\varepsilon] \sum_{i=1}^{N-1} [r(B)+\varepsilon]^{N-i-1} \|B^i x_0\|^*$$

$$+[r(B)+\varepsilon]^N \|x_0\|^* + \|u_0\|^{**}$$

$$=[r(B)+\varepsilon] \sum_{i=1}^{N} [r(B)+\varepsilon]^{N-i} \|B^{i-1} x_0\|^* + \|u_0\|^{**}$$

$$=[r(B)+\varepsilon]\|x_0\|^{**} + \|u_0\|^{**}$$

$$\leqslant [r(B)+\varepsilon]\|x_0\|^{**} + \frac{\varepsilon}{2}R'$$

$$<[r(B)+\varepsilon]\|x_0\|^{**} + \frac{\varepsilon}{2}\|x_0\|^{**}$$

$$=\left[r(B) + \frac{3\varepsilon}{2}\right]\|x_0\|^{**}. \qquad (1.27)$$

由于 $\mu_0 \geqslant 1$，故由(1.27)式知 $1 \leqslant r(B)+\frac{3\varepsilon}{2}$. 此与 $\varepsilon=\frac{1}{2}(1-r(B))$ 矛盾. 因此，对任给 $x \in \partial\Omega(P)$，$\mu \geqslant 1$，有 $Ax \neq \mu x$. 所以

$$\deg(I-A,\ \Omega(P),\ 0;\ P)=1.$$

由于 $\Omega(P)$ 是满足 $\{x \in P \mid \|x\| \leqslant R\} \subset \Omega(P)$ 的任意有界区域，故 $\operatorname{ind}(I-A,\ \infty;\ P)=1$. 证完.

定理1.20 设$\Omega(P)$是P中的有界开集，A: $\overline{\Omega(P)} \to P$ 是全连续算子，并且在 $\partial\Omega(P)$ 上没有不动点. 设存在另一个Banach空间E_1，E_1中的锥P_1，以及齐次算子 B: $P \to P$，线性算子N: $P \to P_1$，保序算子L: $P_1 \to P_1$，使得

（1）存在 $u_0 \in P \setminus \{\theta\}$ 及自然数 n，满足 $NB^n u_0 \geqslant N u_0$，$N u_0 \neq 0$；

（2）对任给 $x \in P$，$NBx = LNx$；

（3）对任给 $x \in \partial\Omega(P)$，有 $NAx \geqslant NBx$；

则 $\deg(I-A,\ \Omega(P),\ 0;\ P)=0$.

证 下面首先证明，对任给 $x\in\partial\Omega(P)$，$\lambda\geqslant 0$，有

$$x-Ax\neq\lambda u_0, \tag{1.28}$$

其中 u_0 由条件（1）确定. 事实上，如果存在 $x_0\in\partial\Omega(P)$，$\lambda_0\geqslant 0$，使 $x_0-Ax_0=\lambda_0 u_0$. 由于 A 在 $\partial\Omega(P)$ 上没有不动点，故 $\lambda_0>0$. 显然 $Nx_0-NAx_0=\lambda_0 Nu_0$，故 $Nx_0\geqslant\lambda_0 Nu_0$. 令

$$\lambda^*=\sup\{\lambda\,|\,Nx_0\geqslant\lambda Nu_0\},$$

则显然有 $\lambda^*\geqslant\lambda_0>0$，$Nx_0\geqslant\lambda^* Nu_0$. 由条件（3）可知，$Nx_0\geqslant NAx_0\geqslant NBx_0$，故由条件（2）知

$$NBx_0=LNx_0\geqslant LNBx_0\geqslant NB^2x_0.$$

利用归纳法可知，对任意的自然数 i，都有 $NB^ix_0\geqslant NB^{i+1}x_0$. 所以 $NBx_0\geqslant NB^nx_0$. 又由条件（2）知，对任给 $x\in P$，有 $NB^nx=L^nNx$，所以

$$\begin{aligned}Nx_0&=NAx_0+\lambda_0Nu_0\geqslant NBx_0+\lambda_0Nu_0\\&\geqslant NB^nx_0+\lambda_0Nu_0=L^nNx_0+\lambda_0Nu_0\\&\geqslant L^nN\lambda^*u_0+\lambda_0Nu_0=NB^n\lambda^*u_0+\lambda_0Nu_0\\&\geqslant\lambda^*Nu_0+\lambda_0Nu_0=(\lambda^*+\lambda_0)Nu_0,\end{aligned}$$

此与 λ^* 的定义矛盾. 故对任给 $x\in\partial\Omega(P)$，$\lambda\geqslant 0$，(1.28) 式成立. 根据推论1.17即知，$\deg(I-A,\ \Omega(P),\ 0;\ P)=0$. 证完.

推论1.21 设 $A:\overline{\Omega(P)}\to P$ 是全连续算子，并且在 $\partial\Omega(P)$ 上没有不动点. 若存在线性算子 $B:\ P\to P$ 以及 $u_0\in P\setminus\{\theta\}$，使得

（1）对某自然数 n，有 $B^nu_0\geqslant u_0$；

（2）对任给 $x\in\partial\Omega(P)$，有 $Ax\geqslant Bx$；

则 $\deg(I-A,\ \Omega(P),\ 0;\ P)=0$.

证 在定理1.20中，令$E_1=E$，$P_1=P$，$N=I$，$L=B$即知推论1.21的结论成立。证完。

注1.22 在定理1.20中，我们引入了另一个Banach空间E_1及E_1中的一个锥P_1。这在许多情况下是方便的。事实上，在某些情况下，直接利用P中的序关系，检验推论1.21中的条件（2）是困难的，但是在引进了适当的Banach空间E_1及E_1中的锥P_1后，利用P_1导出的序关系检验定理1.20中的条件（3）却是方便的。

作为本节结论的应用，我们给出两个关于非线性算子特征元的存在性定理。

定理1.23 设E是无穷维Banach空间，Ω是E中的有界开集，$\theta\in\Omega$，$A:\overline{\Omega}\to E$全连续，$A\theta=\theta$，并且

$$\inf_{x\in\partial\Omega}\|Ax\|>0. \tag{1.29}$$

则A具有正特征值与负特征值，各对应有属于$\partial\Omega$的特征元。

证 取

$$a>\sup_{x\in\partial\Omega}\|x\|\cdot[\inf_{x\in\partial\Omega}\|Ax\|]^{-1}.$$

则对任给$x\in\partial\Omega$，有$\|aAx\|>\|x\|$。于是，根据推论1.10可知，有

$$\deg(I-aA,\ \Omega,\ 0)=0. \tag{1.30}$$

但另一方面，有

$$\deg(I,\ \Omega,\ 0)=1. \tag{1.31}$$

因此，若令$h(t,\ x)=x-taAx$，则由(1.30)、(1.31)两式，利用同伦不变性可知：必存在$0<t_0<1$及$x_0\in\partial\Omega$，使$h(t_0,\ x_0)=0$，即$x_0=t_0aAx_0$。因此t_0a是A的正特征值，$x_0\in\partial\Omega$是相应的特征元。考察算子$-A$，由上面已证的结论可

知，$-A$ 必有正特征值，即A 必有负特征值，相应的特征元属于$\partial\Omega$。证完。

定理1.24 设E是Banach空间，P是E中的锥，$\Omega(P)$ 是P中的有界开集，$\theta\in\Omega(P)$。设A: $\overline{\Omega(P)}\to P$ 是全连续算子，$A\theta=\theta$，并且

$$\inf_{x\in\partial\Omega(P)}\|Ax\|>0. \tag{1.32}$$

则A具有正特征值，而对应的特征元属于$\partial\Omega(P)$。

该定理的证明与定理1.23的证明完全类似.

附注 拓扑度的计算，是拓扑度理论中一个重要的课题，它对于拓扑度理论的应用，有着十分重要的意义.

定理1.9、推论1.10和推论1.11，首先由郭大钧〔8〕、〔15〕、〔29〕所证明（定理1.9的叙述形式是孙经先〔11〕、〔21〕提出的）。它们是关于拓扑度计算的基本结论之一。

在郭大钧上述工作的基础上，孙经先〔1〕、〔11〕、〔20〕提出了n重本质核的概念（定义1.1和定义1.6），并证明了关于拓扑度计算的若干一般性定理（定理1.3和定理1.7）。定理1.13是白锦东〔6〕、〔3〕在中获得的．黄春潮〔2〕、孙经先〔20〕也讨论了与推论1.10有关的问题.

把推论1.10的结论推广到严格集压缩算子的工作可见孙经先〔3〕、〔7〕．把推论1.10推广到其它算子类的工作可见陈文嵘、秦成林〔1〕、〔2〕.

定理1.16及推论1.15是郭大钧〔20〕证明的．定理1.18和定理1.20是孙经先〔19〕获得的。

§2 线性积分算子的正特征函数

本节主要讨论线性积分算子

$$K\varphi=\int_G k(x, y)\varphi(y)dy \tag{2.1}$$

正特征函数的存在性及其若干性质。本节所获得的结果，对非线性积分方程解的性质的研究，也有重要的意义。

在本节中，总假设G是R^N中的有界闭集，$\operatorname{mes} G \neq 0$。本节的讨论主要是在$C(G)$空间中进行的，最后我们将指出，本节的结论对$L_p$空间也是成立的。

下面总假定：

1° $k(x, y)$在$G\times G$上非负，即$k(x, y)\geqslant 0$；

2° 由（2.1）式所定义的线性积分算子K映$C(G)$入$C(G)$全连续。

定理2.1 设存在$\psi\in C(G)\setminus\{\varphi\in C(G)|\varphi(x)\leqslant 0\}$，实数$c>0$及自然数$p$，使

$$cK^p\psi\geqslant\psi. \tag{2.2}$$

则K具有对应于正特征值的正特征函数，即存在$\varphi_0(x)\geqslant 0$，$\varphi_0(x)\not\equiv 0$，$\lambda_0>0$，使

$$\varphi_0=\lambda_0 K\varphi_0.$$

证 令$P=\{\varphi\in C(G)|\varphi(x)\geqslant 0\}$，$S=\{\varphi\in P\,\big|\,\|\varphi\|=1\}$，下证$K$在$S$上具有特征函数。对每一个自然数$n$（$n=1, 2, \cdots$），定义

$$K_n\varphi=K\left(\varphi+\frac{1}{2n}(|\psi|+\psi)\right). \tag{2.3}$$

显然，$-K\psi \bar{\in} P$（因为若$-K\psi\in P$，则易知$-K^p\psi\in P$。由（2.2）式即得$\psi\in -P$，与已知条件矛盾）. 因此，

$$d\left(\theta,\ P+\frac{1}{n}K\psi\right)=d\left(-\frac{1}{n}K\psi,\ P\right)$$
$$>0\quad (n=1,\ 2,\ \cdots).\qquad (2.4)$$

由$\frac{1}{2}(|\psi|+\psi)\geqslant\psi$可知，对任给$\varphi\in P$，有

$$K_n\varphi=K\left(\varphi+\frac{1}{2n}(|\psi|+\psi)\right)$$
$$\geqslant K\left(\frac{1}{2n}(|\psi|+\psi)\right)\geqslant\frac{1}{n}K\psi\quad (n=1,2,\cdots).$$

因此，$K_nP\subset P+\frac{1}{n}K\psi$. 再利用（2.4）式可知

$$\inf_{\varphi\in S}\|K_n\varphi\|>0.$$

根据定理1.24，存在$\varphi_n\in S$，$\lambda_n>0$，使

$$\varphi_n=\lambda_nK_n\varphi_n\quad (n=1,\ 2,\ \cdots),$$

即

$$\varphi_n=\lambda_nK\left(\varphi_n+\frac{1}{2n}(|\psi|+\psi)\right)(n=1,2,\cdots).\quad (2.5)$$

对每一个固定的n，由（2.5）式可知

$$\varphi_n\geqslant\lambda_nK\varphi_n,\quad \varphi_n\geqslant\frac{\lambda_n}{n}K\left(\frac{1}{2}|\psi|+\psi\right).\qquad (2.6)$$

由（2.6）、（2.5）、（2.2）式可以得到

$$\varphi_n\geqslant\lambda_n^{p-1}K^{p-1}\varphi_n=\lambda_n^pK^p\left(\varphi_n+\frac{1}{2n}(|\psi|+\psi)\right)$$
$$\geqslant\frac{\lambda_n^p}{n}K^p\left(\frac{1}{2}|\psi|+\psi\right)\geqslant\frac{\lambda_n^p}{n}K^p\psi$$
$$\geqslant\frac{\lambda_n^p}{cn}\psi.\qquad (2.7)$$

令$\beta_n=\sup\{t|\varphi_n\geqslant t\psi\}$，则$\beta_n\geqslant\frac{\lambda_n^p}{cn}\psi$，$\varphi_n\geqslant\beta_n\psi$. 再利用(2.6)、(2.5)、(2.2) 三式可知

$$\varphi_n\geqslant\lambda_n^pK^p\left(\varphi_n+\frac{1}{2n}(|\psi|+\psi)\right)$$

$$\geqslant\lambda_n^p\left(\beta_n+\frac{1}{n}\right)K^p\psi\geqslant\frac{\lambda_n^p}{c}\left(\beta_n+\frac{1}{n}\right)\psi.$$

因此，由β_n的定义可知

$$\frac{\lambda_n^p}{c}\left(\beta_n+\frac{1}{n}\right)\leqslant\beta_n. \tag{2.8}$$

由（2.8）式即可知 $\lambda_n^p\leqslant c$. 于是

$$\lambda_n\leqslant c^{\frac{1}{p}}\quad(n=1,\ 2,\ \cdots). \tag{2.9}$$

由K的全连续性及（2.9）式可知，必存在$\{n\}$的子列$\{n_i\}$，使$\{\lambda_{n_i}\}$收敛于某λ_0，$\left\{K\left(\varphi_{n_i}+\frac{1}{2n_i}(|\psi|+\psi)\right)\right\}$收敛于某$y^*\in C(G)$. 因此由（2.5）式可知，$\{\varphi_{n_i}\}$收敛于$\varphi_0=\lambda_0y^*$，并且

$$\varphi_0=\lambda_0K\varphi_0.$$

显然，$\varphi_0\in S$，$\lambda_0>0$. 证完

注2.2 由（2.9）式可知，对定理2.1中的λ_0，有估计式

$$\lambda_0\leqslant c^{\frac{1}{p}}. \tag{2.10}$$

推论2.3 设G是R^N中的有界闭域，$K(x,\ y)$ 在$G\times G$上非负连续，并且存在$x_i\in G$（$1\leqslant i\leqslant p$），使

$$K(x_1,x_2)K(x_2,x_3)\cdots K(x_{p-1},x_p)K(x_p,x_1)>0. \tag{2.11}$$

则K至少有一个正特征函数。

证 令

$$K_p(x,y)=\int_G\cdots\int_G K(x,\ y_1)K(y_1,\ y_2)$$
$$\cdots K(y_{p-1},\ y)dy_1\cdots dy_{p-1},$$

则易知K^p可以表达为

$$K^p\varphi=\int_G K_p(x,\ y)\varphi(y)dy.$$

由$K_p(x,\ y)$的定义及（2.11）式易知，$K_p(x_1,x_1)>0$。由$K_p(x,\ y)$的连续性知，存在x_1在G中的闭邻域G_1，使当$x\in G_1$，$y\in G_1$时，$K_p(x,\ y)>0$。取$\psi\in C(G)$，使$\psi(x)\geqslant 0$，$\psi(x_1)>0$，并且当$x\overline{\in}G_1$时，$\psi(x)=0$。于是当$x\in G_1$时，有

$$K^p\psi=\int_G K_p(x,\ y)\psi(y)dy$$
$$\geqslant\int_{G_1}K_p(x,\ y)\psi(y)dy>0.$$

所以必存在$c>0$，使$cK^p\psi\geqslant\psi$。根据定理2.1，K至少有一个正特征函数。证完。

注2.4 显然，如果$k(x,\ x)\not\equiv 0$，则（2.11）式成立（取$p=1$）；如果$k(x,\ y)$是对称核，并且$k(x,\ y)\not\equiv 0$，则（2.11）式也成立（取$p=2$）。

为了给出线性积分算子正特征函数存在性的进一步判别准则，需要利用线性算子谱论中的某些概念和结论。先做某些准备。

设E是实Banach空间，令

$$\widetilde{E}=\{x+iy\,|\,x\in E,\ y\in E\},$$

其中i是虚数单位。在$\widetilde{E}$中引入加法和数乘如下，对任给$z_1=x_1+iy_1\in\widetilde{E}$，$z_2=x_2+iy_2\in\widetilde{E}_2$，定义

$$z_1+z_2=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2);$$

对任给 $z=x+iy\in\widetilde{E}$及复数 $c=a+ib$，定义

$$cz=(ax-by)+i(ay+bx).$$

则$\widetilde{E}$成为一线性空间．在$\widetilde{E}$中引入范数

$$\|x+iy\|=\max_{0\leqslant\theta\leqslant\pi}\|x\sin\theta+y\cos\theta\|,$$

容易证明在该范数下，$\widetilde{E}$是一Banach空间．

设B：$E\to E$是一线性算子，定义

$$\widetilde{B}(x+iy)=Bx+iBy \qquad (x+iy\in\widetilde{E}), \tag{2.12}$$

则$\widetilde{B}$是B在$\widetilde{E}$上的扩张．如果B是有界线性算子，容易证明，对任给自然数n，有

$$\|B^n\|=\|\widetilde{B}^n\|, \tag{2.13}$$

其中$\|B^n\|$是B^n：$E\to E$的算子范数，$\|\widetilde{B}^n\|$是$\widetilde{B}^n$：$\widetilde{E}\to\widetilde{E}$的算子范数．

复数$\lambda=\sigma+i\tau$称为是B的特征值，如果存在$z_0=x_0+iy_0\in\widetilde{E}$，使$z_0=\lambda\widetilde{B}z_0$．

设B是有界线性算子，则算子$\widetilde{B}$：$\widetilde{E}\to\widetilde{E}$的谱半径也称为是算子$B$：$E\to E$的谱半径，并记为$r(B)$．根据（2.13）式及Гельфанд公式，有

$$r(B)=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\|B^n\|}. \tag{2.14}$$

定理2.5 设假设1°，2°成立．又设线性积分算子K的谱半径$r(K)\neq 0$，则K必具有对应于$r^{-1}(K)$的正特征函数．

证 因为K的谱集$\sigma(K)$是闭集，故存在复数$\widetilde{\lambda}$，使$|\widetilde{\lambda}|=r(K)$．根据全连续线性算子的Riesz-Schauder理论，必存在$\widetilde{\psi}\in\widetilde{C(G)}$，$\widetilde{\psi}\neq\theta$，使

$$\widetilde{\psi}(x)=\widetilde{\lambda}^{-1}\int_G k(x,y)\widetilde{\psi}(y)dy.$$

所以，

$$|\widetilde{\psi}(x)|=|\widetilde{\lambda}|^{-1}\left|\int_G k(x,y)\widetilde{\psi}(y)dy\right|$$

$$\leqslant r^{-1}(K)\int_G k(x,y)|\widetilde{\psi}(y)|dy.$$

在定理2.1中，令 $\psi(x)=|\widetilde{\psi}(x)|$，$c=r^{-1}(K)$，$p=1$，则可知存在$\varphi_0(x)\geqslant 0$，$\varphi_0(x)\not\equiv 0$，$\lambda_0>0$，使

$$\varphi_0=\lambda_0 K\varphi_0.$$

由注2.2可知，$\lambda_0\leqslant r^{-1}(K)$。另一方面，由谱半径的定义可知，必有$\lambda_0\geqslant r^{-1}(K)$。故必有$\lambda_0=r^{-1}(K)$。证完.

定义2.6 设线性积分算子K由（2.1）式定义．如果存在$u_0\in P=\{\varphi\in C(G)|\varphi(x)\geqslant 0\}$，$u_0\not\equiv\theta$，使得对任给$\varphi\in P\backslash\{\theta\}$，都存在自然数$n$及实数$\alpha>0$，$\beta>0$，满足

$$\alpha u_0\leqslant K^n\varphi\leqslant\beta u_0, \tag{2.15}$$

则称K在$C(G)$上是u_0有界的，简称K是u_0有界算子.

引理2.7 设K是u_0有界的线性积分算子，并存在$\varphi_0\in P\backslash\{\theta\}$，使$\varphi_0$是$K$的特征函数，则$K$是$\varphi_0$有界的.

证 由u_0有界性的定义知，存在自然数n_0及$\alpha_0>0$，$\beta_0>0$，使

$$\alpha_0 u_0\leqslant K^{n_0}\varphi_0\leqslant\beta_0 u_0. \tag{2.16}$$

因为φ_0是K的特征函数，故存在$\lambda_0>0$，使$\varphi_0=\lambda_0 K\varphi_0$，因此$\varphi_0=\lambda_0^{n_0}K^{n_0}\varphi_0$。由（2.16）式可得

$$\lambda_0^{n_0}\alpha_0 u_0\leqslant\varphi_0\leqslant\lambda_0^{n_0}\beta_0 u_0. \tag{2.17}$$

对任给$\varphi\in P\backslash\{\theta\}$，存在自然数$n$及$\alpha>0$，$\beta>0$，使

$$\alpha u_0 \leqslant K^n\varphi \leqslant \beta u_0.$$

再利用（2.17）式，有

$$\frac{\alpha}{\lambda_0^{n_0}\beta_0}\varphi_0 \leqslant K^n\varphi \leqslant \frac{\beta}{\lambda_0^{n_0}\alpha_0}\varphi_0.$$

这表明K是φ_0有界算子．证完．

定理2.8 设假设1°，2°成立，又设K是u_0有界的．则K有且仅有一个就范正特征函数．

证 由u_0有界的定义可知对u_0，必存在自然数n及$c>0$，使$cK^n u_0 \geqslant u_0$．因此根据定理2.1，K必具有正特征函数φ_0．设相应于φ_0的正特征值为λ_0．下证若$\psi_0 \in C(G)\backslash\{\theta\}$，使$\psi_0 = \lambda_0 K\psi_0$，则必有实数$t_0 \neq 0$，使$\psi_0 = t_0\varphi_0$．用反证法，设对任给实数$t \neq 0$，都有$\psi_0 \neq t\varphi_0$．不失一般性，可以假定$\psi_0 \bar{\in} -P$．令

$$t^* = \sup\{t \mid \varphi_0 \geqslant t\psi_0\}, \tag{2.18}$$

则显然$t^* \geqslant 0$．若$t^* = +\infty$，则对任给自然数n，都有$\varphi_0 \geqslant n\psi_0$，即$\psi_0 \leqslant \frac{1}{n}\varphi_0$．令$n\to\infty$即有$\psi_0 \leqslant 0$，与$\psi_0 \bar{\in} -P$矛盾．另一方面，显然$\psi_0 \leqslant \frac{1}{2}(|\psi_0| + \psi_0) \in P$．根据引理2.7，$K$是$\varphi_0$有界的，故存在自然数$n_0$及$\beta > 0$，使$K^{n_0}\left(\frac{1}{2}|\psi_0| + \psi_0\right) \leqslant \beta\varphi_0$．所以$K^{n_0}\psi_0 \leqslant \beta\varphi_0$．注意到$\psi_0 = \lambda_0 K\psi_0$，故$\psi_0 \leqslant \lambda_0^{n_0}\beta\varphi_0$，即$\varphi_0 \geqslant (\lambda_0^{n_0}\beta)^{-1}\psi_0$，这表明$t^* > 0$．因此$0 < t^* < +\infty$．显然$\varphi_0 - t^*\psi_0 \geqslant 0$，$\varphi_0 - t^*\psi_0 \neq \theta$．由于$K$是$\varphi_0$有界的，故存在自然数$n$及$\alpha > 0$，使

$$K^n(\varphi_0 - t^*\psi_0) \geqslant \alpha\varphi_0 \geqslant \alpha t^*\psi_0. \tag{2.19}$$

由于$\varphi_0-t^*\psi_0$是K的特征函数，故$\varphi_0-t^*\psi_0=\lambda_0^n K^n(\varphi_0-t^*\psi_0)$，所以由（2.19）式可知

$$\varphi_0 \geqslant t^*(1+\lambda_0^n \alpha)\psi_0,$$

此与t^*的定义矛盾．因此，若$\psi_0 \in C(G)\setminus\{\theta\}$，$\psi=\lambda_0 K\psi_0$，则必存在$t_0 \neq 0$，使$\psi_0=t_0\varphi_0$，即$K$的相应于$\lambda_0$的特征子空间是一维的．这表明$K$相应于$\lambda_0$的就范正特征函数是唯一的．下记该特征函数为$\varphi_0$．

设存在$\varphi_1 \in P_1 \|\varphi_1\|=1, \varphi_1 \neq \varphi_0$，$\lambda_1>0$，使$\varphi_1=\lambda_1 K\varphi_1$．则由上一段证明可知，必有$\lambda_0 \neq \lambda_1$．不失一般性，可设$\lambda_0>\lambda_1$．令

$$t^{**}=\sup\{t \mid \varphi_1 \geqslant t\varphi_0\}.$$

则仿上段$0<t^*<+\infty$的证明可知$0<t^{**}<+\infty$，并且$\varphi_1 \geqslant t^*\varphi_0$．于是

$$\lambda_1\left(\varphi_1-t^{**}\frac{\lambda_0}{\lambda_1}\varphi_0\right)=K(\varphi_1-t^{**}\varphi_0) \geqslant 0,$$

即$\varphi_1 \geqslant t^{**}\dfrac{\lambda_0}{\lambda_1}\varphi_0$．由$t^{**}$的定义知，必有$t^{**}\dfrac{\lambda_0}{\lambda_1} \leqslant t^{**}$，即$\lambda_0 \leqslant \lambda_1$，产生矛盾．证完．

由定理2.8及其证明可知，在定理2.8的条件下，K有且仅有一个对应于正特征函数的正特征值λ_0，并且K相应于λ_0的特征子空间是一维的．事实上，还可以得到更进一步的结论．

定理2.9 设定理2.8的全部条件满足，则K有且仅有一个对应于正特征函数的正特征值λ_0，并且λ_0的代数重数等于1．

证 由定理2.8及其证明可知，K有且仅有一个对应于正特征函数的正特征元λ_0，并且K相应于λ_0的特征子空间是一维的．为了证明λ_0的代数重数等于1，只需证明如果ψ_0满足$(I-$

$\lambda_0 K)^2\psi_0=\theta$，则 $(I-\lambda_0 K)\psi_0=\theta$ 即可．用反证法，设 ψ_0 满足 $(I-\lambda_0 K)^2\psi_0=\theta$，但 $(I-\lambda_0 K)\psi_0\neq\theta$．显然 $(I-\lambda_0 K)\psi_0$ 是 K 的相应于 λ_0 的特征函数．故必存在 $t\neq 0$，使得 $(I-\lambda_0 K)\psi_0=t\varphi_0$，其中 φ_0 是 K 的相应于 λ_0 的就范正特征函数（根据定理2.8，它是唯一存在的）．令 $\psi^*=\frac{1}{t}\psi_0$，则有

$$K\psi^*=\lambda_0^{-1}(\psi^*-\varphi_0).$$

因此，

$$\begin{aligned}K^2\psi^*&=\lambda_0^{-1}(K\psi^*-K\varphi_0)\\&=\lambda_0^{-1}(\lambda_0^{-1}(\psi^*-\varphi_0)-\lambda_0^{-1}\varphi_0)=\lambda_0^{-2}(\psi^*-2\varphi_0).\end{aligned}$$

利用归纳法可以证明，对任何自然数 n，有

$$K^n\psi^*=\lambda_0^{-n}(\psi^*-n\varphi_0). \tag{2.20}$$

如果 $\psi^*\in P$，则由（2.20）式知，对一切自然数 n，都有

$$\psi^*-n\varphi_0=\lambda_0^n K^n\psi^*\geqslant 0.$$

于是 $\varphi_0\leqslant\frac{1}{n}\psi^*$．令 $n\to\infty$，有 $\varphi_0\leqslant 0$．产生矛盾．故 $\psi^*\bar{\in}P$．因此 $\frac{1}{2}(|\psi^*|-\psi^*)\neq\theta$．又因为 $\frac{1}{2}(|\psi^*|-\psi^*)\geqslant 0$，故由 K 的 φ_0 有界性知，存在自然数 m 及 $\beta>0$，使 $K^m\left(\frac{1}{2}(|\psi^*|-\psi^*)\right)\leqslant\beta\varphi_0$．根据（2.20）式，可得

$$\begin{aligned}&\lambda_0^{-m}(\psi^*-m\varphi_0)=K^m\psi^*\\&=K^m\left[\frac{1}{2}(|\psi^*|+\psi^*)-\frac{1}{2}(|\psi^*|-\psi^*)\right]\\&\geqslant -K^m\left(\frac{1}{2}|\psi^*|-\psi^*\right)\geqslant-\beta\varphi_0.\end{aligned}$$

于是

$$\psi^*\geqslant(m-\beta\lambda_0^m)\varphi_0 \tag{2.21}$$

其中$m-\beta\lambda_0^m<0$（否则，$\psi^*\in P$，与$\psi^*\bar{\in}P$矛盾）．令

$$t^*=\sup\{t\,|\,\varphi_0+t\psi^*\in P\},$$

由（2.21）式可知$t^*>0$．若$t^*=+\infty$，则对任给自然数n，$\varphi_0+n\psi^*\geqslant 0$．故$\psi^*\geqslant-\frac{1}{n}\varphi_0$．令$n\to\infty$得$\psi^*\geqslant 0$，与$\psi^*\bar{\in}P$矛盾，故$t^*<+\infty$．因此$0<t^*<+\infty$．显然$\varphi_0+t^*\psi^*\in P$，故$K(\varphi_0+t^*\psi^*)\in P$．再利用（2.20）式即知，有

$$\lambda_0^{-1}\varphi_0+t^*\lambda_0^{-1}(\psi^*-\varphi_0)\in P,$$

即$(1-t^*)\varphi_0+t^*\psi^*\in P$．此与$t^*$的定义矛盾．证完．

推论2.10 在定理2.8的条件下，K的谱半径$r(K)\neq 0$，$r^{-1}(K)$是K的唯一对应于正特征函数的正特征值，$r^{-1}(K)$的代数重数为1，并且除了对应于$r^{-1}(K)$的特征函数外，K没有其它正特征函数．

证 由定理2.5、定理2.8及定理2.9推出．证完．

下面给出某些判别一个线性积分算子K是u_0有界算子的充分性条件．

引理2.11 设由（2.1）式定义的线性积分算子K映$P=\{\varphi\in C(G)\,|\,\varphi(x)\geqslant 0\}$入$P$．又设$k(x,y)\neq 0$，并且对每一个$G_1\subset G$，$\operatorname{mes}G_1\neq 0$，都存在$\eta=\eta(G_1)>0$，使得

$$\int_{G_1}k(x,y)dy\geqslant\eta\int_G k(x,y)dy\quad(\forall x\in G).\tag{2.22}$$

则K是u_0有界算子，其中

$$u_0(x)=\int_G k(x,y)dy.$$

证 给定$\varphi(x)\geqslant 0$，$\varphi(x)\neq 0$，由$\varphi(x)$的连续性知存在$G_1\subset G$，$\operatorname{mes}G_1\neq 0$，使得对$x\in G_1$，$\varphi(x)\geqslant\alpha_0>0$．所以，

$$K\varphi(x) = \int_G k(x, y)\varphi(y)dy \geqslant \alpha_0 \int_{G_1} k(x,y)dy$$

$$\geqslant \alpha_0 \eta(G_1)u_0(x), \quad \forall x \in G.$$

另一方面，

$$K\varphi(x) = \int_G k(x,y)\varphi(y)dy \leqslant \|\varphi\| u_0(x), \quad \forall x \in G.$$

因此，K是u_0有界的．证完．

引理2.12 设$k(x, y)$在$G \times G$上非负连续，并存在非负连续函数$u_0(x)$，$\varphi_0(x)$，$\psi_0(x)$，满足

$$u_0(x)\varphi_0(y) \leqslant k(x, y) \leqslant u_0(x)\psi_0(y). \qquad (2.23)$$

如果 $u_0(x) \not\equiv 0$，并且$\text{mes}\{x \in G | \varphi_0(x) = 0\} = 0$，则$K$是 u_0 有界算子．

证 任给$\varphi(x) \in C(G)$，$\varphi(x) \geqslant 0$，$\varphi(x) \not\equiv 0$，由（2.23）式可知必有

$$\alpha u_0(x) \leqslant \int_G k(x, y)\varphi(y)dy \leqslant \beta u_0(x),$$

其中 $\alpha = \int_G \varphi_0(y)\varphi(y)dy > 0$，$\beta = \int_G \psi_0(y)\varphi(y)dy \geqslant \alpha > 0$．证完．

注2.13 本节的讨论是在$C(G)$空间中进行的．但是很容易知道，本节的主要结论，在$L_p(G)$中也都是成立的，这里G可为R^N中可测集，$\text{mes}G \neq 0$．更一般地，如果E是一个Banach空间，P是E中的一个锥，$K: P \to P$是一个全连续的线性算子，可以证明，本节的主要结论也都是成立的．

附注 关于正线性积分算子正特征函数（更一般地，全连续正线性算子正特征元）的研究，开始于 М. Г. Крейн 和 М.А.Ругман〔1〕．М.А.Красносельский〔1〕、〔4〕系

统地总结了这一方面的工作。

§3 次线性积分方程的正解

在本节中，首先讨论次线性Урысон型积分方程

$$\varphi(x)=\int_G k(x,\ y,\ \varphi(y))dy=A\varphi(x) \qquad (3.1)$$

正解的存在性，然后着重讨论一类 Hammerstein 型积分方程正解的存在性、唯一性，并给出迭代求解的程序。

设G是R^N中某有界闭集. 设

1° 对任给 $x\in G$, $y\in G$, $u\geqslant 0$，有$k(x,y,u)\geqslant 0$，并且由（3.1）式定义的算子A映$P=\{\varphi\in C(G)\,|\,\varphi(x)\geqslant 0\}$入$P$全连续；

2° 存在$k_1(x,\ y)$及$b\geqslant 0$，使对任给$x\in G$, $y\in G$, $u\geqslant 0$，有

$$k(x,\ y,\ u)\leqslant k_1(x,\ y)u+b, \qquad (3.2)$$

并且以$k_1(x,\ y)$为核的线性积分算子K_1映P入P连续；

3° 存在$k_2(x,\ y)$及$r>0$，使对任给$x\in G$, $y\in G$, $0\leqslant u\leqslant r$，有

$$k(x,\ y,\ u)\geqslant k_2(x,\ y)u, \qquad (3.3)$$

其中以$k_2(x,\ y)$为核的线性积分算子K_2映P入P全连续。

下面分别用$r(K_1)$和$r(K_2)$表示K_1和K_2的谱半径。

定理3.1 设假设1°～3°满足，又设

$$r(K_1)<1\leqslant r(K_2). \qquad (3.4)$$

则方程（3.1）至少有一个在G上不恒为零的非负连续解。

证 由2°知对任给$\varphi\in P$，有

$$A\varphi \leqslant K_1\varphi + b\,\mathrm{mes}\,G.$$

由 $r(K_1) < 1$，并根据定理1.19知

$$\mathrm{ind}(I-A,\ \infty;\ P) = 1. \tag{3.5}$$

由3°知对任给$\varphi \in P$，$\|\varphi\| = r$，有

$$A\varphi \geqslant K_2\varphi.$$

由 $r(K_2) \geqslant 1$ 及定理2.5知必存在$\varphi^* \in P\backslash\{\theta\}$，使

$$K_2\varphi^* = r(K_2)\varphi^* \geqslant \varphi^*.$$

故由推论1.21可知

$$\deg(I-A,\ B_r \cap P,\ 0;\ P) = 0, \tag{3.6}$$

其中$B_r = \{\varphi \in C(G) \mid \|\varphi\| < r\}$. 由（3.5）、（3.6）两式可知，存在$\varphi_0 \in P\backslash\{\theta\}$，使$A\varphi_0 = \varphi_0$. 证完.

考察Hammerstein型积分方程

$$\varphi(x) = \int_G k(x,\ y) f(y,\ \varphi(y))dy = A\varphi. \tag{3.7}$$

假设

1* $f(x,\ u)$ 在$G \times [0,\ +\infty)$ 上非负连续，$k(x,\ y)$ 在$G \times G$上非负，并且由 $k(x,\ y)$ 确定的线性积分算子 K 映$P = \{\varphi \in C(G) \mid \varphi(x) \geqslant 0\}$入$P$全连续；

2* 存在 $a(x) \in P$，$b(x) \in P$，使得对任给 $x \in G$，$u \geqslant 0$，有

$$f(x,\ u) \leqslant a(x)u + b(x); \tag{3.8}$$

3* 存在 $c(x) \in P$ 及 $r > 0$，使得对任给 $x \in G$，$0 \leqslant u \leqslant r$，有

$$f(x,\ u) \geqslant c(x)u. \tag{3.9}$$

设K_0和K_∞分别是以 $k(x,\ y)c(x)$和 $k(x,\ y)a(x)$为核的线性积分算子，$r(K_0)$和 $r(K_\infty)$分别表示K_0和K_∞的谱半径，

作为定理3.1的一个明显推论，有

定理3.2 设假设1*～3*满足，$r(K_\infty)<1\leqslant r(K_0)$。则方程（3.7）至少有一个在$G$上不恒为零的非负连续解。

为了下面讨论的需要，建立一个引理。

引理3.3 设 $\varphi_n(x)\in C(G)$，$\varphi_n(x)\geqslant 0$，$\varphi(x)\in C(G)$，$\varphi(x)\geqslant 0$。若

$$\lim_{n\to\infty}\|\varphi_n-\varphi\|_C=0, \tag{3.10}$$

则对任给 $\alpha>0$，必有 $\lim\limits_{n\to\infty}\|\varphi_n^\alpha-\varphi^\alpha\|_C=0$。

证 根据一个初等不等式（见G.H.Hardy等〔1〕）

$$|x^\alpha-y^\alpha|\leqslant\alpha(x^{\alpha-1}+y^{\alpha-1})|x-y|,$$

$$(x>0,\ y>0,\ \alpha>0), \tag{3.11}$$

并注意到当$\alpha\geqslant 1$时，不等式(3.11)对$x=0$或$y=0$也成立，即知当$\alpha\geqslant 1$时$\lim\limits_{n\to\infty}\|\varphi_n^\alpha-\varphi^\alpha\|_C=0$.下设$0<\alpha<1$.任给$\varepsilon>0$，

令$\varepsilon^*=\left(\dfrac{\varepsilon}{2\alpha+2}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$.作函数

$$\psi(x)=\begin{cases}\varphi(x), & \text{当}\varphi(x)\geqslant\varepsilon^*\text{时},\\ \varepsilon^*, & \text{当}\varphi(x)<\varepsilon^*\text{时};\end{cases}$$

$$\eta(x)=\begin{cases}\varphi(x), & \text{当}\varphi(x)<\varepsilon^*\text{时},\\ \varepsilon^*, & \text{当}\varphi(x)\geqslant\varepsilon^*\text{时};\end{cases}$$

$$\psi_n(x)=\begin{cases}\varphi_n(x), & \text{当}\varphi_n(x)\geqslant\varepsilon^*\text{时},\\ \varepsilon^*, & \text{当}\varphi_n(x)<\varepsilon^*\text{时};\end{cases}$$

$$\eta_n(x)=\begin{cases}\varphi_n(x), & \text{当}\varphi_n(x)<\varepsilon^*\text{时},\\ \varepsilon^*, & \text{当}\varphi_n(x)\geqslant\varepsilon^*\text{时}.\end{cases}$$

显然，

$$\psi(x)+\eta(x)=\varphi(x)+\varepsilon^*,$$

$$\psi_n(x)+\eta_n(x)=\varphi_n(x)+\varepsilon^*,$$

$$[\psi(x)]^\alpha+[\eta(x)]^\alpha=[\varphi(x)]^\alpha+(\varepsilon^*)^\alpha,$$

$$[\psi_n(x)]^\alpha+[\eta_n(x)]^\alpha=[\varphi_n(x)]^\alpha+(\varepsilon^*)^\alpha,$$

$$\lim_{n\to\infty}\|\psi_n-\psi\|_C=0,\quad \lim_{n\to\infty}\|\eta_n-\eta\|_C=0. \tag{3.12}$$

因此，根据(3.11)式，可得

$$\begin{aligned}|[\varphi_n(x)]^\alpha-[\varphi(x)]^\alpha|&\leqslant|[\psi_n(x)]^\alpha-[\psi(x)]^\alpha|\\&\quad+|[\eta_n(x)]^\alpha-[\eta(x)]^\alpha|\\&\leqslant2\alpha(\varepsilon^*)^{\alpha-1}|\psi_n(x)-\psi(x)|+2(\varepsilon^*)^\alpha.\end{aligned} \tag{3.13}$$

由(3.12)式知，存在N，使当$n>N$时，有$\|\psi_n-\psi\|<\varepsilon^*$.于是，由(3.13)式知，当$n>N$时

$$\|\varphi_n^\alpha-\varphi^\alpha\|_C<2\alpha(\varepsilon^*)^\alpha+2(\varepsilon^*)^\alpha=\varepsilon.$$

故当$0<\alpha_i<1$时，引理的结论也成立.证完.

下面继续考察方程(3.7).设$f(x,u)$可以表为

$$f(x,u)=\sum_{i=1}^n a_i(x)u^{\alpha_i}. \tag{3.14}$$

定理3.4 设：(1)$k(x,y)$在$G\times G$上非负连续，并且以$k(x,y)$为核的线性积分算子K（作为映$C(G)$入$C(G)$的算子时）的谱半径$r(K)\neq0$；

(2)$f(x,u)$可以表为(3.14)式，其中$a_i(x)\geqslant0$，$a_i(x)\in L$，$0<\alpha_i<1$ $(i=1,2,\cdots,n)$，并且存在$1\leqslant i_0\leqslant n$，使

$$\inf_{x\in G}a_{i_0}(x)>0.$$

则存在$R_0>0$，使对任何$R\geqslant R_0$，作迭代序列

$$v_0(x)\equiv R,\quad v_n(x)=Av_{n-1}(x)\quad(n=1,2,\cdots), \tag{3.15}$$

函数列$v_n(x)$必在G上递减地一致收敛于某函数$\varphi^*(x)$，并且$\varphi^*(x)$是方程(3.7)在G上的不恒为零的非负连续解.

证 令$P=\{\varphi(x)\in C(G)\mid\varphi(x)\geqslant 0\}$.由引理3.3可知，由$f\varphi=f(x,\varphi(x))=\sum_{i=1}^{n}a_i(x)[\varphi(x)]^{\alpha_i}$定义的算子f映$P$入$L$连续有界，从而由(3.7)式定义的算子$A$映$P$入$P$全连续。

因为$r(K)\neq 0$，故根据定理2.5可知，必存在$\psi^*\in P,\|\psi^*\|=1$，使$K\psi^*=r(K)\psi^*$.取定$\varepsilon>0$，使

$$\varepsilon\leqslant[\tau_0 r(K)]^{\frac{1}{1-\alpha_{i_0}}},\tag{3.16}$$

其中$\tau_0=\inf\limits_{x\in G}a_{i_0}(x)>0$.则

$$\begin{aligned}A(\varepsilon\psi^*)&=\int_G k(x,y)f(y,\varepsilon\psi^*(y))dy\\&\geqslant\int_G k(x,y)a_{i_0}(y)\varepsilon^{\alpha_{i_0}}[\psi^*(y)]^{\alpha_{i_0}}dy\\&\geqslant\tau_0\varepsilon^{\alpha_{i_0}}\int_G k(x,y)\psi^*(y)dy\\&=\tau_0\varepsilon^{\alpha_{i_0}}r(K)\psi^*\geqslant\varepsilon\psi^*.\end{aligned}\tag{3.17}$$

另一方面，存在$R_0>\varepsilon$，使当$R\geqslant R_0$时，恒有

$$M\sum_{i=1}^{n}\|a_i\|_L R^{\alpha_i-1}\leqslant 1,\tag{3.18}$$

其中$M=\max\limits_{(x,y)\in G\times G}k(x,y)$.则由(3.18)式可知，对$v_0(x)\equiv R(R\geqslant R_0)$，有

$$\begin{aligned}Av_0(x)&=\int_G k(x,y)f(y,\varphi(y))dy\\&\leqslant M\sum_{i=1}^{n}\|a_i\|_L R^{\alpha_i}\leqslant R=v_0(x).\end{aligned}\tag{3.19}$$

作迭代序列

$$u_0(x)=\varepsilon\psi^*(x),\quad u_n(x)=Au_{n-1}(x)\quad(n=1,2,\cdots)\tag{3.20}$$

$$v_0(x)\equiv R(R\geqslant R_0),\quad v_n(x)=Av_{n-1}(x)$$

$(n=1,2,\cdots)$ (3.21)

注意到$u_0(x)\leqslant v_0(x)$以及A是增算子（即$0\leqslant u(x)\leqslant v(x)$蕴含着$Au(x)\leqslant Av(x)$，可得

$$u_0(x)\leqslant u_1(x)\leqslant\cdots\leqslant u_n(x)\leqslant\cdots\leqslant v_n(x)\leqslant\cdots$$
$$\leqslant v_1(x)\leqslant v_0(x). \tag{3.22}$$

根据A的全连续性，知$\{v_n(x)\}$必有子列$\{v_{n_i}(x)\}$在G上一致收敛于某$\varphi^*(x)\in C(G)$. 由(3.22)式知，$\|v_n-\varphi^*\|_C\to 0$ $(n\to\infty)$，并且$u_0(x)\leqslant\varphi^*(x)\leqslant v_0(x)$. 故$\varphi^*(x)$在$G$上非负、连续且不恒等于零. 在(3.21)式中，令$n\to\infty$，即得$\varphi^*(x)=A\varphi^*(x)$. 证完.

注3.5 在定理3.4中，若诸$a_i(x)$$(1\leqslant i\leqslant n)$都是$G$上的非负连续函数，则定理3.4的条件(1)可以放宽为

(1^*) $k(x,y)$在$G\times G$上非负，以$k(x,y)$为核的线性积分算子K映$C(G)$入$C(G)$全连续，并且$r(K)\neq 0$.

事实上，在这种情况下，由(3.7)式定义的算子A映$C(G)$入$C(G)$全连续，并且(3.17)式成立. 取$R_0>\varepsilon$，使当$R\geqslant R_0$时，有

$$\|K\|\sum_{i=1}^{n}\beta_i R^{a_i-1}\leqslant 1$$

其中$\beta_i=\max\limits_{x\in G}a_i(x)$. 于是，对$v_0(x)\equiv R(R\geqslant R_0)$，有

$$Av_0(x)=\int_G k(x,y)f(y,v_0(y))dy$$

$$\leqslant\|K\|\sum_{i=1}^{n}\beta_i R^{a_i}\leqslant R=v_0(x).$$

证明的其余部分同定理3.4的证明. 证完.

注3.6 设$k(x,y)$在$G\times G$上非负连续，并且下列三个条

件之一成立：

（1）$k(x,x)\not\equiv 0$；

（2）$k(x,y)$对称，并且$k(x,y)\not\equiv 0$；

（3）$\int_G k(x,y)dx > 0\ (y\in G)$；

则根据定理2.1易知$r(K)\neq 0$，从而定理3.4的条件（1）满足。如果当$x\neq y$时$k(x,y)$是不恒等于零的连续对称核，并满足

$$0\leqslant k(x,y)\leqslant \frac{M_0}{|x-y|^\alpha},\ (x,y\in G, x\neq y), \tag{3.23}$$

其中M_0为常数，$0<\alpha<N$，则可以证明K映$C(G)$入$C(G)$全连续，从而注3.5中的条件（1*）满足。

定理3.7 设：（1）$k(x,y)$非负、不恒等于0，并且以$k(x,y)$为核的线性积分算子K映$C(G)$入$C(G)$全连续；

（2）对每一个闭球$T\subset G^0$（G^0表G的内点集），都存在$\varepsilon^*=\varepsilon^*(T)>0$，使

$$\int_T k(x,y)dy\geqslant \varepsilon^*\int_G k(x,y)dy\quad (x\in G); \tag{3.24}$$

（3）$f(x,u)$可以表为(3.14)式，其中$a_i(x)$（$1\leqslant i\leqslant n$）在G上非负连续，$0<\alpha_i<1$（$1\leqslant i\leqslant n$），并存在$1\leqslant i_0\leqslant n$，使$a_{i_0}(x)>0\ (\forall x\in G)$；

则方程(3.7)在G上的不恒为零的非负连续解$\varphi^*(x)$存在并且唯一。更进一步，以G上任何一个不恒为零的非负连续函数$\varphi_0(x)$为初值，作迭代序列

$$\varphi_n(x)=A\varphi_{n-1}(x)\quad (n=1,2,\cdots), \tag{3.25}$$

都有

$$\lim_{n\to\infty}\|\varphi_n-\varphi^*\|_C=0. \tag{3.26}$$

证 由(3.24)式容易证明（参见引理2.11的证明），$r(K)$

$\not\equiv 0$．从而根据定理3.4及注3.5知，方程(3.7)的不恒为零的非负连续解$\varphi^*(x)$存在．设$\varphi^{**}(x)$是方程(3.7)的任一个不恒为零的非负连续解．于是存在$\sigma>0$以及闭球$T\subset G^0$，使对任给$x\in T$，$\varphi^{**}(x)\geqslant\sigma$．令$\tau_0=\min\limits_{x\in G}a_{i_0}(x)>0$．由条件(2)可知

$$\varphi^{**}(x)\geqslant\int_G k(x,y)a_{i_0}(y)[\varphi^{**}(y)]^{\alpha_{i_0}}dy$$

$$\geqslant\tau_0\int_T k(x,y)[\varphi^{**}(y)]^{\alpha_{i_0}}dy\geqslant\tau_0\sigma^{\alpha_{i_0}}\int_T k(x,y)dy$$

$$\geqslant\varepsilon^*\tau_0\sigma^{\alpha_{i_0}}\int_G k(x,y)dy. \tag{3.27}$$

另一方面，令$\beta_i=\max\limits_{x\in G}\ a_i(x)$ $(i=1,2,\cdots,n)$，$\beta=\sum\limits_{i=1}^{n}\beta_i\|\varphi^*\|_C^{\alpha_i}$，则有

$$\varphi^*(x)\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}\beta_i\|\varphi^*\|_C^{\alpha_i}\right)\int_G k(x,y)dy=\beta\int_G k(x,y)dy. \tag{3.28}$$

由(3.27)、(3.28)两式可得

$$\varphi^{**}(x)\geqslant\varepsilon^*\tau_0\sigma^{\alpha_{i_0}}\beta^{-1}\varphi^*(x)\quad(x\in G) \tag{3.29}$$

令$t_0=\sup\{t\,|\,\varphi^{**}(x)\geqslant t\varphi^*(x)\}$，则$0<\varepsilon^*\tau_0\sigma^{\alpha_{i_0}}\beta^{-1}\leqslant t_0<+\infty$，$\varphi^{**}(x)\geqslant t_0\varphi^*(x)$．下证$t_0\geqslant 1$．若不然，设$0<t_0<1$．令$\alpha=\max\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$，则

$$\varphi^{**}(x)=\int_G k(x,y)\left\{\sum_{i=1}^{n}a_i(y)[\varphi^{**}(y)]^{\alpha_i}\right\}dy$$

$$\geqslant\int_G k(x,y)\left\{\sum_{i=1}^{n}a_i(y)[t_0\varphi^*(y)]^{\alpha_i}\right\}dy$$

$$\geqslant t_0^{\alpha}\int_G k(x,y)\left\{\sum_{i=1}^{n}a_i(y)[\varphi^*(y)]^{\alpha_i}\right\}dy$$

$$=t_0^{\alpha}\varphi^*(x). \qquad (3.30)$$

由于 $0<\alpha<1$，故$t_0^{\alpha}>t_0$，此与t_0的定义矛盾.故必有$t_0\geqslant 1$，从而$\varphi^{**}(x)\geqslant\varphi^*(x)$.同理可证$\varphi^*(x)\geqslant\varphi^{**}(x)$. 因此$\varphi^*(x)\equiv\varphi^{**}(x)$.唯一性获证.

设$\varphi_0(x)$是G上任意给定的一个不恒为零的非负连续函数.考察迭代序列(3.25).显然存在$\sigma_1>0$及闭球$T_1\subset G^0$，使对任给$x\in T_1$，有$\varphi_0(x)\geqslant\sigma_1$.由条件（2），存在$\varepsilon_1^*=\varepsilon_1^*(T_1)>0$，使

$$\int_T k(x,y)dy\geqslant\varepsilon_1^*\int_G k(x,y)dy \quad (x\in G).$$

仿(3.27)式可以证明

$$\varphi_1(x)=A\varphi_0(x)\geqslant\varepsilon_1^*\tau_0\sigma_1^{\alpha_{i_0}}\int_G k(x,y)dy. \qquad (3.31)$$

另一方面，取$\varepsilon>0$，使(3.16)式成立，并满足

$$\sum_{i=1}^{n}\beta_i\varepsilon^{\alpha_i}\leqslant\varepsilon_1^*\tau_0\sigma_1^{\alpha_{i_0}}. \qquad (3.32)$$

于是，对迭代序列(3.25)，有(注意（3.31)式)

$$u_1(x)=Au_0(x)=A[\varepsilon\psi^*(x)]\leqslant\Big(\sum_{i=1}^{n}\beta_i\varepsilon^{\alpha_i}\Big)\int_G k(x,y)dy$$

$$\leqslant\varepsilon_1^*\tau_0\sigma_1^{\alpha_{i_0}}\int_G k(x,y)dy\leqslant\varphi_1(x). \qquad (3.33)$$

取定$R\geqslant\{R_0,\ \max\limits_{x\in G}\varphi_0(x)\}$,其中$R_0$的意义见定理3.4的证明过程及注3.5.于是，对迭代序列(3.25)，有$v_0(x)\equiv R\geqslant\varphi_0(x)$，从而$v_1(x)=Av_0(x)\geqslant A\varphi_0(x)=\varphi_1(x)$. 由此可知$u_1(x)\leqslant\varphi_1(x)\leqslant v_1(x)$.以$A$作用之，得

$$u_n(x)\leqslant\varphi_n(x)\leqslant v_n(x) \quad (n=1,2,\cdots). \qquad (3.34)$$

由定理3.4的证明过程及注3.5，并注意到$\varphi^*(x)$是方程（3.7）唯一的、不恒为零的非负连续解，可知必有

$$\lim_{n\to\infty}\|v_n-\varphi^*\|=0,\quad \lim_{n\to\infty}\|u_n-\varphi^*\|=0 \tag{3.35}$$

由(3.34)、(3.35)两式，即知(3.26)式成立.证完.

附注 关于次线性积分方程正解的存在性，М.А.Красносельский〔1〕、〔4〕就已讨论过.М.А.Красносельский和Л.Л.Забрейко〔1〕指出，若K超正.并且本节定理3.2的全部条件满足，则方程(3.7)至少有一个不恒为0的非负连续解.但K超正是一个很强的条件，郭大钧在〔11〕、〔12〕、〔21〕，孙经先在〔13〕中都致力于删掉这一条件，并获得成功，这就是本节的定理3.1和定理3.2.

定理3.4和定理3.7都是郭大钧〔21〕证明的.

§4 渐近线性积分方程的正解

本节将继续讨论Урысон型积分方程

$$\varphi(x)=\lambda\int_G k(x,y,\varphi(y))dy=\lambda A\varphi(x). \tag{4.1}$$

设G是R^N中的有界闭域，$P=\{\varphi\in C(G)\mid\varphi(x)\geqslant 0\}$.假定

1°对任给$x\in G$，$y\in G$，$u\geqslant 0$，有$k(x,y,u)\geqslant 0$，并且由(4.1)式定义的积分算子A映P入P全连续；

2°对$x\in G$，$y\in G$一致地成立

$$\lim_{u\to 0^+}\frac{k(x,y,u)}{u}=k_0(x,y), \tag{4.2}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{k(x,y,u)}{u}=k_\infty(x,y); \tag{4.3}$$

3°由

$$K_0\psi=\int_G k_0(x,y)\psi(y)dy \tag{4.4}$$

$$K_\infty\psi=\int_G k_\infty(x,y)\psi(y)dy \tag{4.5}$$

定义的线性积分算子K_0和K_∞分别是映P入P的u_0有界的线性算子.

引理4.1 (i)设(4.2)式成立，则

$$\lim_{\varphi\in P,\ \|\varphi\|\to 0}\frac{\|A\varphi-K_0\varphi\|}{\|\varphi\|}=0\,; \tag{4.6}$$

(ii)设(4.3)式成立，则

$$\lim_{\varphi\in P,\ \|\varphi\|\to\infty}\frac{\|A\varphi-K_\infty\varphi\|}{\|\varphi\|}=0\,. \tag{4.7}$$

证 (i)任给$\varepsilon>0$，由(4.2)式可知，存在$\delta>0$，使当$0\leqslant u\leqslant\delta$时，对一切$x\in G$，$y\in G$.都有

$$|k(x,y,u)-k_0(x,y)u|\leqslant\varepsilon u.$$

因此，当$\varphi\in P$，$\|\varphi\|\leqslant\delta$时

$$\frac{\|A\varphi-K_0\varphi\|}{\|\varphi\|}=\frac{1}{\|\varphi\|}\max_{x\in G}\left|\int_G[k(x,y,\varphi(y))-k_0(x,y)\varphi(y)dy\right|$$

$$\leqslant\frac{1}{\|\varphi\|}\max_{x\in G}\int_G|k(x,y,\varphi(y))-k_0(x,y)\varphi(y)|dy$$

$$\leqslant\frac{1}{\|\varphi\|}\int_G\varepsilon\varphi(y)dy\leqslant\varepsilon\,\mathrm{mes}G.$$

(i)获证.下证(ii).任给$\varepsilon_1>0$，由(4.3)式可知存在$R>0$，使对一切$x\in G$，$y\in G$，$u\geqslant R$，有

$$\left|\frac{k(x,y,u)}{u}-k_\infty(x,y)\right|<\varepsilon. \tag{4.8}$$

令$P_R=P\cap\{\varphi\in C(G)\,|\,\|\varphi\|\leqslant R\}$，取

$$M=\sup_{\varphi\in P_R}\{\|A\varphi\|,\ \|K_\infty\varphi\|\}, \tag{4.9}$$

定义

$$U_1\varphi(x)=\begin{cases}\varphi(x), & \text{当}\varphi(x)\leqslant R\text{时},\\ R, & \text{当}\varphi(x)\geqslant R\text{时},\end{cases}$$

$$U_2\varphi(x)=\begin{cases}R, & \text{当}\varphi(x)\leqslant R\text{时},\\ \varphi(x), & \text{当}\varphi(x)\geqslant R\text{时}.\end{cases}$$

则显然

$$A\varphi=\int_G k(x,y,\varphi(y))dy$$

$$=\int_G k(x,y,U_1\varphi(y))dy+\int_G k(x,y,U_2\varphi(y))dy$$

$$-\int_G k(x,y,R)dy$$

$$=AU_1\varphi+AU_2\varphi-AR(x). \tag{4.10}$$

其中$R(x)\equiv R$.同理

$$K_\infty\varphi=K_\infty U_1\varphi+K_\infty U_2\varphi-K_\infty R(x) \tag{4.11}$$

由(4.9)式可知

$$\|AU_1\varphi\|\leqslant M,\qquad \|AR(x)\|\leqslant M,$$

$$\|K_\infty U_1\varphi\|\leqslant M,\qquad \|K_\infty R(x)\|\leqslant M.$$

所以，由(4.10)、(4.11)式可知，当$\varphi\in P,\|\varphi\|>R$时有

$$\|A\varphi-K_\infty\varphi\|\leqslant 4M+\|AU_2\varphi-K_\infty U_2\varphi\|$$

$$=4M+\max_{x\in G}\left|\int_G [K(x,y,U_2\varphi(y))\right.$$

$$\left.-k_\infty(x,y)U_2\varphi(y))]dy\right|$$

$$\leqslant 4M+\int_G \varepsilon U_2\varphi(y)dy\leqslant 4M+\varepsilon\|\varphi\|\operatorname{mes}G.$$

于是，

$$\overline{\lim_{\substack{\|\varphi\|\to\infty\\ \varphi\in P}}}\frac{\|A\varphi-K_\infty\varphi\|}{\|\varphi\|}\leqslant\overline{\lim_{\substack{\|\varphi\|\to\infty\\ \varphi\in P}}}\left(\frac{4M}{\|\varphi\|}+\varepsilon\operatorname{mes}G\right)$$

$$=\varepsilon\operatorname{mes}G.$$

由于ε是任取的. 故(4.7)式成立. 引理证完.

用$r(K_0)$和$r(K_\infty)$分别表示线性积分算子K_0和K_∞的谱半径. 当$r(K_0)\neq r(K_\infty)$时, 令

$$\lambda_*=\min\{r^{-1}(K_0),\ r^{-1}(K_\infty)\}, \tag{4.12}$$

$$\lambda^*=\max\{r^{-1}(K_0), r^{-1}(K_\infty)\}. \tag{4.13}$$

其中若$r(K_0)=0$ ($r(K_\infty)=0$), 则$r^{-1}(K_0)$ ($r^{-1}(K_\infty)$) 理解为$+\infty$.

定理4.2 设假设1°～3°成立, $r(K_0)\neq r(K_\infty)$. 则对任给$\lambda\in(\lambda_*,\lambda^*)$, 方程(4.1)至少有一个正解.

证 先假定$r(K_\infty)>r(K_0)$. 取定$\lambda\in(\lambda_*,\lambda^*)$, 则

$$r^{-1}(K_\infty)<\lambda<r^{-1}(K_0). \tag{4.14}$$

下证K_∞是映P入P的全连续线性算子, 并且.

$$a_1=\inf_{\varphi\in P,\ \|\varphi\|=1}\|\varphi-\lambda K_\infty\varphi\|>0\ . \tag{4.15}$$

事实上, 若K_∞不是全连续线性算子, 则存在$h_n\in P$, $\|h_n\|\leqslant 1$ ($n=1,2,\cdots$), 及$\varepsilon_0>0$, 使当$m\neq n$时

$$\|K_\infty h_n-K_\infty h_m\|\geqslant\varepsilon_0. \tag{4.16}$$

由(4.16)式易知$\sigma=\inf\|h_n\|>0$. 由(4.7)式知, 存在$\rho>0$, 使当$\varphi\in P$, $\|\varphi\|\geqslant\rho\sigma$时

$$\|A\varphi-K_\infty\varphi\|<\frac{\varepsilon_0}{3}\|\varphi\|.$$

于是, 当$m\neq n$时, 有

$$\begin{aligned}\|A(\rho h_m)-A(\rho h_n)\|&=\|[A(\rho h_m)-K_\infty(\rho h_m)]\\&\quad-[A(\rho h_n)-K_\infty(\rho h_n)]-\rho[K_\infty h_n-K_\infty h_m]\|\\&\geqslant\rho\|K_\infty h_m-K_\infty h_n\|-\|A(\rho h_m)-K_\infty(\rho h_m)\|\\&\quad-\|A(\rho h_n)-K_\infty(\rho h_n)\|\geqslant\frac{\rho\varepsilon_0}{3}.\end{aligned}$$

此与A的全连续性矛盾．故$K_\infty: P\to P$是全连续算子．若(4.15)式不成立，则存在$\varphi_n\in P$，$\|\varphi_n\|=1$，使$\varphi_n-\lambda K_\infty\varphi_n\to\theta$．由$K_\infty$全连续知$\{K_\infty\varphi_n\}$有一子列，不失一般性，可以假定就是$\{K_\infty\varphi_n\}$本身收敛于某$\varphi^*$．显然$\varphi_n\to\lambda\varphi^*$．由于$\|\varphi_n\|=1$，$\lambda\neq 0$，故$\varphi^*\neq\theta$．这表明$K_\infty$有一正特征函数对应于$\lambda\neq r^{-1}(K_\infty)$．此与推论2.10矛盾．故(4.15)式成立．由(4.15)式知对任给$\varphi\in P$，

$$\|\varphi-\lambda K_\infty\varphi\|\geqslant\alpha\|\varphi\|. \tag{4.17}$$

由(4.7)式知存在$R>0$，使当$\varphi\in P$，$\|\varphi\|\geqslant R$时

$$\|\lambda A\varphi-\lambda K_\infty\varphi\|\leqslant\frac{\alpha}{2}\|\varphi\|. \tag{4.18}$$

因此，当$t\in[0,1]$，$\varphi\in P\cap\{\varphi\in C(G)\,|\,\|\varphi\|=R\}$时

$$\begin{aligned}&\|\varphi-[t\lambda A\varphi+(1-t)\lambda K_\infty\varphi]\|\\ &\geqslant\|\varphi-\lambda K_\infty\varphi\|-t\|\lambda A\varphi-\lambda K_\infty\varphi\|\\ &\geqslant\alpha\|\varphi\|-\frac{\alpha}{2}\|\varphi\|=\frac{\alpha R}{2}>0.\end{aligned}$$

根据相对拓扑度的同伦不变性，有

$$\deg(I-\lambda A,P_R,0;P)=\deg(I-\lambda K_\infty,P_R,0;P), \tag{4.19}$$

其中$P_R=P\cap\{\varphi\in C(G)\,|\,\|\varphi\|<R\}$．由于$\lambda K_\infty$在$\partial P_R$上没有不动点，并且$\lambda K_\infty\psi^*=\lambda r(K_\infty)\psi^*\geqslant\psi^*$（这里，$\psi^*$是$K_\infty$相应于$r^{-1}(K_\infty)$的正特征函数）．故根据推论1.21，

$$\deg(I-\lambda K_\infty,P_R,0;P)=0. \tag{4.20}$$

由(4.19)、(4.20)两式知

$$\deg(I-\lambda A,P_R,0;P)=0. \tag{4.21}$$

仿K_∞全连续的证明可知$K_0: P\to P$也是全连续算子．仿(4.19)式的证明可以证得

$$\deg(I-\lambda A,P_r,0;P)=\deg(I-\lambda K_0,P_r,0;P), \tag{4.22}$$

其中$P_r=P\cap\{\varphi\in C(G)\,|\,\|\varphi\|<r\}$，$r<R$．由于$r(\lambda K_0)=\lambda r(K_0)$

<1，故由定理1.18知

$$\deg(I-\lambda K_0, P_r, 0; P)=1. \tag{4.23}$$

因此，由(4.22)、(4.23)两式知

$$\deg(I-\lambda A, P_r, 0; P)=1. \tag{4.24}$$

由(4.21)(4.24)两式即知，方程(4.1)至少有一正解.

再设$r(K_\infty)<r(K_0)$.取定$\lambda\in(\lambda_*, \lambda^*)$. 则用与上面相同的证明方法可以证得

$$\deg(I-\lambda A, P_R, 0; P)=1,$$

$$\deg(I-\lambda A, P_r, 0; P)=0.$$

从而方程(4.1)至少有一正解.证完.

定理4.3 设假设1°～3°成立，$r(K_0)\neq r(K_\infty)$. 则下列结论成立:

(i)若对任给$x\in G, y\in G, u\geqslant 0$，有

$$k_0(x,y)u\leqslant k(x,y,u)\leqslant k_\infty(x,y)u \tag{4.25}$$

则对任给$\lambda\in(r^{-1}(K_\infty), r^{-1}(K_0))$，方程(4.1)至少有一个正解；对任给$0<\lambda<r^{-1}(K_\infty)$和$\lambda>r^{-1}(K_0)$，方程(4.1)没有正解；

(ii)若对任给$x\in G, y\in G, u\geqslant 0$，有

$$k_\infty(x,y)u\leqslant k(x,y,u)\leqslant k_0(x,y)u. \tag{4.26}$$

则对任给$\lambda\in(r^{-1}(K_0), r^{-1}(K_\infty))$，方程(4.1)至少有一个正解；对任给$0<\lambda<r^{-1}(K_0)$和$\lambda>r^{-1}(K_\infty)$，方程(4.1)没有正解.

证 下面仅证结论(i)，结论(ii)的证明可以仿之.

由定理4.2的证明知，$K_\infty: P\to P$是全连续线性算子. 由于K_∞是u_0有界的，故根据推论2.10，存在K_∞的唯一就范正特征函数φ_∞.由引理2.7知K_∞是φ_∞有界的.设$\lambda_1>0$，$\varphi_1\in P\backslash\{\theta\}$，使

$\lambda_1 A\varphi_1=\varphi_1$.由于$K_\infty$是$\varphi_\infty$有界的，故存在自然数$p$及$\alpha_1>0$，$\beta_1>0$,使

$$\alpha_1\varphi_\infty\leqslant K_\infty^p\varphi_1\leqslant\beta_1\varphi_\infty.$$

由(4.25)式可知

$$\varphi_1=\lambda_1 A\varphi_1\leqslant\lambda_1 K_\infty\varphi_1=\lambda_1^2 K_\infty A\varphi_1\leqslant\lambda_1^2 K_\infty^2\varphi_1\leqslant\cdots$$
$$\leqslant\lambda_1^p K_\infty^p\varphi_1\leqslant\beta_1\lambda_1^p\varphi_\infty.$$

令$t_*=\inf\{t|\varphi_1\leqslant t\varphi_\infty\}$，则显然有$\varphi_1\leqslant t_*\varphi_\infty$.于是

$$\varphi_1=\lambda_1 A\varphi_1\leqslant\lambda_1 K_\infty\varphi_1\leqslant\lambda_1 t_* K_\infty\varphi_\infty=\lambda_1 t_* r(K_\infty)\varphi_\infty.$$

根据t^*的定义，必有$\lambda_1 r(K_\infty)\geqslant 1$，即$\lambda_1\geqslant r^{-1}(K_\infty)$. 这表明当$0<\lambda<r^{-1}(K_\infty)$时,方程(4.1)没有正解.

类似地，可以知道K_0是u_0有界的全连续线性算子，并存在$\varphi_0\in P\setminus\{\theta\}$，使$K_0\varphi_0=r(K_0)\varphi_0$.显然$K_0$也是$\varphi_0$有界的.设$\lambda_2>0$，$\varphi_2\in P\setminus\{\theta\}$,使$\lambda_2 A\varphi_2=\varphi_2$.于是,存在自然数$q$及$\alpha_2>0$，$\beta_2>0$,使

$$\alpha_2\varphi_0\leqslant K_0^q\varphi_2\leqslant\beta_2\varphi_0.$$

由(4.25)式可知

$$\varphi_2=\lambda_2 A\varphi_2\geqslant\lambda_2 K_0\varphi_2=\lambda_2^2 K_0 A\varphi_2$$
$$\geqslant\lambda_0^2 K_0^2\varphi_0\geqslant\cdots$$
$$\geqslant\lambda_2^q K_0^q\varphi_2\geqslant\lambda_2^q\alpha_2\varphi_0.$$

令$t^*=\sup\{t|\varphi_2\geqslant t\varphi_0\}$,则显然有$\varphi_2\geqslant t^*\varphi_0$.于是

$$\varphi_2=\lambda_2 A\varphi_2\geqslant\lambda_2 K_0\varphi_2\geqslant\lambda_2 t^* K_0\varphi_0$$
$$=\lambda_2 t^* r(K_0)\varphi_0.$$

根据t^*的定义，必有$\lambda_2 r(K_0)\leqslant 1$，即$\lambda_2\leqslant r^{-1}(K_0)$. 这表明当$\lambda>r^{-1}(K_0)$时，方程(4.1)没有正解.证完.

附注 关于渐近线性积分方程的其它讨论，见H.Amann〔3〕,H.R.Thieme〔1〕.

§5 超线性Hammerstein型积分方程的非平凡解

先作一点准备。

在$C(G)$空间中考察线性积分算子

$$B\varphi(x)=\int_G B(x,y)\varphi(y)dy, \tag{5.1}$$

设$B(x,y)$在$G\times G$上非负连续，则B映$P=\{\varphi\in C(G)\,|\,\varphi(x)\geqslant 0\}$入$P$全连续。设$B$的谱半径$r(B)\neq 0$，则易知，线性积分算子

$$B^*\psi(x)=\int_G B^*(x,y)\psi(y)dy \tag{5.2}$$

的谱半径$r(B^*)=r(B)$，其中$B^*(x,y)=B(y,x)$。因此，根据定理2.5，存在$\psi^*\in P\backslash\{\theta\}$，使

$$\psi^*=r^{-1}(B)B^*\psi^*. \tag{5.3}$$

定义5.1 如果存在$\psi^*\in P\backslash\{\theta\}$及$\beta>0$，使(5.3)成立，并且

$$\psi^*(y)\geqslant\beta B(\tau,y),\quad \forall\tau,y\in G, \tag{5.4}$$

则称线性积分算子B满足H条件。

取$\psi^*\in P\backslash\{\theta\}$满足(5.3)式，给定$\delta>0$，令

$$P(\psi^*,\delta)=\left\{\varphi\in P\,\middle|\,\int_G\psi^*(x)\varphi(x)dx\geqslant\delta\|\varphi\|\right\}. \tag{5.5}$$

引理5.2 线性积分算子B满足H条件的充分必要条件是：存在$\psi^*\in P\backslash\{\theta\}$，$\delta>0$，使(5.3)式成立，并且$B$映$P$入$P(\psi^*,\delta)$。

证 首先，对任给$\varphi\in P$，有

$$\int_G\psi^*(x)B\varphi(x)dx=\int_G\int_G\psi^*(x)B(x,y)\varphi(y)dydx$$

$$=\int_G\left[\int_G\psi^*(x)B^*(y,x)dx\right]\varphi(y)dy$$

$$=r(B)\int_G\psi^*(y)\varphi(y)dy. \tag{5.6}$$

设(5.4)式成立，则由(5.6)式知，对任给$\varphi\in P$,

$$\int_G\psi^*(x)B\varphi(x)dx\geqslant\beta r(B)\int_G B(\tau,y)\varphi(y)dy.$$

由于$\tau\in G$是任意的，故若令$\delta=\beta r(B)$，就有

$$\int_G\psi^*(x)B\varphi(x)dx\geqslant\delta\|B\varphi\|,$$

即B映P入$P(\psi^*,\delta)$.

设B映P入$P(\psi^*,\delta)$.则对任给$\varphi(x)\in P$，有

$$\int_G\psi^*(x)B\varphi(x)dx\geqslant\delta\int_G B_\bullet(\tau,y)\varphi(y)dy(\forall\tau\in G) \tag{5.7}$$

由(5.6)、(5.7)两式，有

$$\int_G\psi^*(y)\varphi(y)dy\geqslant\delta r^{-1}(B)\int_G B(\tau,y)\varphi(y)dy.$$

由于上式对任给$\varphi\in P$都成立，故必有

$$\psi^*(y)\geqslant\beta B(\tau,y),\quad \forall\tau,y\in G,$$

其中$\beta=\delta r^{-1}(B)$.引理证完.

下面利用H条件讨论超线性Hammerstein型积分方程

$$\varphi(x)=\int_G k(x,y)f(y,\varphi(y))dy=A\varphi(x) \tag{5.8}$$

非零解的存在性.

设G是R^N中的有界闭集，$f(x,u)$ 在$G\times R^1$上连续（不要求非负），$f(x,0)\equiv 0$；$K(x,y)$在$G\times G$上非负连续.设存在$b\geqslant 0$，使对任给$x\in G,-\infty<u<+\infty$，有

$$f(x,u)\geqslant -b; \tag{5.9}$$

又设存在连续函数$a(x)>0$，$b(x)\geqslant 0$，$c(x)\geqslant 0$，使

$$f(x,u)\geqslant a(x)u-b(x),\quad \forall x\in G, u\geqslant 0, \tag{5.10}$$

$$|f(x,u)|\leqslant c(x)|u|,\quad \forall x\in G, |u|\leqslant r, \tag{5.11}$$

其中$r>0$为一充分小的正数.令

$$B_\infty\varphi=\int_G k(x,y)a(y)\varphi(y)dy, \tag{5.12}$$

$$B_0\varphi=\int_G k(x,y)c(y)\varphi(y)dy. \tag{5.13}$$

定理5.3 设(5.9)、(5.10)、(5.11)三式成立.又设$r(B_\infty)>1\geqslant r(B_0)$,$B_\infty$满足$H$条件.则方程(5.8)至少有一个不恒等于零的连续解.

证 由$a(x)>0$知，存在$b_1\geqslant 0$，使

$$\frac{f(x,u)}{a(x)}\geqslant -b_1,\quad \forall x\in G,\ -\infty<u<+\infty. \tag{5.14}$$

又显然存在$b'(x)\geqslant 0$，使对一切$x\in G, -\infty<u<+\infty$，有

$$f(x,u)\geqslant a(x)u-b'(x). \tag{5.15}$$

由于B_∞满足H条件，故由引理5.2知，存在$\psi^*\in P\backslash\{\theta\}$，$\delta>0$，使$\psi^*=r^{-1}(B_\infty)B_\infty^*\psi^*$,并且$B_\infty$映$P$入$P(\psi^*,\delta)$.取$\varepsilon=r(B_\infty)-1>0$，取

$$R>\left\|\int_G k(x,y)a(y)b_1dy\right\| +\frac{1}{\varepsilon\delta}\left[\varepsilon\int_G\int_G\psi^*(x)k(x,y)a(y)b_1dxdy +\int_G\int_G\psi^*(x)k(x,y)b'(y)dxdy\right]. \tag{5.16}$$

并令$\varphi^*(x)$是B_∞相应于特征值$r^{-1}(B_\infty)$的就范正特征函数.设对某$\varphi_0\in C(G)$，$\|\varphi_0\|\geqslant R$，$\lambda_0\geqslant 0$,使

$$\varphi_0-A\varphi_0=\lambda_0\varphi^*. \tag{5.17}$$

取$d(x)=\int_G k(x,y)a(y)b_1dy$，则由(5.17)式知

$$\varphi_0(x)+d(x)=\int_G k(x,y)a(y)\left[\frac{f(y,\varphi_0(y))}{a(y)}\right.$$

$$\left.+b_1\right]dy+\lambda_0\varphi^*. \qquad (5.18)$$

由于$B_\infty:P\to P(\psi,\delta)$，故(5.18)式右端的两项均属于$P(\psi^*,\delta)$，所以$\varphi_0(x)+d(x)\in P(\psi^*,\delta)$.因此，由(5.15)式可知

$$\int_G\psi^*(x)A\varphi_0(x)dx-\int_G\psi^*(x)\varphi_0(x)dx$$

$$\geqslant\int_G\psi^*(x)dx\int_G k(x,y)a(y)\varphi_0(y)dy$$

$$-\int_G\int_G\psi^*(x)k(x,y)b'(y)dxdy-\int_G\psi^*(x)\varphi_0(x)dx$$

$$=r(B_\infty)\int_G\psi^*(x)\varphi_0(x)dx$$

$$-\int_G\int_G\psi^*(x)k(x,y)b'(y)dxdy-\int_G\psi^*(x)\varphi_0(x)dx$$

$$=\varepsilon\int_G\psi^*(x)\varphi_0(x)-\int_G\int_G\psi^*(x)k(x,y)b'(y)dxdy$$

$$=\varepsilon\int_G\psi^*(x)(\varphi_0(x)+d(x))dx-\varepsilon\int_G\psi^*(x)d(x)dx$$

$$-\int_G\int_G\psi^*(x)k(x,y)b'(y)dxdy$$

$$\geqslant\varepsilon\delta\|\varphi_0\|-\varepsilon\delta\|d(x)\|-\varepsilon\int_G\psi^*(x)d(x)dx$$

$$-\int_G\int_G\psi^*(x)k(x,y)b'(y)dxdy$$

$$>0. \qquad (5.19)$$

另一方面，由(5.17)式可知

$$\int_G\psi^*(x)\varphi_0(x)dx-\int_G\psi^*(x)A\varphi_0(x)dx$$

$$=\lambda_0\int_G \psi^*(x)\varphi^*(x)dx\geqslant 0.$$

此与(5.19)式矛盾.故对任给$\varphi\in C(G)$，$\|\varphi\|\geqslant R$，$\lambda\geqslant 0$，必有$\varphi-A\varphi\neq\lambda\varphi^*$.所以由推论1.11知（取$Bx\equiv\varphi^*$）

$$\operatorname{ind}(I-A,\infty)=0. \tag{5.20}$$

令$B_r=\{\varphi\in C(G)\,|\,\|\varphi\|<r\}$,不失一般性，可设方程（5.8）在$\partial B_r$上无解（否则定理的结论已经成立）.下证

$$\deg(I-A,B_r,0)=1. \tag{5.21}$$

为此，只需证明对任给$\varphi\in\partial B_r,\lambda\geqslant 1$，有$A\varphi\neq\lambda\varphi$.用反证法，设存在$\varphi_1\in\partial B_r,\lambda_1\geqslant 1$，使$A\varphi_1=\lambda_1\varphi_1$.由于$A$在$\partial B_r$上没有不动点.故$\lambda_1>1$.由(5.11)式可知

$$|\lambda_1\varphi_1(x)|=|A\varphi_1|=\left|\int_G k(x,y)f(y,\varphi_1(y))dy\right|$$

$$\leqslant\int_G k(x,y)|f(y,\varphi_1(y))|dy$$

$$\leqslant\int_G k(x,y)c(y)|\varphi_1(y)|dy \tag{5.22}$$

令$\psi_1=|\varphi_1(x)|$，则由(5.22)式知$B_0\psi_1\geqslant\lambda_1\psi_1$.根据定理2.1及注2.2可知存在$\tilde\varphi\in P\backslash\{\theta\}$，$\tilde\lambda\geqslant\lambda_1$，使$B_0\tilde\varphi=\tilde\lambda\tilde\varphi$. 由于$\tilde\lambda\geqslant\lambda_1>1$，故$r(B_0)>1$，与定理条件矛盾.因此(5.21)式成立.由(5.20)、(5.21)两式可知定理的结论正确.证完.

推论5.4 设(5.10)、(5.11)两式成立.又设存在$b^*>0$，使当$u\geqslant -b^*$，$x\in G$时有

$$f(x,u)\geqslant-\frac{b^*}{M}, \tag{5.23}$$

其中$M=\max\limits_{x\in G}\int_G k(x,y)dy$.如果$r(B_\infty)>1\geqslant r(B_0)$，并且$B_\infty$

满足H条件，则方程(5.8)至少有一个非零连续解.

证 定义

$$f_1(x,u)=\begin{cases}f(x,u), & \text{当}u\geqslant -b^*,x\in G\text{时},\\ f(x,-b^*), & \text{当}u<-b^*,x\in G\text{时}.\end{cases} \tag{5.24}$$

$$A_1\varphi(x)=\int_G k(x,y)f_1(y,\varphi(y))dy.$$

则对A_1来说，定理5.3的全部条件满足.根据定理5.3，A_1至少有一非零不动点$\varphi^*(x)$.于是，

$$\varphi^*(x)=\int_G k(x,y)f_1(y,\varphi^*(y))dy$$

$$\geqslant -\frac{b^*}{M}\int_G k(x,y)dy\geqslant -b^*. \tag{5.25}$$

由(5.24)式即知，$f_1(x,\varphi^*(x))=f(x,\varphi^*(x))$.于是，

$$\varphi^*(x)=\int_G k(x,y)f_1(y,\varphi^*(y))dy$$

$$=\int_G k(x,y)f(y,\varphi^*(y))dy,$$

即$\varphi^*(x)$是方程(5.8)的非零解.证完.

注5.5 如果(5.10)式成立，并且

$$\lim_{u\to-\infty}\frac{f(x,u)}{u}>-\frac{1}{M} \tag{5.26}$$

关于$x\in G$一致成立，则容易证明，必存在$b^*>0$，使当$x\in G$，$u\geqslant -b^*$时，(5.23)式成立.

推论5.6 设当$u\geqslant 0$时，$f(x,u)\geqslant 0$. 设(5.10)式成立，并存在非负连续函数$c(x)$及常数$r>0$，使

$$f(x,u)\leqslant c(x)u,\quad \forall x\in G,\ 0\leqslant u\leqslant r. \tag{5.27}$$

如果$r(B_\infty)>1\geqslant r(B_0)$，$B_\infty$满足$H$条件，则方程(5.8)至少有一个不恒为零的非负连续解.

证 完全仿推论5.4的证明（在推论5.4的证明中，取$b^*=0$即可），解是正解的证明仿(5.25)式的证明即得.

应用定理5.3的关键在于H条件的检验.下面给出线性积分算子满足H条件的某些充分条件.

设$k(x,y)$是$G\times G$上的非负连续函数，$a(y)$在G上非负连续.令$B(x,y)=k(x,y)a(y)$，$B^*(x,y)=B(y,x)$，定义

$$B\varphi=\int_G B(x,y)\varphi(y)dy, \tag{5.28}$$

$$B^*\psi=\int_G B^*(x,y)\psi(y)dy. \tag{5.29}$$

下设$r(B)\neq 0$.

引理5.7 设存在$v(x)\in P\backslash\{\theta\}$，使

$$k(x,y)\geqslant v(x)k(\tau,y),\quad \forall x,y,\tau\in G; \tag{5.30}$$

又设存在$\psi^*(x)\geqslant 0$，$\psi^*(x)\neq 0$，使$\psi^*=r^{-1}(B)B^*\psi^*$，$v(x)\psi^*(x)\neq 0$.则由(5.28)式定义的线性积分算子$B$满足$H$条件.

证 对引理条件中的$\psi^*(x)$，有

$$\begin{aligned}\psi^*(y)&=r^{-1}(B)B^*\psi^*=r^{-1}(B)\int_G B^*(y,x)\psi^*(x)dx\\&=r^{-1}(B)\int_G k(x,y)a(y)\psi^*(x)dx\\&\geqslant r^{-1}(B)\int_G v(x)k(\tau,y)a(y)\psi^*(x)dx\\&=\left[r^{-1}(B)\int_G v(x)\psi^*(x)dx\right]k(\tau,y),\quad \forall\tau,y\in G.\end{aligned}$$

故B满足H条件.证完.

引理5.8 设存在$v(x)\in P\backslash\{\theta\}$，$u(x)\in P\backslash\{\theta\}$以及$G\times G$上的非负连续函数$T(x,y)$，使

$$v(x)T(\tau,y)\leqslant k(x,y)\leqslant u(x)T(\tau,y),\ \forall x,y,\tau\in G;$$

(5.31)

又设存在$\psi^*(x)\geqslant 0$，$\psi^*(x)\not\equiv 0$，使$\psi^*=r^{-1}(B)B^*\psi^*$，$v(x)\psi^*(x)\not\equiv 0$．则由(5.28)式定义的线性积分算子$B$满足$H$条件．

此引理的证明与引理5.7相类似，故从略。

在第十章中，我们将要证明，对应用中重要的一类常微分方程两点边值问题，其相应的格林函数$k(x,y)$所确定的线性积分算子，就满足H条件．

下面着重讨论一类多项式型的超线性 Hammerstein 型积分方程正解的性质。

假设$f(x,u)$可以表为

$$f(x,u)=\sum_{i=1}^{n}a_i(x)u^{\alpha_i} \tag{5.32}$$

的形式.在这种情况下，我们考察Hammerstein 型积分方程(5.8)．

定理5.9 设（1）$k(x,y)$在$G\times G$上非负连续，并且存在闭集$G_0\subset G$，$\mathrm{mes}G_0>0$，以及常数$0<\varepsilon_0<1$，使得

$$k(x,y)>0 \qquad (x\in G_0,y\in G_0), \tag{5.33}$$

$$k(x,y)\geqslant\varepsilon_0 k(\tau,y) \quad (x\in G_0,y\in G,\tau\in G); \tag{5.34}$$

（2）$f(x,u)$可以表为(5.32)式的形式，其中$a_i(x)\geqslant 0$，$a_i(x)\in L$，$\alpha_i>1$（$1\leqslant i\leqslant n$）；

（3）存在$1\leqslant i_0\leqslant n$，使$\inf\limits_{x\in G}a_{i_0}(x)>0$．

则方程(5.8)必有在G上不恒为零的非负连续解。

证 令

$$P_1=\{\varphi\in C(G)\,|\,\varphi(x)\geqslant 0,\ \min_{x\in G_0}\varphi(x)\geqslant\varepsilon_0\|\varphi\|\}. \tag{5.35}$$

直接验证知P_1是$C(G)$中的一个锥．当$\varphi\in C(G)$，$\varphi(x)\geqslant 0$时，由条件（1）知对$x\in G_0$，有

$$A\varphi(x)=\int_G k(x,y)f(y,\varphi(y))dy$$

$$\geqslant\int_G \varepsilon_0 k(\tau,y)f(y,\varphi(y))dy=\varepsilon_0 A\varphi(\tau),\quad \forall\tau\in G.$$

由此可知 $\min\limits_{x\in G_0} A\varphi(x)\geqslant\varepsilon_0\|A\varphi\|$. 即$A\varphi\in P_1$. 从而

$$AP_1\subset P_1.$$

由引理3.3知由$f\varphi=f(x,\varphi(x))$确定的f映P_1入L连续、有界，从而A映P_1入P_1全连续. 取

$$R>\max\{1,(\tau\tau_0\text{mes}G_0)^{\beta}\varepsilon_0^{\beta_1}\}\tag{5.36}$$

其中$\tau=\min\limits_{(x,y)\in G_0\times G_0}k(x,y)>0$，$\tau_0=\inf\limits_{x\in G}a_{i_0}(x)>0$，$\beta=-\dfrac{1}{\alpha_{i_0}-1}$，$\beta_1=-\dfrac{\alpha_{i_0}}{\alpha_{i_0}-1}$. 取 $S_R=\{\varphi\in C(G)\mid\|\varphi\|=R\}$. 下证

$$\varphi-A\varphi\,\overline{\in}\,P_1,\quad \forall\varphi\in P_1\cap S_R.\tag{5.37}$$

事实上，若有$\varphi_1\in P_1\cap S_R$，使$\varphi_1-A\varphi_1\in P_1$，则当$x\in G_0$时，

$$\varphi_1(x)\geqslant A\varphi_1(x)=\int_G k(x,y)f(y,\varphi_1(y))dy$$

$$\geqslant\int_{G_0}k(x,y)a_{i_0}(y)[\varphi_1(y)]^{\alpha_{i_0}}dy\geqslant\tau\tau_0\int_{G_0}[\varphi_1(y)]^{\alpha_{i_0}}dy$$

$$\geqslant\tau\tau_0\int_{G_0}(\varepsilon_0\|\varphi_1\|)^{\alpha_{i_0}}dy=\tau\tau_0(\text{mes}G_0)(\varepsilon_0\|\varphi_1\|)^{\alpha_{i_0}},$$

从而

$$R=\|\varphi_1\|\geqslant\tau\tau_0(\text{mes}G_0)(\varepsilon_0\|\varphi_1\|)^{\alpha_{i_0}}$$

$$=\tau\tau_0(\text{mes}G_0)(\varepsilon_0\|\varphi_1\|)^{\alpha_{i_0}},$$

此与R的取法矛盾. 故(5.37)式成立.

再取$0<r<1$，使

$$M\sum_{i=1}^{n}\int_G |a_i(x)|dx \cdot r^{\alpha_i - 1} < 1,$$

其中$M = \max\limits_{(x,y)\in G\times G} k(x,y)$.令$S_r = \{\varphi \in C(G) \mid \|\varphi\| = r\}$,下证

$$A\varphi - \varphi \bar{\in} P_1, \quad \forall \varphi \in P_1 \cap S_r. \tag{5.38}$$

事实上，若存在$\varphi_2 \in P_1 \cap S_r$,使$A\varphi_2 - \varphi_2 \in P_1$，则

$$r = \|\varphi_2\| \leqslant \|A\varphi_2\| \leqslant M\sum_{i=1}^{n}\int_G |a_i(x)|dx \cdot \|\varphi_2\|^{\alpha_i}$$

$$\leqslant M\sum_{i=1}^{n}\int_G |a_i(x)|dx \cdot r^{\alpha_i},$$

此与r的取法矛盾.故(5.38)式成立.

由(5.37)、(5.38)两式，根据锥拉压不动点定理，A在P_1中必有不动点φ^*，满足$r \leqslant \|\varphi^*\| \leqslant R$.证完.

定理5.10 设(1)$k(x,y)$在$G\times G$上非负连续，并且存在闭集$G_0 \subset G$，$\mathrm{mes}G_0 > 0$，以及常数$0 < \varepsilon < 1$，使得(5.33)、(5.34)两式成立;

(2)$f(x,u)$可以表为(5.32)式的形式，其中$a_i(x) \geqslant 0$，$a_i(x) \in L, \alpha_i > 0\ (1 \leqslant i \leqslant n)$,并且存在$1 \leqslant i_0 \leqslant n$，$1 \leqslant i_1 \leqslant n$，使$\alpha_{i_0} > 1$，$\alpha_{i_1} < 1$，$\inf\limits_{x\in G} a_{i_0}(x) > 0$，$\inf\limits_{x\in G} a_{i_1}(x) > 0$;

(3)$\sum\limits_{i=1}^{n}\|a_i\|_L < M^{-1}$,其中$M = \max\limits_{(x,y)\in G\times G} k(x,y)$;

则方程(5.8)至少有两个在G上不恒为零的非负连续解.

证 取P_1如(5.35)式所定义，则由定理5.9的证明可知A: $P_1 \to P_1$全连续，并且对满足(5.36)式的R，(5.37)式仍成立.取r满足

$$0 < r < \min\{1, (\tau\tau, \mathrm{mes}G_0)^{r}\varepsilon_0^{r\tau_1}\},$$

其中$\tau = \min\limits_{(x,y)\in G_0\times G_0} k(x,y) > 0$，$\tau_1 = \inf\limits_{x\in G} a_{i_1}(x)$，$r = \dfrac{1}{1-\alpha_{i_1}}$，

$r_1 = \dfrac{\alpha_{i_1}}{1-\alpha_{i_2}}$.取$S_r = \{\varphi \in C(G) \mid \|\varphi\| = r\}$,下证

$$\varphi - A\varphi \overline{\in} P_1, \quad \forall \varphi \in P_1 \cap S_r. \tag{5.39}$$

事实上，若存在$\varphi_0 \in P_1 \cap S_r$，使$\varphi_0 - A\varphi_0 \in P_1$，则当$x \in G_0$时有

$$\varphi_0(x) \geqslant A\varphi_0(x) \geqslant \int_{G_0} k(x,y) a_{i_1}(y) [\varphi_0(y)]^{\alpha_{i_1}} dy$$

$$\geqslant \tau\tau_1 (\text{mes} G_0) \varepsilon_0^{\alpha_{i_1}} \|\varphi_0\|^{\alpha_{i_1}},$$

从而

$$r = \|\varphi_0\| \geqslant \tau\tau_1 (\text{mes} G_0) \varepsilon_0^{\alpha_{i_1}} r^{\alpha_{i_1}},$$

此显然与r的取法矛盾.因此(5.39)式成立.

令$S_1 = \{\varphi \in C(G) \mid \|\varphi\| = 1\}$,下证

$$A\varphi - \varphi \overline{\in} P_1, \quad \forall \varphi \in P_1 \cap S_1. \tag{5.40}$$

事实上，若存在$\varphi^* \in P_1 \cap S_1$，使$A\varphi^* - \varphi^* \in P_1$，则有

$$1 = \|\varphi^*\|_C \leqslant \|A\varphi^*\|_C \leqslant M \sum_{i=1}^{n} \|a_i\|_L \cdot \|\varphi^*\|_C^{\alpha_i} = M \sum_{i=1}^{n} \|a_i\|_L,$$

此与定理条件(3)矛盾.所以(5.40)式成立.

由(5.37)、(5.39)、(5.40)三式即知，A在P_1中必有两个不动点φ_1^*和φ_2^*，满足$r < \|\varphi_1^*\| < 1 < \|\varphi_2^*\| < R$.证完.

注5.11 在郭大钧〔12〕、〔1〕中证明了：如果把定理5.9和定理5.10中的条件(1)换成

(1*)$k(x,y)$在$G \times G$上非负连续，并满足

$$\int_G k(x,y) dx > 0 \quad (\forall y \in G), \tag{5.41}$$

则定理5.9和定理5.10的结论仍成立.

定理5.12 设(1)$k(x,y)$在$G \times G$上非负，并且以$k(x,y)$为核的线性积分算子K映$C(G)$入$C(G)$;

（2）$k(x,y)\not\equiv 0$，并且对每一个闭球$T\subset G^0$（G^0表G的内点集，都存在$\varepsilon^*=\varepsilon^*(T)>0$，使得

$$\int_T k(x,y)dy \geqslant \varepsilon^* \int_G k(x,y)dy \quad (\forall x\in G); \tag{5.42}$$

（3）$f(x,u)$可以表为（5.32）式的形式，其中，诸$\alpha_i>1$（$1\leqslant i\leqslant n$），诸$a_i(x)$（$1\leqslant i\leqslant n$）在G上非负连续，并存在$1\leqslant i_0\leqslant n$，使对任给$x\in G$，有$a_{i_0}(x)>0$；

则方程(5.8)在G上不可能有两个可比较的不恒为零的非负连续解.

证 假定$\varphi^*(x)$和$\varphi^{**}(x)$是方程(5.8)的两个不恒为零的非负连续解，而且可以比较，即或者恒有$\varphi^*(x)\geqslant\varphi^{**}(x)$，或者恒有$\varphi^{**}(x)\geqslant\varphi^*(x)$.不失一般性，可假定$\varphi^{**}(x)\geqslant\varphi^*(x)$，$\varphi^{**}(x)\not\equiv\varphi^*(x)$，于是，存在$\delta>0$及闭球$T\subset G^0$，使

$$[\varphi^{**}(x)]^{\alpha_{i_0}}-[\varphi^*(x)]^{\alpha_{i_0}}\geqslant\delta, \quad \forall x\in T.$$

仿(3.27)式的推导，可得

$$\begin{aligned}
&\varphi^{**}(x)-\varphi^*(x)\\
&=\int_G k(x,y)\left\{\sum_{i=1}^n a_i(y)[(\varphi^{**}(y))^{\alpha_i}-(\varphi^*(y))^{\alpha_i}]\right\}dy\\
&\geqslant\tau_0\int_T k(x,y)\{[\varphi^{**}(y)]^{\alpha_{i_0}}-[\varphi^*(y)]^{\alpha_{i_0}}\}dy\\
&\geqslant\varepsilon^*\tau_0\delta\int_G k(x,y)dy.
\end{aligned} \tag{5.43}$$

另外，显然(3.28)式也成立.因此，

$$\varphi^{**}(x)\geqslant(1+\varepsilon^*\tau_0\delta\beta^{-1})\varphi^*(x), \quad \forall x\in G.$$

令 $t_0=\sup\{t\,|\,\varphi^{**}(x)\geqslant t\varphi^*(x)\}$，则 $1<1+\varepsilon^*\tau_0\delta\beta^{-1}\leqslant t_0<+\infty$，$\varphi^{**}(x)\geqslant t_0\varphi^*(x)$.于是

$$\varphi^{**}(x)=\int_G k(x,y)\left\{\sum_{i=1}^n a_i(y)[\varphi^{**}(y)]^{\alpha_i}\right\}dy$$

$$\geqslant \int_G k(x,y)\left\{\sum_{i=1}^{n} a_i(y)[t_0\varphi^*(y)]^{\alpha_i}\right\}dy$$

$$\geqslant t_0^{\alpha} \int_G k(x,y)\left\{\sum_{i=1}^{n} a_i(y)[\varphi^*(y)]^{\alpha_i}\right\}dy = t_0^{\alpha}\varphi^*(x),$$

其中$\alpha=\min\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}>1$．由于$t_0>1$，故$t_0^{\alpha}>t_0$。此显然于$t_0$的定义矛盾．证完．

作为定理5.9和定理5.12的一个应用，研究方程

$$\varphi(x)=\int_G k(x,y)[\varphi(y)+a(\varphi(y))^p]dy=A\varphi \tag{5.44}$$

正解的存在唯一性．

设$a>0$，$p>1$，$k(x,y)$在$G\times G$上连续，并满足

$$0<m\leqslant k(x,y)\leqslant M<1. \tag{5.45}$$

为了简单，我们不失一般地假定$\mathrm{mes}G=1$．

定理5.13 设下式成立：

$$M\left[1+p(m^{-1}-1)\left(\frac{M}{m}\right)^{p-1}\right]$$

$$<1+m\left[1+p(M^{-1}-1)\left(\frac{m}{M}\right)^{p-1}\right]. \tag{5.46}$$

则方程(5.44)具有唯一的非零连续正解．

证 根据定理5.9可知，方程(5.44)至少有一个非零连续正解．设$\varphi(x)$是方程(5.44)的一个非零连续正解，则显然有

$$\varphi(x)=A\varphi(x)\leqslant M[\|\varphi\|+a\|\varphi\|^p] \quad (x\in G),$$

$$\varphi(x)\geqslant M^{-1}m\|\varphi\| \quad (x\in G).$$

从而

$$\varphi(x)\geqslant M^{-1}m\|\varphi\|\geqslant M^{-1}m[a^{-1}(M^{-1}-1)]^{\frac{1}{p-1}}, \quad x\in G. \tag{5.47}$$

另一方面，又有

$$\min\{\varphi(x)\,|\,x\in G\}\geqslant m[\min\{\varphi(x)\,|\,x\in G\}$$
$$+a(\min\{\varphi(x)\,|\,x\in G\})^{p}],$$

从而

$$\varphi(x)\leqslant m^{-1}M\min\{\varphi(x)\,|\,x\in G\}$$
$$\leqslant m^{-1}M[a^{-1}(m^{-1}-1)]^{\frac{1}{p-1}}. \qquad (5.48)$$

设方程(5.44)有两个不同的非零连续正解φ_1和φ_2，则根据定理5.12可知$\psi(x)=\varphi_1(x)-\varphi_2(x)\not\leqslant 0$.不失一般地还可以假定$\psi(x)$满足：存在$x_0\in G$及$x_1\in G$，使

$$\psi(x_0)=\|\psi\|,\quad \psi(x_1)<0 \qquad (5.49)$$

（不然，用$-\psi(x)$代替$\psi(x)$）.由(5.49)式知，对任给常数b，都有$\|\psi(x)-b\|\geqslant\frac{1}{2}\|\psi(x)\|$.特殊地，取$b=\frac{b_1+b_2}{2}\int_G\varphi(y)dy$，就有

$$\left\|\psi(x)-\frac{b_1+b_2}{2}\int_G\psi(y)dy\geqslant\right\|\frac{1}{2}\|\psi\|, \qquad (5.50)$$

其中

$$b_1=m\left[1+p(M^{-1}-1)\left(\frac{m}{M}\right)^{p-1}\right],$$

$$b_2=M\left[1+p(m^{-1}-1)\left(\frac{M}{m}\right)^{p-1}\right].$$

根据微分学中值公式，

$$\psi(x)=\varphi_1(x)-\varphi_2(x)=\int_G k(x,y)\{[\varphi_1(y)+a(\varphi_1(y)^{p})]$$
$$-[\varphi_2(y)+a(\varphi_2(y))^{p}]\}dy$$
$$=\int_G k(x,y)[1+ap(\theta(y)^{p-1}]\psi(y))dy, \qquad (5.51)$$

其中$\theta(y)$满足$\min\{\varphi_1(y),\varphi_2(y)\}\leqslant\theta(y)\leqslant\max\{\varphi_1(y),\ \varphi_2(y)\}$.

利用(5.47)、(5.48)两式可知，有

$$b_1 \leqslant k(x,y)[1+ap(\theta(y))^{p-1}] \leqslant b_2,$$

从而

$$\left|k(x,y)[1+ap(\theta(y))^{p-1}]-\frac{b_1+b_2}{2}\right| \leqslant \frac{b_2-b_1}{2}.$$

因此，可以得到

$$\left|\psi(x)-\frac{b_1+b_2}{2}\int_G \psi(y)dy\right|$$

$$=\left|\int_G\left\{k(x,y)[1+ap(\theta(y))^{p-1}]-\frac{b_1+b_2}{2}\right\}\psi(y)dy\right|$$

$$\leqslant \frac{b_2-b_1}{2}\|\psi\|. \tag{5.52}$$

由(5.50)、(5.52)两式，可得$b_2-b_1 \geqslant 1$.此与(5.46)式矛盾.这一矛盾表明方程(5.44)不可能有两个不同的非零连续正解.证完.

附注 关于超线性积分方程的研究，是一个困难的问题，到目前为止，结果还不是很多. 较早的关于超线性积分方程的两个基本结果，可见 М.А.Красносельский和П.П.Забрейко〔1〕.郭大钧〔8〕、〔11〕、〔12〕、〔15〕、〔21〕对超线性积分方程解的性质，进行了较深入的研究，获得了一批结果.孙经先〔1〕、〔4〕、〔11〕、〔12〕、〔20〕，黄春潮〔1〕，也讨论了这一问题.

定理5.3是孙经先〔4〕获得的，这一结果包含了M. A. Красносельский和Л.Л.Забрейко〔1〕中关于超线性积分方程的两个基本结果作为特殊情况.定理5.9、定理5.10和定理5.12是郭大钧〔21〕证明的. 在〔12〕中，郭大钧在不同的条件下，也获得了类似的结果.

§6 超线性Hammerstein型积分方程的特征值与特征函数

定义6.1 设E是Banach空间，W是E的收缩核。如果存在$u_0\in W$，使得只要$u\in W$，$\alpha\geqslant 1$，就有$\alpha u+(1-\alpha)u_0\in W$，则称$W$是具有逆星形性质的收缩核，$u_0$是$W$的逆星形中心。

W具有逆星形性质的几何意义在于，在从逆星形中心u_0发出的射线上，如果有一点$u\in W$，则在该射线上比u更远离u_0的一切点都属于W。

如果W是具有逆星形性质的收缩核，则它的逆星形中心集一般地不是独点集。W的逆星形中心全体构成的集合记为$S(W)$。

例6.2 设E是无穷维Banach空间，$W_R=\{x\in E\mid \|x\|\geqslant R\}$.则由引理1.8可知$W_R$是$E$的收缩核.容易验证，$W_R$是具有逆星形中心的收缩核，$S(W_R)=\{x\in E\mid \|x\|<R\}$.

例6.3 设P是Banach空间E中的一个锥，容易验证，P是具有逆星形性质的收缩核，$S(P)=-P\backslash\{\theta\}=\{x\in E\mid -x\in P, x\neq\theta\}$.

引理6.4 设W是Banach空间E中的凸闭集.如果存在元素$u_0\in W$，具有性质：

(1)对任给$u\in W$，只要$\alpha>0$，就有$\alpha u+(1-\alpha)u_0\in W$；

(2)存在$u'\in W$，$\alpha'<0$，使$u^*=\alpha' u'+(1-\alpha')u_0\in W$.

则W具有逆星形性质，并且u^*是逆星形中心。

证 对任给$u\in W$，$\beta\geqslant 1$，有

$$\beta u+(1-\beta)u^*=\beta u+(1-\beta)[\alpha' u'+(1-\alpha')u_0]$$

$$=\frac{1}{2}[2\beta u+(1-2\beta)u_0]$$

$$+\frac{1}{2}\{-2\alpha'(\beta-1)u'+[1+2\alpha'(\beta-1)]u_0\},$$

由性质(1)及W的凸集性知$\beta u+(1-\beta)u^*\in W$.证完.

引理6.5 设W是具有逆星形性质的收缩核,u_0是W的逆星形中心.则对任给$\lambda\neq 0$, $\lambda W=\{\lambda x\,|\,x\in W\}$也是具有逆星形性质的收缩核,并且$\lambda u_0$是$\lambda W$的逆星形中心.

这一引理的证明是显然的.

定理6.6 设E是Banach空间,$A:E\to E$是全连续算子,$A\theta=\theta$,A'_θ存在.设存在具有逆星形性质的收缩核W,满足:

(1)存在充分大的$R^*>0$,使A映$\{x\in E\,|\,\|x\|\geqslant R^*\}$入$W$;

(2)对每一个固定的$\lambda\neq 0$,有

$$\lim_{\substack{x\in\lambda W\\ \|x\|\to+\infty}}\frac{\|Ax\|}{\|x\|}=+\infty. \tag{6.1}$$

则下列结论成立:

(i)对任给$\lambda\neq 0$,$\lambda\neq\mu_n(n=1,2,\cdots)$,都存在$x_\lambda\in E\setminus\{\theta\}$,使$x_\lambda=\lambda Ax_\lambda$,即$\lambda$是$A$的特征值;其中$\{\mu_n\,|\,n=1,2,\cdots\}$是$A'_\theta$的全体特征值组成的集合;

(ii)$\lim\limits_{\lambda\to 0}\|x_\lambda\|=+\infty$.

证 先证(i).任取固定的λ,使$\lambda\neq 0$,$\lambda\neq\mu_n(n=1,2,\cdots)$.由Leray-Schauder定理(见附录定理2.4),必存在充分小的$r=r(\lambda)>0$,使

$$|\deg(I-\lambda A,B_r,0)|=1, \tag{6.2}$$

其中$B_r=\{x\in E\,|\,\|x\|<r\}$.取$u_0$是$W$的某一逆星形中心,由(6.1)式知,存在$R=R(\lambda)>\max\{2\|\lambda u_0\|,R^*,r\}$,使得只要

$x\in\lambda W$，$\|x\|\geqslant R$，就有$\|\lambda Ax\|\geqslant 2\|x\|$．取$R_1$，满足

$$2R-\|\lambda u_0\|>R_1>R+\|\lambda u_0\|. \tag{6.3}$$

令$W_\lambda=\lambda W\cap\{x\in E\mid\|x-\lambda u_0\|\geqslant R_1\}$，下证$W_\lambda$是$(\lambda A,B_R)$的二重本质核，并且$B_R\cap W_\lambda=\phi$，其中$B_R=\{x\in E\mid\|x\|<R\}$．

由条件（1）及R的选取知，λA映∂B_R入W，即λW是$(\lambda A,B_R)$的一重本质核．作映射$r(x)$如下：

$$r(x)=\begin{cases}x, & x\in W_\lambda\text{时},\\ \dfrac{R_1x}{\|x-\lambda u_0\|}+\dfrac{(\|x-\lambda u_0\|-R_1)\lambda u_0}{\|x-\lambda u_0\|}, & x\in\lambda W\backslash W_\lambda.\end{cases} \tag{6.4}$$

当$x\in\lambda W\backslash W_\lambda$时，$0<\|x-\lambda u_0\|<R_1$，即$\dfrac{R_1}{\|x-\lambda u_0\|}>1$．由引理6.4知，$\lambda u_0$是$\lambda W$的逆星形中心，故当$x\in\lambda W\backslash W_\lambda$时，

$$r(x)=\frac{R_1x}{\|x-\lambda u_0\|}+\left(1-\frac{R_1}{\|x-\lambda u_0\|}\right)\lambda u_0\in\lambda W,$$

$$\|r(x)-\lambda u_0\|=\left\|\frac{R_1x}{\|x-\lambda u_0\|}+\left(1-\frac{R_1}{\|x-\lambda u_0\|}\right)\lambda u_0-\lambda u_0\right\|=R_1,$$

即$r(x)\in W_\lambda$；而当$x\in W_\lambda$时$r(x)=x\in W_\lambda$，故$r:\lambda W\to W_\lambda$．由于λW是闭集，$\lambda u_0\overline{\in}\lambda W$，故$\inf\limits_{x\in\lambda W}\|x-\lambda u_0\|>0$．因此由(6.4)式易知$r$是连续的．这就证明了$r:\lambda W\to W_\lambda$是保核收缩，即$W_\lambda$是$\lambda W$的收缩核．

当$x\in\lambda W\cap\partial B_R$时，$\lambda Ax\in\lambda W$，并且

$$\begin{aligned}\|\lambda Ax-\lambda u_0\|&\geqslant\|\lambda Ax\|-\|\lambda u_0\|\\&\geqslant 2\|x\|-\|\lambda v_0\|=2R-\|\lambda u_0\|>R_1,\end{aligned}$$

故$\lambda Ax\in W_\lambda$.于是W_λ是（$\lambda A, B_R$）的二重本质核.

对$x\in W_\lambda$，由(6.3)式可知

$\|x\|\geqslant\|x-\lambda u_0\|-\|\lambda u_0\|\geqslant R_1-\|\lambda u_0\|>R$.

因此$W_\lambda\cap B_R=\phi$.根据定理1.3的结论(ii)，

$$\deg(I-\lambda A, B_R, 0)=0. \tag{6.5}$$

由(6.2)、(6.5)两式可知结论(i)成立.

再证(ii). 用反证法，设(ii)的结论不真，则存在常数$c>0$及$\lambda_n\to 0$，使$\|x_{\lambda_n}\|<c$（$n=1, 2, \cdots$）.不失一般性，可以假定$\|x_{\lambda_n}\|\to\alpha$，其中$0\leqslant\alpha\leqslant c$.若$\alpha>0$，则对充分大的$n$，$\|x_{\lambda_n}\|\geqslant\frac{\alpha}{2}$.令$M=\sup\limits_{\|x\|\leqslant c}\|Ax\|$，则

$$\left|\frac{1}{\lambda_n}\right|=\frac{\|Ax_{\lambda_n}\|}{\|x_{\lambda_n}\|}\leqslant\frac{2M}{\alpha},$$

与$\lambda_n\to 0$矛盾.若$\alpha=0$，则$x_{\lambda_n}\to\theta$.因为A'_θ存在，故

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\|Ax_{\lambda_n}-A'_\theta x_{\lambda_n}\|}{\|x_{\lambda_n}\|}=0.$$

因此，

$$\left|\frac{1}{\lambda_n}\right|=\frac{\|Ax_{\lambda_n}\|}{\|x_{\lambda_n}\|}\leqslant\frac{\|Ax_{\lambda_n}-A'_\theta x_{\lambda_n}\|+\|A'_\theta x_{\lambda_n}\|}{\|x_{\lambda_n}\|}$$

$$\leqslant\frac{\|Ax_{\lambda_n}-A'_\theta x_{\lambda_n}\|}{\|x_{\lambda_n}\|}+\|A'_\theta\|,$$

也与$\lambda_n\to 0$矛盾.故结论(ii)获证.证完.

推论6.7 设E是无穷维Banach空间，$A: E\to E$是全连续算子，$A\theta=\theta$，A'_θ存在，又设

$$\lim_{\|x\|\to\infty}\frac{\|Ax\|}{\|x\|}=+\infty, \tag{6.6}$$

则定理6.6的结论成立.

证 取常数$R_0>0$，在定理6.6中，令$W=\{x\in E\mid\|x\|\geqslant$

$R_0\}$.由例6.2知，W是具有逆星形性质的收缩核.由（6.6）式易知，定理6.6的条件（1）、（2）成立，故由定理6.6可知，推论6.7的结论成立，证完.

推论6.8 设E是Banach空间，$A: E \to E$是全连续算子，$A\theta=\theta$，A'_θ存在. 又设存在具有逆星形性质的收缩核W，使定理6.6的条件（1）成立，并且对任给固定的$\lambda>0$，(6.1）式成立.则对任给$\lambda>0$，$\lambda \neq \mu_n(n=1,2,\cdots$，$\mu_n$的意义同定理6.6)，$\lambda$是$A$的特征值，并且$\lim\limits_{\lambda\to 0^+}\|x_\lambda\|=+\infty$（$x_\lambda$是$A$相应于$\lambda$的特征值）

证 由定理6.6的证明即知.证完.

下面考察Hammerstein型非线性积分方程

$$\varphi(x)=\lambda\int_G k(x,y)f(y,\varphi(y))dy=\lambda A\varphi(x) \quad (6.7)$$

特征值的性质，其中G是R^N中的某有界闭域.

首先在L_p空间中进行讨论.设$f(x,u)$可以表为

$$f(x,u)=\sum_{i=1}^{n}a_i(x)u^i \quad (6.8)$$

定理6.9 设：（1）$k(x,y)$在$G\times G$上连续（不假定非负），并存在$c(x)\in L_{\frac{n}{n-1}}$，使对任给$y\in G$，有

$$\int_G c(x)k(x,y)dx>0; \quad (6.9)$$

（2）$f(x,u)$可以表为（6.8）式的形式，其中n是偶数，$a_i(x)\in L_{\frac{n}{n-i}}$（$i=1,2,\cdots,n-1$），$a_n(x)$有界可测并且$\inf\limits_{x\in G} a_n(x)>0$；

则对任给实数λ，只要$\lambda\neq 0$，$\lambda\neq\mu_n$（$\{\mu_n\}$是映$C(G)$入$C(G)$的线性积分算子$K_1\varphi=\int_G k(x,y)a_1(y)\varphi(y)dy$ 的全系特征值），

λ就是A的特征值，即存在G上不恒为零的连续函数φ_λ，使得$\varphi_\lambda=\lambda A\varphi_\lambda$.更进一步，则有

$$\lim_{\lambda\to 0}\|\varphi_\lambda\|_{L_n}=+\infty.$$

证 令$A=K\mathsf{f}$，其中

$$K\varphi=\int_G k(x,y)\varphi(y)dy,$$

$$\mathsf{f}\varphi=f(x,\varphi(x))=\sum_{i=1}^{n}a_i(x)[\varphi(x)]^i.$$

当$\varphi\in L_n$时，

$$\|\mathsf{f}\varphi\|_L=\left\|\sum_{i=1}^{n}a_i\varphi^i\right\|_L\leqslant\sum_{i=1}^{n}\|a_i\|_{L_{\frac{n}{n-i}}}\|\varphi\|_{L_n}^i, \qquad (6.10)$$

其中$\|a_n\|_{L_{\frac{n}{n-n}}}=\|a_n\|_{L_\infty}=\operatorname*{ess\,sup}_{x\in G}|a_n(x)|$.故f映$L_n$入$L$，从而根据第二章定理2.21可知f是映$L_n$入$L$的连续有界算子.由于$K$映$L$入$C$全连续，故$A$映$L_n$入$C$全连续，当然更映$L_n$入$\lambda$自身全连续.由于

$$\|A\varphi-K_1\varphi\|_{L_n}=\left\|\sum_{i=2}^{n}Ka_i\varphi^i\right\|_{L_n}$$

$$\leqslant M(\mathrm{mes}G)^{\frac{1}{n}}\sum_{i=2}^{n}\|a_i\|_{L_{\frac{n}{n-i}}}\|\varphi\|_{L_n}^i, \qquad (6.11)$$

其中$M=\max\limits_{(x,y)\in G\times G}|k(x,y)|$，故$A$在$\theta$处的Frechet导算子存在且为$K_1$.显然$A\theta=\theta$.下证

$$\lim_{\|\varphi\|_{L_n}\to\infty}\frac{\|A\varphi\|_{L_n}}{\|\varphi\|_{L_n}}=+\infty. \qquad (6.12)$$

事实上，由于$c(x)\in L_{\frac{n}{n-1}}$，故

$$l(\varphi(x))=\int_G c(x)\varphi(x)dx$$

是L_n上的有界线性泛函，令其范数为$\|l\|$.则

$$\|A\varphi\|_{L_n} \geqslant \frac{1}{\|l\|} |l(A\varphi)|$$

$$= \frac{1}{\|l\|} \left| \int_G c(x) \left[\int_G k(x,y) f(y,\varphi(y)) dy \right] dx \right|$$

$$= \frac{1}{\|l\|} \left| \int_G f(y,\varphi(y)) dy \int_G c(x) k(x,y) dx \right|$$

$$\geqslant \frac{1}{\|l\|} \left| \int_G a_n(y) [\varphi(y)]^n dy \int_G c(x) k(x,y) dx \right|$$

$$- \frac{1}{\|l\|} \left| \int_G \sum_{i=1}^{n-1} a_i(y) [\varphi(y)]^i dy \int_G c(x) k(x,y) dx \right|$$

$$\geqslant \frac{\tau\beta}{\|l\|} \|\varphi\|_{L_n}^n - \frac{M}{\|l\|} \left| \int_G c(x) dx \right| \sum_{i=1}^{n-i} \|a_i\|_{L_{\frac{n}{n-i}}} \|\varphi\|_{L_n}^i, \tag{6.13}$$

其中$\tau = \inf\limits_{x \in G} a_n(x)$，$\beta = \inf\limits_{y \in G} \int_G c(x) k(x,y) dx$. 由（6.13）式知（6.12）式成立.由推论6.7知本定理的结论成立.证完.

下面将在$C(G)$空间中讨论方程（6.7）特征值的性质.

定理6.10 设：（1）$k(x,y)$在$G \times G$上连续（不要求非负）并存在有界可测函数$h(x)$（不要求非负），使对任给$y \in G$，有

$$\int_G h(x) k(x,y) dx > 0; \tag{6.14}$$

（2）$f(x,u)$在$G \times R^1$上连续（不要求非负），$f(x,0) \equiv 0$，并且$f_u'(x,0)$存在连续；

（3）$f(x,u)$下方有界，并且对$x \in G_1 = G \backslash \{x \in G \mid h(x) = 0\}$一致成立

$$\lim_{|u| \to +\infty} \frac{f(x,u)}{|u|} = +\infty; \tag{6.15}$$

则下列结论成立：

(i)任给$\lambda \neq 0$，$\lambda \neq u_n$，λ是A的特征值，其中$\{\mu_n | n=1, 2, \cdots\}$是映$C(G)$入$C)G)$的线性积分算子

$$K_1\varphi(x)=\int_G k(x,y)f'_u(y,0)\varphi(y)dy \tag{6.16}$$

的全体特征值组成的集合；

(ii)$\lim\limits_{\lambda\to 0}\|\varphi_\lambda\|=+\infty$，其中$\varphi_\lambda$是$A$相应于$\lambda$的特征函数。

证 只需证明定理6.6的条件满足即可，由$f(x,u)$下方有界知，存在$b\geqslant 0$，使

$$f(x,u)+b\geqslant 0, \quad \forall (x,u)\in G\times R^1. \tag{6.17}$$

取$\varphi_0(x)=b\int_G k(x,y)dy$，$M=\max\limits_{(x,y)\in G\times G}|k(x, y)|$，$\beta=\inf\limits_{y\in G}\int_G h(x)k(x,y)dx$，$\delta=\beta M^{-1}$，令

$$W=\left\{\varphi(x)\in C(G)\,\Big|\,\int_G h(x)[\varphi(x)+\varphi_0(x)]dx \geqslant\delta\|\varphi+\varphi_0\|\right\},$$

直接验证知W是凸闭集，并且(i)对$-\varphi_0(x)$来说，若$\varphi(x)\in W$，则对一切$\alpha\geqslant 0$，有$\alpha\varphi+(1-\alpha)(-\varphi_0)\in W$；(ii)$\theta\in W$，但若取$\alpha'=-1$，则$\alpha'\theta+(1-\alpha')(-\varphi_0)=-2\varphi_0\bar{\in} W$。根据引理6.4，$W$是具有逆星形性质的收缩核，对任给$\varphi(x)\in C(G)$，有

$$\int_G h(x)[A\varphi+\varphi_0]dx=\int_G[f(y,\varphi(y))+b]dy \cdot\int_G h(x)k(x,y)dx$$

$$\geqslant\beta\int_G[f(y,\varphi(y))+b]dy$$

$$\geqslant \beta M^{-1}\left|\int_G k(x,y)[f(y,\varphi(y))+b]dy\right|$$

$$=\delta|A\varphi+\varphi_0|. \tag{6.18}$$

所以

$$\int_G h(x)[A\varphi+\varphi_0]dx \geqslant \delta\|A\varphi+\varphi_0\|,$$

即A映$C(G)$入W.

任给$N>0$，由条件（3）知，存在$u^*>0$，使当$|u|\geqslant u_*$，$x\in G_1$时$f(x,u)\geqslant N|u|$.取常数$r\leqslant 0$，使

$$r\leqslant \inf_{x\in G_1,\ |u|\leqslant u^*}[f(x,u)-N|u|],$$

则对任给$x\in G_1$，$-\infty<u<+\infty$，都有

$$f(x,u)+b\geqslant N|u|+r+b \tag{6.19}$$

对固定的$\lambda\neq 0$，有

$$\lambda W=\left\{\lambda\varphi\left|\int_G h(x)[\varphi(x)+\varphi_0(x)]dx\geqslant\delta\|\varphi-\varphi_0\|\right.\right\}$$

$$=\left\{\lambda\varphi\left|\operatorname{sign}\lambda\int_G h(x)[\lambda\varphi(x)+\lambda\varphi_0(x)]dx\right.\right.$$

$$\left.\geqslant\delta\|\lambda\varphi+\lambda\varphi_0\|\right\}$$

$$=\left\{\varphi\left|\operatorname{sign}\lambda\int_G h(x)[\varphi(x)+\lambda\varphi_0(x)]dx\geqslant\delta\|\varphi+\lambda\varphi_0\|\right.\right\},$$

所以，当$\varphi\in\lambda W$时有

$$\left|\int_G h(x)[\varphi(x)+\lambda\varphi_0(x)]dx\right|\geqslant\delta\|\varphi+\lambda\varphi_0\|. \tag{6.20}$$

由于$h(x)$是有界可测函数，故$h(\varphi)=\int_G h(x)\varphi(x)dx$定义了$C(G)$上的一个有界线性泛函，令$\|h\|$是$h(\varphi)$的范数，则$\|\varphi\|\geqslant\frac{1}{\|h\|}h(\varphi)$；故当$\varphi\in\lambda W$，$\|\varphi\|=R$时有

四

$$\|A\varphi\| \geqslant \frac{1}{\|h\|} h(A\varphi) = \frac{1}{\|h\|} \int_G [f(y,\varphi(y)) + b] dy$$

$$\cdot \int_G h(x) k(x,y) dx$$

$$- \frac{b}{\|h\|} \int_G \int_G h(x) k(x,y) dx dy$$

$$\geqslant \frac{\beta}{\|h\|} \int_G [f(y,\varphi(y)) + b] dy$$

$$- \frac{b}{\|h\|} \int_G \int_G h(x) k(x,y) dx dy$$

$$\geqslant \frac{\beta}{\|h\|} \int_{G_1} [f(y,\varphi(y)) + b] dy$$

$$- \frac{b}{\|h\|} \int_G \int_G h(x) k(x,y) dx dy$$

$$\geqslant \frac{\beta}{\|h\|} \int_{G_1} (N|\varphi(y)| + r + b] dy$$

$$- \frac{b}{\|h\|} \int_G \int_G h(x) k(x,y) dx dy$$

$$= \frac{\beta N}{\|h\|} \int_{G_1} |\varphi(y)| dy + a_1 \tag{6.21}$$

其中$a_1 = \frac{\beta}{\|h\|}(r+b)\text{mes}G_1 - \frac{b}{\|h\|}\int_G\int_G h(x)\ k(x,y)\ dxdy$是一个常数。　令$M_1 = \sup_{x\in G}|h(x)|$，由(6.20)式并注意到当$x\in G\setminus G_1$时，有$h(x)=0$，所以又有

$$\int_{G_1} |\varphi(y)| dy \geqslant \frac{1}{M_1} \int_{G_1} |h(y)\varphi(y)| dy$$

$$\geqslant \frac{1}{M_1} \left| \int_G h(y)\varphi(y) dy \right|$$

$$\geqslant \frac{1}{M_1}\left|\int_G h(y)[\varphi(y)+\lambda\varphi_0(y)]dy\right|$$

$$-\frac{1}{M_1}\left|\int_G \lambda h(y)\varphi_0(y)dy\right|$$

$$\geqslant \frac{\delta}{M_1}\|\varphi+\lambda\varphi_0\|-\frac{1}{M_1}\left|\lambda\int_G h(y)\varphi_0(y)dy\right|$$

$$\geqslant \frac{\delta}{M_1}\|\varphi\|-\left[\frac{\delta|\lambda|}{M_1}\|\varphi_0\|\right.$$

$$\left.+\frac{1}{M_1}\left|\lambda\int_G h(y)\varphi_0(y)dy\right|\right]$$

$$=a_2R-a_3, \tag{6.22}$$

其中$a_2=\dfrac{\delta}{M_1}>0$，$a_3=\dfrac{\delta|\lambda|}{M_1}\|\varphi_0\|+\dfrac{1}{M_1}\left|\lambda\int_G h(y)\ \varphi_0(y)dy\right|$是常数．故由(6.21)、(6.22)两式可知

$$\|A\varphi\|\geqslant \frac{a_2\beta}{\|h\|}NR+\left(a_1-\frac{a_3\beta}{\|h\|}N\right),$$

于是

$$\frac{\|A\varphi\|}{\|\varphi\|}=\frac{\|A\varphi\|}{R}\geqslant \frac{a_2\beta}{\|h\|}N+\frac{1}{R}\left(a_1-\frac{a_3\beta}{\|h\|}N\right).$$

令$R\to+\infty$，有

$$\varliminf_{\varphi\in\lambda W,\ \|\varphi\|\to+\infty}\frac{\|A\varphi\|}{\|\varphi\|}\geqslant \frac{a_3\beta}{\|h\|}N.$$

由于N是任取的，故

$$\lim_{\varphi\in\lambda W,\ \|\varphi\|\to+\infty}\frac{\|A\varphi\|}{\|\varphi\|}=+\infty. \tag{6.23}$$

由条件(2)知$A\theta=\theta$，A'_θ存在且$A'_\theta=K_1$，其中K_1由(6.16)式定义．于是定理6.6的全部条件成立．根据定理6.6，定理6.10的结论成立．证完．

为了使定理6.10便于应用，给出下列

引理6.11 设$k(x,y)$连续。如果存在G中的m个点x_i及m个不全为零的实数$\alpha_i(i=1,2,\cdots,m)$，使$\sum_{i=1}^{m}\alpha_i k(x_i,y)>0$对任给$y\in G$成立，则必存在有界可测函数$h(x)$，满足

$$\int_G h(x)k(x,y)dx>0 \quad (\forall y\in G).$$

证 不失一般性，可以假定诸α_i均不为零，并设$i\neq j$时$x_i\neq x_j(i,\ j=1,2,\cdots,m)$，易知对每一个$x_i$，都存在$x_i$的一个开邻域$D_i\subset G$，使(i)$i\neq j$时，$D_i\cap D_j=\phi$；(ii)诸$D_i$测度相等；(iii)若$\alpha_i>0$，则对$x\in D_i$，有$k(x,y)\geqslant k(x_i,y)-\varepsilon$；若$\alpha_i<0$，则对$x\in D_i$，有$k(x,y)\leqslant k(x_i,y)+\varepsilon$，其中

$$0<\varepsilon<\frac{1}{\sum_{i=1}^{m}|\alpha_i|}\left[\inf_{y\in G}\sum_{i=1}^{m}\alpha_i k(x_i,y)\right].$$

于是对每一个$i=1,2,\cdots,m$，当$x\in D_i$时

$$\alpha_i k(x,y)\geqslant\alpha_i k(x,y)-|\alpha_i|\varepsilon.$$

定义有界可测函数$h(x)$如下：

$$h(x)=\begin{cases}\alpha_i, & \text{当} x\in D_i \text{时}, \ i=1,2,\cdots,m,\\ 0, & \text{当} x\in G\setminus\bigcup_{i=1}^{m}D_i.\end{cases}$$

则有

$$\begin{aligned}\int_G h(x)k(x,y)dx&=\sum_{i=1}^{m}\int_{D_i}\alpha_i k(x,y)dx\\ &\geqslant\sum_{i=1}^{m}\int_{D_i}[\alpha_i k(x_i,y)-|\alpha_i|\varepsilon]dx\\ &=\sum_{i=1}^{m}\mathrm{mes}D_i[\alpha_i k(x_i,y)-|\alpha_i|\varepsilon]\\ &=\mathrm{mes}D_1\left[\sum_{i=1}^{m}\alpha_i k(x_i,y)-\sum_{i=1}^{m}|\alpha_i|\varepsilon\right]>0 \quad (\forall y\in G).\end{aligned}$$

证完.

在某些问题中，例如在某些常微分方程两点边值问题中，定理6.10关于$k(x,y)$的条件不能满足. 因此，再建立下述定理：

定理6.12 设（1）$k(x,y)$在$G\times G$上连续（不要求非负），并存在闭域$G_1\subset G$及有界可测函数$h(x)$（不要求非负）以及常数$\delta>0$，满足

$$\int_G h(x)k(x,y)dx\geqslant 0 \quad (\forall y\in G), \tag{6.24}$$

$$\int_G h(x)k(x,y)dx>0 \quad (\forall y\in G_1), \tag{6.25}$$

$$\int_{G_1} h(x)k(x,y)dx\geqslant\delta|k(\tau,y)| \quad (\forall \tau,y\in G); \tag{6.26}$$

（2）$f(x,u)$在$G\times R^1$上连续（不要求非负），$f(x,0)\equiv 0$，$f'_u(x,0)$存在连续；

（3）$f(x,u)$下方有界，并且对$x\in G_1$，一致有

$$\lim_{|u|\to+\infty}\frac{f(x,u)}{|u|}=+\infty; \tag{6.27}$$

在以上条件下，定理6.10的全部结论依然成立，

证 证明仿定理6.10，下面仅将不同点指出.取

$$W=\left\{\varphi\in C(G)\,\middle|\,\int_{G_1}h(x)[\varphi(x)+\varphi_0(x)]dx\geqslant\delta\|\varphi+\varphi_0\|\right\},$$

其中δ由(6.26)式确定. (6.18)式的证明改为：对任给$\varphi(x)\in C(G)$，有

$$\int_{G_1}h(x)[A\varphi+\varphi_0]dx$$

$$=\int_G[f(y,\varphi(y))+b]dy\int_{G_1}h(x)k(x,y)dx$$

$$\geqslant \int_G \delta |k(x,y)| [f(y,\varphi(y))+b] dy \geqslant \delta \| A\varphi+\varphi_0 \|.$$

(6.20) 式改为：

$$\left| \int_{G_1} h(x)[\varphi(x)+\lambda\varphi_0(x)] dx \right| \geqslant \delta \|\varphi+\lambda\varphi_0\|.$$

(6.27)式证明如下：

$$\|A\varphi\| \geqslant \frac{1}{\|h\|} \int_G [f(y,\varphi(y))+b] dy \int_G h(x)k(x,y) dx$$

$$-\frac{b}{\|h\|} \int_G \int_G h(x)k(x,y) dx dy$$

$$\geqslant \frac{1}{\|h\|} \int_{G_1} [f(y,\varphi(y))+b] dy \int_G h(x)k(x,y) dx$$

$$-\frac{b}{\|h\|} \int_G \int_G h(x)k(x,y) dx dy$$

$$\geqslant \frac{\beta}{\|h\|} \int_{G_1} [f(y,\varphi(y))+b] dy$$

$$-\frac{b}{\|h\|} \int_G \int_G h(x)k(x,y) dx dy$$

$$\geqslant \frac{\beta N}{\|h\|} \int_{G_1} |\varphi(y)| dy + a_1,$$

其中$\beta = \inf\limits_{y \in G_1} \int_G h(x)k(x,y) dx > 0$.(6.22)式证明改为

$$\int_{G_1} |\varphi(y)| dy \geqslant \frac{1}{M_1} \int_{G_1} |h(y)\varphi(y)| dy$$

$$\geqslant \frac{1}{M_1} \left| \int_{G_1} h(y)\varphi(y) dy \right|$$

$$\geqslant \frac{1}{M_1} \left| \int_{G_1} h(y)[\varphi(y)+\lambda\varphi_0(y)] dy \right|$$

$$-\frac{1}{M_1}\left|\int_{G_1}\lambda h(y)\varphi_0(y)dy\right|$$

$$\geqslant\frac{\delta}{M_1}\|\varphi+\lambda\varphi_0\|-\frac{1}{M_1}\left|\int_{G_1}\lambda h(y)\varphi_0(y)dy\right|$$

$$=a_2R-a_3.$$

证明的其余部分不变.

下面在不假定

$$f(x,u)\geqslant 0\quad(x\in G,u\geqslant 0)\tag{6.28}$$

成立的情况下，讨论超线性Hammerstein型积分方程正特征函数的存在性. 先证明一个引理.

引理6.13 设：（1）$k(x,y)$在$G\times G$上非负连续，并存在$G_0\subset G$，$\text{mes}G_0\neq 0$，$\delta>0$，使得

$$k(x,y)\geqslant\delta k(\tau,y),\ \forall x\in G_0,y,\tau\in G,\tag{6.29}$$

$$k(x,y)\geqslant\delta k(x,\tau),\quad\forall y\in G_0,x,\tau\in G;\tag{6.30}$$

（2）$f(x,u)$在$G\times R^1$上连续，下方有界，并且对$x\in G_0$一致地有

$$\lim_{u\to+\infty}f(x,u)=+\infty;\tag{6.31}$$

则对任给$\lambda^*>0$，存在$R=R(\lambda^*)>0$，使得如果$0<\lambda_0\leqslant\lambda^*$，$\|\varphi_0\|\geqslant R$，并且$\varphi_0=\lambda_0A\varphi_0$。（其中$A$由(6.7)式定义），就有$\varphi_0(x)\geqslant 0$.即方程(6.7)的相应于$\lambda_0$($0<\lambda_0\leqslant\lambda^*$)的范数不小于$R$的解一定是正解.

证 因为$f(x,u)$在$G\times R^1$上下方有界，故存在常数$b>0$，使对任给$x\in G$，$u\in R^1$，有

$$f(x,u)\geqslant -b.\tag{6.32}$$

由(6.31)式知存在$R_1>0$，使对任给$x\in G_0$，$u\geqslant R_1$，有

$$f(x,u)\geqslant\delta^{-1}Nb,\tag{6.33}$$

其中δ由条件（1）确定，$N>\dfrac{\mathrm{mes}G-\mathrm{mes}G_0}{\mathrm{mes}G_0}$是一自然数。

设$\lambda^*>0$给定，令

$$R=R(\lambda^*)=\max\{2\delta^{-1}R_1, 2\delta^{-1}\lambda^* bM\,\mathrm{mes}G,$$
$$2\lambda^* bM\,\mathrm{mes}G\} \tag{6.34}$$

其中$M=\max\limits_{(x,y)\in G\times G} k(x,y)$。设$0<\lambda_0\leqslant\lambda^*$，$\|\varphi_0\|\geqslant R$，并且$\varphi_0=\lambda_0 A\varphi_0$。任取$\overline{x}\in G_0$，由(6.29)、(6.32)两式知对任给$\tau\in G$，有

$$\begin{aligned}\varphi_0(\overline{x})&=\lambda_0\int_G k(\overline{x},y)[f(y,\varphi_0(y)+b]dy\\&\quad-\lambda_0\int_G bk(\overline{x},y)dy\\&\geqslant\lambda_0\delta\int_G k(\tau,y)[f(y,\varphi_0(y))+b]dy-\lambda_0 bM\,\mathrm{mes}G\\&\geqslant\lambda_0\delta\int_G k(\tau,y)f(y,\varphi_0(y))dy-\lambda^* bM\,mesG\\&=\delta\varphi_0(\tau)-\lambda^* bM\,\mathrm{mes}G.\end{aligned} \tag{6.35}$$

利用(6.32)、(6.34)两式可知，对任给$x\in G$，有

$$\begin{aligned}\varphi_0(x)&=\lambda_0\int_G k(x,y)f(y,\varphi_0(y))dy\\&\geqslant-\lambda^* bM\,mesG>-R\geqslant-\|\varphi_0\|.\end{aligned} \tag{6.36}$$

根据$C(G)$中的范数定义，必定存在$x^*\in G$，使得或者$\varphi_0(x^*)=\|\varphi_0\|$，或者$\varphi_0(x^*)=-\|\varphi_0\|$。但由(6.36)式知，$\varphi_0(x^*)=-\|\varphi_0\|$不可能成立，故必存在$x^*\in G$，使$\varphi_0(x^*)=\|\varphi_0\|$。在(6.35)式中，取$\tau=x^*$，并利用(6.34)式，可得

$$\begin{aligned}\varphi_0(\overline{x})&\geqslant\delta\|\varphi_0\|-\lambda^* bM\,\mathrm{mes}G\geqslant\delta R-\lambda^* bM\,mesG\\&=\frac{\delta}{2}R+\frac{\delta}{2}R-\lambda^* bM\,\mathrm{mes}G\geqslant\frac{\delta}{2}R\geqslant R_1\end{aligned} \tag{6.37}$$

因此，当$\overline{x}\in G_0$时有$\varphi_0(\overline{x})\geqslant R_1$。由(6.33)式可知，当$y\in G_0$时有

$$f(y,\varphi_0(y))\geqslant\delta^{-1}Nb. \qquad (6.38)$$

取$G_i\subset G(i=1,2,\cdots,N)$，使得$\mathrm{mes}G_i=\mathrm{mes}G_0$，$\bigcup_{i=1}^{N}G_i\supset G\setminus G_0$（根据$N$的取法，这是可能的）．由(6.38)，(6.30)两式可知，对任给$x\in G$，$y\in G_0$，$\tau\in G_i$（$i=1,2,\cdots,N$），有

$$\frac{1}{N}k(x,y)f(y,\varphi_0(y))\geqslant\delta^{-1}b\cdot\delta k(x,\tau). \qquad (6.39)$$

因为$\mathrm{mes}G_i=\mathrm{mes}G_0$，故对(6.39)式左端在$G_0$上对$y$积分，在右端在$G_i(i=1,2,\cdots,N)$上对$\tau$积分，不等式仍成立，即对每一个$i=1,2,\cdots,N$,都有

$$\frac{1}{N}\int_{G_0}k(x,y)f(y,\varphi_0(y))dy\geqslant\int_{G_i}bk(x,\tau)d\tau. \qquad (6.40)$$

于是显然有

$$\int_{G_0}k(x,y)f(y,\varphi_0(y))dy\geqslant\sum_{i=1}^{N}\int_{G_i}bk(x,\tau)d\tau$$

$$\geqslant\int_{G\setminus G_0}bk(x,\tau)d\tau=\int_{G\setminus G_0}bk(x,y)dy. \qquad (6.41)$$

由(6.32)、(6.41)两式可知，对任给$x\in G$,都有

$$\begin{aligned}\varphi_0(x)&=\lambda_0\int_G k(x,y)f(y,\varphi_0(y))dy\\&=\lambda_0\int_{G_0}k(x,y)f(y,\varphi_0(y))dy\\&\quad+\lambda_0\int_{G\setminus G_0}k(x,y)f(y,\varphi_0(y))dy\\&\geqslant\lambda_0\Big[\int_{G_0}k(x,y)f(y,\varphi_0(y))dy\\&\quad-\int_{G\setminus G_0}bk(x,y)dy\Big]\geqslant 0\end{aligned}$$

引理6.13证完．

定理6.14 设：（1）$k(x,y)$在$G\times G$上非负连续，并存在闭域$G_0\subset G,\delta>0$，使得

$$k(x,y)\geqslant\delta k(\tau,y),\quad \forall x\in G_0,y,\tau\in G, \tag{6.42}$$

$$k(x,y)\geqslant\delta k(x,\tau),\quad \forall y\in G_0,x,\tau\in G, \tag{6.43}$$

$$\int_{G_0}k(x,y)dx>0,\quad \forall y\in G_0; \tag{6.44}$$

（2）$f(x,u)$在$G\times R^1$上连续，并且

$$\lim_{u\to+\infty}\frac{f(x,u)}{u}=+\infty\ （关于x\in G_0一致）, \tag{6.45}$$

并且存在常数$b_0>0$，使得对一切$x\in G$，有

$$\underline{\lim}_{u\to+\infty}f(x,u)\geqslant -b_0; \tag{6.46}$$

则存在$\lambda^*>0$，使得对任给$0<\lambda\leqslant\lambda^*$，Hammerstein 型非线性积分方积(6.7)至少存在一个对应于λ的正特征函数.

证 定义

$$f_1(x,u)=\begin{cases}f(x,u), & u\geqslant 0\ 时,\\ f(x,-u), & u<0\ 时;\end{cases} \tag{6.47}$$

$$A_1\varphi(x)=\int_G k(x,y)f_1(y,\varphi(y))dy. \tag{6.48}$$

由(6.42)式知，对任给$y,\tau\in G$，有

$$\int_{G_0}k(x,y)dx\geqslant\int_{G_0}\delta k(\tau,y)dx=\delta\,\mathrm{mes}G_0k(\tau,y). \tag{6.49}$$

(6.44)、(6.49)、(6.45)、(6.46)、(6.47)诸式表明，对$k(x,y)$和$f_1(x,u)$，定理6.12的条件（1）、（3）满足（在定理6.12中，取$G_1=G_0$，$h(x)$是G_0上的特征函数，即当$x\in G_0$时，$h(x)=1$，$x\overline{\in}G_0$时$h(x)=0$，并注意到$k(x,y)$是非负的）.于是，由定理6.10及定理6.12的证明过程可知对一切$\lambda\neq0$，有

$$\operatorname{ind}(I-\lambda A_1,\infty)=0, \tag{6.50}$$

其中$\operatorname{ind}(J-\lambda A_1,\infty)=\deg(I-\lambda A_1,\Omega,0)$，$\Omega$满足在$C(G)\backslash\Omega$上$\varphi=\lambda A_1\varphi$没有解.

取定$r>0$，令

$$m=\max_{x\in G,\ |u|\leqslant r}|f_1(x,u)|,\qquad M=\max_{(x,y)\in G\times G}k(x,y).$$

取$\overline{\lambda}=r(mM\operatorname{mes}G)^{-1}$，$B_r=\{\varphi\in C(G)\mid\|\varphi\|<r\}$.则当$0<\lambda<\overline{\lambda}$，$\varphi\in\partial B_r$时有

$$\|\lambda A_1\varphi\|=\lambda\max_{x\in G}\left|\int_G k(x,y)f_1(y,\varphi(y))dy\right|$$

$$<\overline{\lambda}\,mM\operatorname{mes}G=r=\|\varphi\|.$$

因此，对$0<\lambda<\overline{\lambda}$

$$\deg(I-\lambda A_1,B_r,\ 0)=1. \tag{6.51}$$

(6.50)、(6.51) 两式表明，对任给$0<\lambda<\overline{\lambda}$，必存在$\varphi_\lambda\in C(G)$，$\|\varphi_\lambda\|>r$，使$\varphi_\lambda=\lambda A_1\varphi_\lambda$. 下面证明

$$\lim_{\substack{\lambda\to0^+\\ \varphi_\lambda=\lambda A\varphi_\lambda,\ \|\varphi_\lambda\|>r}}\|\varphi_\lambda\|=+\infty. \tag{6.52}$$

事实上，若(6.52)式不成立，则存在$\lambda_n>0$，$\varphi_{\lambda_n}\in C(G)$，使得$\lambda_n\to0$，$r<\|\varphi_{\lambda_n}\|<c$（其中$c$为一常数），并且

$$\varphi_{\lambda_n}=\lambda_nA_1\varphi_{\lambda_n}. \tag{6.53}$$

由于A_1是全连续算子，故$\{\varphi_{\lambda_n}\}$有一子列（不失一般性，可以假定就是$\{\varphi_{\lambda_n}\}$本身）收敛于某$\varphi^*\in C(G)$.在(6.53)式中，令$n\to\infty$，即得$\varphi^*=\theta$，此与$\|\varphi_{\lambda_n}\|>r$矛盾.故(6.52)式成立.

由(6.46)式及$f_1(x,u)$的定义知，$f_1(x,u)$下方有界. 由(6.45)式知，对$x\in G_0$，一致地有$\lim\limits_{u\to+\infty}f_1(x,u)=+\infty$. 因此，根据引理6.13，对$\overline{\lambda}$，存在$R(\overline{\lambda})>0$，使得只要$0<\lambda\leqslant\overline{\lambda}$，$\varphi_\lambda=\lambda A_1\varphi_\lambda$，$\|\varphi_\lambda\|\geqslant R(\overline{\lambda})$，就必有$\varphi_\lambda(x)\geqslant0$. 对该$R(\overline{\lambda})$，由

(6.52)式可知，必存在$\lambda^* < \overline{\lambda}$，使得只要$0<\lambda\leqslant\lambda^*$，$\varphi_\lambda = \lambda A_1\varphi_\lambda$，$\|\varphi_\lambda\|>r$，就必有$\|\varphi_\lambda\|\geqslant R$。这表明，对该$\lambda^*$，只要$0<\lambda\leqslant\lambda^*$，$\varphi_\lambda=\lambda A_1\varphi_\lambda$，$\|\varphi_\lambda\|>r$（由前面所述，这样的$\varphi_\lambda$是存在的），就必有$\varphi_\lambda(x)\geqslant 0$。即$\varphi_\lambda$是方程$\varphi=\lambda A_1\varphi$的正解。由$A_1$的定义可知

$$\varphi_\lambda(x)=\lambda A_1\varphi_\lambda(x)=\lambda\int_G k(x,y)f_1(y,\varphi_\lambda(y))dy$$

$$=\lambda\int_G k(x,y)f(y,\varphi_\lambda(y))dy=\lambda A\varphi_\lambda(x),$$

即$\varphi_\lambda(x)$是方程(6.7)的正解。证完。

在定理6.14中，并没有假定(6.28)式成立，但得到了正解存在性的结论。

推论6.15 设定理6.14的条件（1）、（2）成立，又设

（3）对$x\in G_0$，一致地有

$$\lim_{u\to-\infty}\frac{f(x,u)}{u}=+\infty \tag{6.54}$$

并且存在$b_1>0$，使对$x\in G$，

$$\overline{\lim_{u\to-\infty}} f(x,u)\leqslant b_1; \tag{6.55}$$

则存在$\lambda^*>0$，使得对一切$0<\lambda\leqslant\lambda^*$，方程(6.7)至少有一个对应于$\lambda$的正特征函数，并至少有一个对应于$\lambda$的负特征函数。

证 根据定理6.14，存在$\lambda_1^*>0$，使得对一切$0<\lambda\leqslant\lambda_1^*$，方程(6.7)至少有一个正解。令

$$f_2(x,u)=-f(x,-u),$$

$$A_2\varphi=\int_G k(x,y)f_2(y,\varphi(y))dy.$$

则对A_2来说，定理6.14的条件也满足。故由定理6.14可知，存在$\lambda_2^*>0$，使得对一切$0<\lambda\leqslant\lambda_2^*$，存在$\varphi_\lambda(x)\geqslant 0$，$\varphi_\lambda(x)$

$\neq 0$，满足$\varphi_\lambda=\lambda A_2\varphi_\lambda$.于是

$$-\varphi_\lambda(x)=-\lambda\int_G k(x,y)f_2(y,\varphi_\lambda(y))dy$$

$$=\lambda\int_G k(x,y)f(y,-\varphi_\lambda(y))dy.$$

即$-\varphi_\lambda(x)$是方程(6.7)的解，该解显然是负解。于是若取$\lambda^*=\min\{\lambda_1^*,\lambda_2^*\}$,即知推论6.15的结论成立。证完。

推论6.16 设定理6.14的条件(1)、(2)成立。又设

(3*)对$x\in G_0$，一致地有

$$\lim_{u\to-\infty}\frac{f(x,u)}{u}=-\infty, \tag{6.56}$$

并且存在$b_2>0$，使对$x\in G$，有

$$\varliminf_{u\to-\infty} f(x,u)\geqslant -b_2; \tag{6.57}$$

则存在$\lambda^*>0$，使当$0<\lambda\leqslant\lambda^*$时，方程(6.7)至少有一对应于$\lambda$的正特征函数；当$-\lambda^*\leqslant\lambda<0$时，方程(6.7)至少有一对应于$\lambda$的负特征函数。

证 证法与推论6.15相似。令$f_3(x,u)=f(x,-u)$，并考察$A_3\varphi(x)=\int_G k(x,y)f_3(y,\varphi(y))dy$即可。证完

附注 定理6.6和推论6.7见郭大钧〔15〕及孙经先〔1〕。这两个结论揭示了超线性算子特征值的全局结构特点。

定理6.9是郭大钧〔8〕给出的.定理6.10和定理6.12是孙经先〔1〕证明的，其证明思想可以追溯到郭大钧〔12〕。

定理6.14是孙经先〔11〕、〔8〕获得的。这个定理在不假定(6.28)式成立的情况下，证明了超线性Hammerstein型积分方程正特征函数的存在性。类似的结果在其它文献中似乎还没有出现过。

关于超线性积分方程特征值和特征函数的其它结果，可见郭大钧〔1〕、〔22〕，孙经先〔11〕、〔12〕、〔20〕以及黄春潮〔1〕.

§7 非线性积分方程的特征值与特征函数

本节讨论非线性积分方程特征值与特征函数的存在性. 先考虑Урысон型积分方程

$$\varphi(x)=\lambda\int_G k(x,y,\varphi(y))dy=\lambda A\varphi(x). \qquad (7.1)$$

设G是R^N中的某有界闭域，$k(x,y,0)\equiv 0$.

定理7.1 设：(1)存在非负连续函数$k_1(x,y)$及$r_0>0$，使得对任给$x\in G$，$y\in G$，$0\leqslant u\leqslant r_0$，有

$$k(x,y,u)\geqslant k_1(x,y)u; \qquad (7.2)$$

(2)由(7.1)式定义的Урысон型积分算子A映$C(G)$入$C(G)$全连续；

(3)由$K_1\varphi=\int_G k(x,y)\varphi(y)dy$定义的线性算分算子$K_1$映$C(G)$入$C(G)$全连续，并且$K_1$的谱半径$r(K_1)\neq 0$；则对任给$0<r\leqslant r_0$，都存在$\varphi_r(x)\in C(G)$，$\varphi_r(x)\geqslant 0$，$\lambda_r>0$，使得$\|\varphi_\lambda\|=r$，$\varphi_r=\lambda_r A\varphi_r$.

证 取$a\geqslant r^{-1}(K_1)$，$B_r=\{\varphi\in C(G)\mid\|\varphi\|<r\}$，$P=\{\varphi\in C(G)\mid\varphi(x)\geqslant 0\}$.不失一般性，可设$aA$在$\partial B_r\cap P$上没有不动点（否则定理的结论自然成立）.下证

$$\deg(I-aA,B_r\cap P,0;P)=0. \qquad (7.3)$$

事实上，若令$B\varphi\equiv r^{-1}(K_1)K_1\varphi$，则$r(B)=1$，并且对

任给$\varphi\in\partial B_r\cap P$，有

$$aA\varphi\geqslant B\varphi$$

显然$B:C(G)\to C(G)$是全连续线性算子，故由定理2.5可知，存在$\varphi^*\in P\backslash\{\theta\}$，使$B\varphi^*=\varphi^*$. 于是根据推论1.21知(7.3)式成立. 但另一方面，显然

$$\deg(I,B_r\cap P,0;P)=1. \tag{7.4}$$

因此，若令$h(t,x)=x-taAx$，则由(7.3)、(7.4)两式，利用同伦不变性可知：必存在$0<t_0<1$及$\varphi_r\in\partial B_r\cap P$，使$h(t_0,\varphi_r)=0$，即$\varphi_r=t_0aA\varphi_r$. 令$\lambda_r=t_0a$. 即知定理的结论成立. 证完.

把定理7.1应用于Hammerstein型积分方程

$$\varphi(x)=\lambda\int_G k(x,y)f(y,\varphi(y))dy=\lambda A\varphi, \tag{7.5}$$

可以得到下列结论：

定理7.2 设：(1)$k(x,y)$非负，以$k(x,y)$为核的线性积分算子K映$C(G)$入$C(G)$全连续，并且K的谱半径$r(K)\neq 0$；

(2)存在$\delta>0$，$r_0>0$，使得当$x\in G$，$0\leqslant u\leqslant r_0$时，$f(x,u)$连续，$f(x,0)\equiv 0$，并且

$$f(x,u)\geqslant\delta u\quad(x\in G,0\leqslant u\leqslant r_0); \tag{7.6}$$

则对任给$0<r\leqslant r_0$，都存在$\varphi_r(x)\in C(G)$，$\varphi_r(x)\geqslant 0$，$\lambda_2>0$，使得$\|\varphi_r\|=r$，$\varphi_r=\lambda_r A\varphi_r$.

在许多情况下，定理7.2的主要条件(7.6)式不能满足，例如当$f(x,u)=u^2$时. 下面对(7.6)式不满足的情况进行讨论.

定理7.3 设：(1)$k(x,y)$在$G\times G$上非负连续，并存在$\varepsilon_0>0$，使对任给$y\in G$，$z\in G$，有

$$\int_G k(x,y)dx\geqslant\varepsilon_0 k(z,y); \tag{7.7}$$

（2）对任给$y\in IntG$（$IntG$表G的内点集），有

$$\int_G k(x,y)dx>0\;; \tag{7.8}$$

（3）$f(x,0)\equiv 0$，当$x\in G$, $0\leqslant u<\delta(\delta>0)$时$f(x,u)$连续，并且当$x\in G$, $0<u<\delta$时$f(x,u)>0$；
则对任给$0<r<\delta$,都存在$\lambda>0$，$\varphi_\lambda(x)\in C(G)$，$\varphi_\lambda(x)\geqslant 0$，$\|\varphi_\lambda\|=r$,使$\varphi_\lambda(x)=\lambda A\varphi_\lambda(x)$。

证 设$0<r<\delta$给定。令

$$P_1=\left\{\varphi\in C(G)\,\middle|\,\varphi(x)\geqslant 0\,,\ \int_G\varphi(x)dx\geqslant\varepsilon_0\|\varphi\|\right\}, \tag{7.9}$$

则显然P_1是$C(G)$中的一个锥，令$S_r=\{\varphi\in C(G)\,|\,\|\varphi\|=r\}$，则当$\varphi\in S_r\cap P_1$时

$$\int_G A\varphi(x)dx=\int_G f(y,\varphi(y))dy\int_G k(x,y)dx$$

$$\geqslant\varepsilon_0\int_G k(z,y)f(y,\varphi(y))dy \quad （对任给z\in G）。$$

因此，

$$\int_G A\varphi(x)dx\geqslant\varepsilon_0\|A\varphi\|, \tag{7.10}$$

故$A\varphi\in P_1$。由此可知$A(S_r\cap P_1)\subset P_1$。在（7.10)式中，令$\varphi(x)=\varphi_0(x)\equiv r(x\in G)$，得

$$\|A\varphi_0\|\mathrm{mes}G\geqslant\int_G A\varphi_0(x)dx\geqslant\varepsilon_0\|A\varphi_0\| \tag{7.11}$$

由条件(3)及(7.8)式知

$$\int_G A\varphi_0(x)dx=\int_G\int_G k(x,y)f(x,u)dxdy>0\,,$$

从而$\|A\varphi_0\|>0$。故由(7.11)式可得

$$\mathrm{mes}G\geqslant\varepsilon_0。 \tag{7.12}$$

取ε_1，使

$$0<\varepsilon_1<\frac{\varepsilon_0 r}{\text{mes}G}. \tag{7.13}$$

由(7.12)式知$\varepsilon_1<r$. 任取$\varphi\in S_r\cap P_1$，令$G_1=\{x\in G\mid\varphi(x)\geqslant\varepsilon_1\}$，则有

$$\int_G\varphi(x)dx=\int_{G_1}\varphi(x)dx+\int_{G\setminus G_1}\varphi(x)dx$$

$$\leqslant r\,\text{mes}G_1+\varepsilon_1(\text{mes}G-\text{mes}G_1). \tag{7.14}$$

由于$\varphi\in P_1$，故$\int_G\varphi(x)dx\geqslant\varepsilon_0\|\varphi\|=\varepsilon_0 r$，故由(7.14)式可得

$$\text{mes}G_1\geqslant\frac{\varepsilon_0 r-\varepsilon_1\text{mes}G}{r-\varepsilon_1}>0. \tag{7.15}$$

取$\varepsilon_2>0$，使

$$\text{mes}(G\setminus G_2)<\frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon_0 r-\varepsilon_1\text{mes}G}{r-\varepsilon_1}\right), \tag{7.16}$$

其中$G_2=\{x\in G\mid d(x,\partial G)\geqslant\varepsilon_1\}$($d(x,\partial G)$表$x$到$\partial G$的距离).令$G_0=G_1\cap G_2$.由(7.15)、(7.16)两式易知

$$\text{mes}G_0>\frac{\varepsilon_0 r-\varepsilon_1\text{mes}G}{2(r-\varepsilon_1)}. \tag{7.17}$$

由于G_2是有界闭集，并且$G_2\subset\text{I}_\text{n}\text{t}G$，故由条件(2)知有

$$m=\min_{y\in G_2}\int_G k(x,y)dx>0.$$

令$\eta_0=\min\limits_{\varepsilon_1\leqslant u\leqslant r}f(x,u)>0$.于是，由(7.17)式知

$$\|A\varphi\|\text{mes}G\geqslant\int_G A\varphi(x)dx$$

$$\geqslant\int_{G_0}f(y,\varphi(y))dy\int_G k(x,y)dx$$

$$\geqslant\eta_0 m\cdot\text{mes}G_0>\frac{\eta_0 m(\varepsilon_0 r-\varepsilon_1\text{mes}G)}{2(r-\varepsilon_1)}. \tag{7.18}$$

由(7.18)式即可知

$$\inf_{\varphi \in S_r \cap P_1} \|A\varphi\| > 0 .$$

根据定理1.24即知本定理结论成立.证完.

定理7.4 设定理7.3的条件(1)、(2)成立. 设$f(x,0)\equiv 0$，当$x\in G, u\geqslant 0$时$f(x,u)$非负连续，并存在$R>0$，使当$x\in G, u>R$时$f(x,u)>0$.则对任何$r>\frac{1}{\varepsilon_0}R\,\mathrm{mes}G$，都存在$\lambda>0$，$\varphi_\lambda(x)\in C(G)$，$\varphi_\lambda(x)\geqslant 0$，$\|\varphi_\lambda\|=r$，使$\varphi_\lambda(x)=\lambda A\varphi_\lambda(x)$.

证 证明与定理7.3的证明完全类似，只需将(7.13)式换为：取ε_1，使

$$R<\varepsilon_1<\frac{\varepsilon_0 r}{\mathrm{mes}G}.$$

证完.

定理7.3和定理7.4的意义在于对$f(x,u)$，不要求(7.6)式成立.但是在定理7.3和定理7.4中，对$k(x,y)$的要求比定理7.2严格.

上面几个定理都要求$k(x,y)$非负.下面将讨论$k(x,y)$是变号核的情况.先证明一个一般结论.

定理7.5 设h是$C(G)$上的有界线性泛函，实数$r>0$满足$M_r=\{\varphi\in C(G)\mid h(\varphi)=1，\|\varphi\|\leqslant r\}\neq\Phi$，$A: M_r\to C(G)$是一个全连续算子.设：

(1)对任给$\varphi\in M_r$，有

$$h(A\varphi)>0, \|A\varphi\|\leqslant rh(A\varphi); \tag{7.19}$$

(2)对任给$\varphi\in M_r$，$x_1,x_2\in G$,

$$|A\varphi(x_1)-A\varphi(x_2)|\leqslant\omega(x_1,x_2)h(A\varphi), \tag{7.20}$$

其中$\omega(\cdot,\cdot): G\times G\to R^+$满足($d(\cdot,\cdot)$表两点间的距离)

$$\lim_{d(x_1,x_2)\to 0}\omega(x_1,x_2)=0. \tag{7.21}$$

则必存在$\lambda_0>0$，$\varphi_0\in M_r$，使$\varphi_0=\lambda A\varphi_0$。

证 显然，M_r是$C(G)$中的有界凸闭集．定义算子B如下：

$$B\varphi=[h(A\varphi)]^{-1}A\varphi. \tag{7.22}$$

显然$B:M_r\to C(G)$连续，并且对任给$\varphi\in M_r$，有$h(B\varphi)=1$，$\|B\varphi\|\leqslant r$．于是

$$B(M_r)\subset M_r. \tag{7.23}$$

对任意的$\varphi\in M_r$和$x_1,x_2\in G$，

$$|B\varphi(x_1)-B\varphi(x_2)|=[h(A\varphi)]^{-1}|A\varphi(x_1)-A\varphi(x_2)|$$
$$\leqslant\omega(x_1,x_2).$$

由条件(2)知，$B(M_r)$是等度连续的．根据Ascoli-Arzela定理，$B(M_r)$是$C(G)$中的相对紧集，从而B是M_r上的全连续算子．由(7.23)式，根据Schaudr不动点定理，存在$\varphi_0\in M_r$，使得$\varphi_0=[h(A\varphi_0)]^{-1}A\varphi_0$．令$\lambda=h(A\varphi_0)$，即知定理结论成立．证完．

定理7.5可以用来研究具有变号核的非线性Hammerstein型积分方程(7.5)的特征值与特征函数的性质．

定理7.6 设：(1)$k(x,y)$在$G\times G$上连续（不要求非负），并且存在$x_0\in G$，使得对任给$y\in G$，有

$$k(x_0,y)\neq 0; \tag{7.24}$$

(2)$f(x,0)\equiv 0$，$f(x,u)$在$G\times(-\infty,+\infty)$上非负连续，并且存在$u_0\neq 0$，使得

$$f(x_0,u_0)>0. \tag{7.25}$$

则存在$\lambda>0$，$\varphi_\lambda\in C(G)$，使得$\varphi_\lambda=\lambda A\varphi_\lambda$，并且$\varphi_\lambda(x_0)=u_0$。

证 先设$u_0>0$．令$h(\varphi)=u_0^{-1}\varphi(x_0)$，则$h$显然是$C(G)$上的有界线性泛函．令$m=\max\limits_{x,\,y\in G}|k(x,y)|$．由(7.24)式及$k(x,y)$的连续性知，$k(x_0,y)$对$y\in G$不变号．不失一般性，可设$k(x_0,y)$

$>0\ (\forall y\in G)$.由于G是紧集，故$\varepsilon_0=\min\limits_{y\in G}k(x_0,y)>0$．取$r=mu_0\varepsilon_0^{-1}$.由$m$及$\varepsilon_0$的定义知，$m\varepsilon_0^{-1}\geqslant 1$，故$r\geqslant u_0$．令$M_r=\{\varphi\in C(G)\,|\,h(\varphi)=1,\|\varphi\|\leqslant r\}$．注意到若取$\varphi_0(x)\equiv u_0$，则有$\varphi_0\in M_r$，故$M_r\neq\Phi$.对任给$\varphi\in M_r$，

$$
\begin{aligned}
h(A\varphi)&=u_0^{-1}\int_G k(x_0,y)f(y,\varphi(y))dy\\
&\geqslant u_0^{-1}\varepsilon_0\int_G f(y,\varphi(y))dy. \qquad (7.26)
\end{aligned}
$$

由$\varphi\in M_r$知，$h(\varphi)=1$即$u_0^{-1}\varphi(x_0)=1$.于是$\varphi(x_0)=u_0$. 故由$f(x,u)$的非负连续性和(7.25)、(7.26)两式知，对任给$\varphi\in M_r$，有

$$h(A\varphi)>0. \qquad (7.27)$$

由(7.26)式知，对任给$\varphi\in M_r$，有

$$\int_G f(y,\varphi(y))dy\leqslant u_0\varepsilon_0^{-1}h(A\varphi), \qquad (7.28)$$

因此，对任给$\varphi\in M_r$，有

$$
\begin{aligned}
\|A\varphi\|&=\sup_{x\in G}\left|\int_G k(x,y)f(y,\varphi(y))dy\right|\\
&\leqslant\sup_{x\in G}\int_G|k(x,y)|f(y,\varphi(y))dy\\
&\leqslant m\int_G f(y,\varphi(y))dy\leqslant rh(A\varphi). \qquad (7.29)
\end{aligned}
$$

由(7.28)式又知，对任给$\varphi\in M_r,x_1\in G,x_2\in G$，有

$$
\begin{aligned}
&|A\varphi(x_1)-A\varphi(x_2)|\\
&\leqslant\int_G|k(x_1,y)-k(x_2,y)|f(y,\varphi(y))dy\\
&\leqslant\sup_{y\in G}|k(x_1,y)-k(x_2,y)|\int_G f(y,\varphi(y))dy\\
&\leqslant u_0\varepsilon_0^{-1}\sup_{y\in G}|k(x_1,y)-k(x_2,y)|h(A\varphi) \qquad (7.30)
\end{aligned}
$$

因为$k(x,y)$在$G\times G$上一致连续，故由(7.30)式可知，定理

7.5的条件(3)满足.因此，根据定理7.5易知定理7.6的结论成立.

当$u_0<0$时，证明完全类似，从略.证完.

注7.7 由定理7.6的证明可以知道，当$u_0k(x_0,y)>0$时，A有正特征值，当$u_0k(x_0,y)<0$时，A有负特征值.

注7.8 在定理7.6的条件下，可以得到下列更强的结论：存在包含u_0的区间(a,b)，使对任给$u\in(a,b)$，都存在A的特征元φ_u，满足$\varphi_u(x_0)=u$.这是因为由(7.25)式及$f(x,u)$的连续性可知，必存在包含u_0的区间(a,b)，使对任意的$u\in(a,b)$，都有$f(x_0,u)>0$.因此，可以用任意的$u\in(a,b)$,代替定理7.6证明中的u_0，从而可知存在A的特征元φ_u，满足$\varphi_u(x_0)=u$. 所以，在定理7.6的条件下，A的特征元集合具有连续统的势.

定理7.9 设：(1)$k(x,y)$在$G\times G$上连续（不要求非负），并存在$x_i\in G$，$a_i\neq 0\ (i=1,2,\cdots,n)$，使得

$$\sum_{i=1}^{n}a_ik(x_i,y)\neq 0 \qquad (\forall y\in G)\ ;$$

(2)$f(x,0)\equiv 0$，$f(x,u)$在$G\times(-\infty,+\infty)$上非负连续，并且对任给$x\in G,u\neq 0$，都有

$$f(x,u)>0 .$$

则A的特征值集合具有连续统的势，并且对任给$u>0$，都存在A的特征元φ_u，使

$$\sum_{i=1}^{n}a_i\varphi_u(x_i)=u.$$

证 对任给$\varphi\in C$，定义

$$h(\varphi)=u^{-1}\sum_{i=1}^{n}a_i\varphi(x_i),$$

则h是C上的有界线性泛函，令

$M_r=\{\varphi\in C\,|\,h(\varphi)=1,\|\varphi\|\leqslant r\}$,

则易知当r充分大时（事实上只需取$r\geqslant u|a_i|^{-1}$即可）$M_r\neq\phi$. 于是，用与定理7.6相同的证明方法（并注意到注7.8），即可以证明定理7.9的结论成立.证完.

最后再介绍一个关于特征函数个数的结论.

定理7.10 设:（1）$k(x,y)$在$G\times G$上非负连续，并且$k(x,x)\not\equiv 0\ (x\in G)$;

（2）$f(x,u)$在$G\times R^+$上连续、非负，$f(x,0)\equiv 0$，并且对$x\in G$，一致有

$$\lim_{u\to 0^+}\frac{f(x,u)}{u}=0, \tag{7.31}$$

$$\lim_{u\to +\infty}\frac{f(x,u)}{u}=0, \tag{7.32}$$

$$\underline{\lim}_{u\to +\infty} f(x,u)>0; \tag{7.33}$$

则对任给$N>0$，存在$\sigma>0$，使对任给$\lambda>\sigma$，方程(7.5)至少有两个对应于λ的非负连续特征函数$\varphi_\lambda^{(1)}(x)$和$\varphi_\lambda^{(2)}(x)$，并且$\max\limits_{x\in G}\varphi_\lambda^{(1)}(x)>N$.

证 任给$N>0$.由条件(7.33)式知：存在$\eta>0$，$u_0>N$，使当$u\geqslant u_0$时，有

$$f(x,u)\geqslant\eta. \tag{7.34}$$

由条件（1）知，存在$\tau>0$及G中某小闭球$T=\{x\in G\,|\,|x-x_0|\leqslant\delta\}$，使得当$x\in T$，$y\in T$时，有

$$k(x,y)\geqslant\tau. \tag{7.35}$$

令$\sigma=\dfrac{u_0}{\tau\eta\,\mathrm{mes}T}$，下证此$\sigma$即符合要求.给定$\lambda>\sigma$，考察算子

$$A_\lambda \varphi=\lambda\int_G k(x,y)f(y,|\varphi(y)|)dy. \tag{7.36}$$

显然A_λ映$C(G)$入$C(G)$全连续．由（7.32）式知，存在$b>0$，使当$u\geqslant b$时，有$f(x,u)\leqslant\frac{u}{2\lambda\|K\|}$，其中$\|K\|$是映$C(G)$入$C(G)$的线性积分算子$K\varphi=\int_G k(x,y)\varphi(y)dy$的范数、令$\beta=\max\limits_{0\leqslant u\leqslant b} f(x,u)$，则显然对一切$u\geqslant 0$，有

$$0\leqslant f(x,u)\leqslant\frac{u}{2\lambda\|K\|}+\beta. \tag{7.37}$$

取$R>\max\{u_0,2\lambda\beta\|K\|\}$，由(7.31)式知，存在$0<r<u_0$，使

$$0\leqslant f(x,u)\leqslant\frac{u}{2\lambda\|K\|} \qquad (0\leqslant u\leqslant r). \tag{7.38}$$

令 $\Omega_1=\{\varphi\in C(G)\,|\,\|\varphi\|<r\}$，$\Omega_2=\{\varphi\in C(G)\,|\,\|\varphi\|<R,\ \min\limits_{x\in T}\varphi(x)>u_0\}$，$\Omega_3=\{\varphi\in C(G)\,|\,\|\varphi\|<R\}$．易知$\Omega_1,\Omega_2,\Omega_3$都是有界凸开集，并且

$$\Omega_1\subset\Omega_3,\Omega_2\subset\Omega_3,\Omega_1\cap\Omega_2=\Phi. \tag{7.39}$$

由(7.36)、(7.38)两式可知，当$\varphi\in\overline{\Omega}_1$时，有

$$\|A_\lambda\varphi\|\leqslant\lambda\|K\|\cdot\frac{1}{2\|K\|\lambda}\cdot\|\varphi\|=\frac{1}{2}\|\varphi\|\leqslant\frac{r}{2}<r,$$

所以，

$$A_\lambda(\overline{\Omega}_1)\subset\Omega_1. \tag{7.40}$$

当$\varphi\in\overline{\Omega}_3$时，由(7.36)、(7.37)两式可知

$$\|A_\lambda\varphi\|\leqslant\lambda\|K\|\left(\frac{1}{2\lambda\|K\|}\|\varphi\|+\beta\right)=\frac{1}{2}\|\varphi\|+\beta\lambda\|K\|<R,$$

所以

$$A_\lambda(\overline{\Omega}_3)\subset\Omega_3. \tag{7.41}$$

当$\varphi\in\overline{\Omega}_2$时，由(7.34)、(7.35)、(7.36)诸式可知

$$\min_{x\in T} A_\lambda\varphi(x)=\min_{x\in T}\lambda\int_G k(x,y)f(y,|\varphi(y)|)dy$$
$$\geqslant\min_{x\in T}\lambda\int_T k(x,y)f(y,|\varphi(y)|)dy$$
$$\geqslant\lambda\tau\eta\,\mathrm{mes}T>u_0 \tag{7.42}$$

由(7.41)、(7.42)两式知

$$A_\lambda(\overline{\Omega}_2)\subset\Omega_2. \tag{7.43}$$

因此，由(7.40)、(7.41)、(7.43)三式，并根据附录定理2.6，有

$$\deg(I-A_\lambda,\Omega_i,0)=1\quad(i=1,2,3) \tag{7.44}$$

于是，A_λ在Ω_2中有不动点$\varphi_\lambda^{(1)}$.由(7.36)式可知$\varphi_\lambda^{(1)}(x)\geqslant0$，从而$\varphi_\lambda^{(1)}(x)$是方程(7.5)的解，并且

$$\max_{x\in G}\varphi_\lambda^{(1)}(x)\geqslant\min_{x\in T}\varphi_\lambda^{(1)}(x)>u_0>N.$$

由(7.44)可知

$$\deg(I-A_\lambda,\Omega_3\backslash(\overline{\Omega}_1\cup\overline{\Omega}_2),0)=\deg(I-A_\lambda,\Omega_3,0)$$
$$-\deg(I-A_\lambda,\Omega_1,0)-\deg(I-A_\lambda,\Omega_2,0)=-1,$$

从而A_λ在$\Omega_3\backslash(\overline{\Omega}_1\cup\overline{\Omega}_2)$中至少有一不动点$\varphi_\lambda^{(2)}(x)$. 由(7.36)式知，$\varphi_\lambda^{(2)}(x)\geqslant0$，并且$\varphi_\lambda^{(2)}(x)$是方程(7.5)的解. 显然$\varphi_\lambda^{(2)}(x)\not\equiv\varphi_\lambda^{(1)}(x)$，$\varphi_\lambda^{(2)}(x)\not\equiv0$.证完.

附注 定理7.1和定理7.2本质上由M.A.Красносельский〔1〕给出，但其所给出的证明比较复杂. 这里的证明是郭大钧〔17〕给出的.

定理7.3、定理7.4和定理7.10是郭大钧〔17〕、〔18〕获得的.定理7.5、7.6及7.9是白锦东〔1〕证明的.

关于非线性积分方程特征值与特征函数的其它讨论，见白锦东〔3〕、〔5〕，J.Cronin〔1〕,S.Karlin〔1〕,R.W.Legget和L.R.Willams〔4〕.

§8 非线性积分方程组非平凡解的存在性

由于实际问题（如二阶常微分方程两点边值问题）的需要，要求人们研究Hammerstein型非线性积分方程组

$$\begin{cases} \varphi(x)=\int_G k_1(x,y)f_1(\varphi(y),\psi(y))dy \\ \psi(x)=\int_G k_2(x,y)f_2(\varphi(y),\psi(y))dy \end{cases} \tag{8.1}$$

非平凡解的存在性.在本节中，设G是R^N中的有界闭集.为简便计，设$\text{mes}G=1$.

令

$$A_1(\varphi,\psi)(x)=\int_G k_1(x,y)f_1(\varphi(y),\psi(y))dy, \tag{8.2}$$

$$A_2(\varphi,\psi)(x)=\int_G k_2(x,y)f_2(\varphi(y),\psi(y))dy \tag{8.3}$$

$$A(\varphi,\psi)=(A_1(\varphi,\psi),A_2(\varphi,\psi)). \tag{8.4}$$

在本节中，我们使用下列假设

1° $k_1(x,y)$在$G\times G$上非负连续，$k_2(x,y)$在$G\times G$上（除$x=y$的点外）有界连续；

2°存在$\alpha\in(0,1)$，使对任给$z,y\in G$，有

$$g(y)=\int_G k_1(x,y)dx\geqslant\alpha k_1(z,y), \tag{8.5}$$

并且对几乎所有的$y\in G$，有$g(y)>0$.

3°存在$\beta>0$，使对任给$y\in G$，有

$$\int_G|k_2(x,y)|dx\leqslant\beta\int_G k_1(x,y)dx; \tag{8.6}$$

4°存在$\gamma>0$，使对任给$x,y\in G$，有

$$|k_2(x,y)|\leqslant\gamma\int_G k_1(z,y)dz; \tag{8.7}$$

5°$f_1(u,v)$和$f_2(u,v)$ 分别在$[0,+\infty)\times(-\infty,+\infty)$上连续，并且对任给$(u,v)\in[0,+\infty)\times(-\infty,+\infty)$，有

$$f_1(u,v)\geqslant|f_2(u,v)|; \tag{8.8}$$

6°存在$[0,+\infty)$上的非负连续函数$\eta(u)$、$\xi(u)$及$v_0>0$，使对任给$u\in[0,+\infty)$，$|v|\geqslant v_0$，有

$$f_1(u,v)\leqslant\eta(u)+\xi(u)|v|. \tag{8.9}$$

引理8.1 设假设1°、2°、3°、5°、6°满足，则对任意的$\varphi\in C(G)$，$\varphi(x)\geqslant 0$，$\psi\in L(G)$，有

(i)$\|A_1(\varphi,\psi)\|_L\geqslant\alpha\|A_1(\varphi,\psi)\|_C$;

(ii)$\|A_2(\varphi,\psi)\|_L\leqslant\beta\|A_1(\varphi,\psi)\|_L$.

证 由假设5°、6°知对任给$\varphi\in C(G)$，$\varphi(x)\geqslant 0$，$\psi\in L(G)$，有$A_1(\varphi,\psi)\in L(G)$，$A_2(\varphi,\psi)\in L(G)$.利用假设2°可知，对任给$z\in G$，

$$\|A_1(\varphi,\psi)\|_L=\int_G\int_G k_1(x,y)f_1(\varphi(y),\psi(y))dydx$$

$$\geqslant\alpha\int_G k_1(z,y)f_1(\varphi(y),\psi(y))dy=\alpha A_1(\varphi,\psi)(z), \tag{8.10}$$

由于(8.10)式对任给$z\in G$成立，故(i)获证。

利用(8.6)、(8、8)两式可得

$$\|A_2(\varphi,\psi)\|_L=\int_G\left|\int_G k_2(x,y)f_2(\varphi(y),\psi(y))dy\right|dx$$

$$\leqslant\int_G|f_2(\varphi(y),\psi(y))|dy\int_G|k_2(x,y)|dx$$

$$\leqslant\beta\int_G f_1(\varphi(y),\psi(y))dy\int_G k_1(x,y)dx$$

$$=\beta\|A_1(\varphi,\psi)\|_L. \tag{8.11}$$

(ii)获证.证完.

令

$$P_1=\{(\varphi(x),\psi(x))\in C(G)\times L(G)\,|\,\varphi(x)\geq 0,$$
$$\|\varphi\|_L\geq\alpha\|\varphi\|_C,\|\psi\|_L\leq\beta\|\varphi\|_L\} \tag{8.12}$$

则易知P_1是$C(G)\times L(G)$中的锥

定理8.2 设假设1°、2°、3°、5°、6°满足. 又设对$v\in(-\infty,+\infty)$,一致成立

$$\lim_{u+|u|\to+\infty}\frac{f_1(u,v)}{u+|u|}=0, \tag{8.13}$$

$$\lim_{u\to 0^+}\frac{f_1(u,v)}{u}=+\infty. \tag{8.14}$$

则方程组(8.1)在P_1中至少有一个非零解.

证 由引理8.1及假设1°、5°易知, A是映P_1入P_1的全连续算子.取$M=\sup\limits_{x,\,y\in G}k_1(x,y)$,

$$0<\varepsilon<[M(1+\beta)]^{-1};$$

再由(8.13)式知, 可取$u_0>0$,使当$u+|v|\geq u_0$时, 有

$$f_1(u,v)<\varepsilon(u+|v|). \tag{8.15}$$

令$m=\sup\limits_{0\leq u+|v|\leq u_0}f_1(u,v)$, 取

$$R=\max\{u_0,1+Mm[1-\varepsilon M(1+\beta)]^{-1}\}, \tag{8.16}$$

令$\Omega_1(P_1)=\{(\varphi,\psi)\in P_1\,|\,\|\varphi\|_C<R\}$,则由 8.12 式易知$\Omega_1(P_1)$是$P_1$中的有界开集.用$\partial\Omega_1(P_1)$表示 $\Omega_1(P_1)$相对于P_1的边界, 则显然对任给$(\varphi,\psi)\in\partial\Omega_1(P_1)$, 有$\|\varphi\|_C=R$.

任给$(\varphi,\psi)\in\partial\Omega_1(P_1)$, 令

$$G_1=\{x\in G\,|\,\varphi(x)+|\psi(x)|\leq u_0\}.$$

则由(8.15)、(8.12)、(8.16)式可得

88.003 四

$$A_1(\varphi,\psi)(x)=\int_G k_1(x,y)f_1(\varphi(y),\psi(y))dy$$

$$=\int_{G_1} k_1(x,y)f_1(\varphi(y),\psi(y))dy$$

$$+\int_{G\setminus G_1} k_1(x,y)f_1(\varphi(y),\psi(y))dy$$

$$\leqslant Mm+\varepsilon M(\|\varphi\|_C+\|\varphi\|_L)$$

$$\leqslant Mm+\varepsilon M(1+\beta)\|\varphi\|_C=Mm+\varepsilon M(1+\beta)R$$

$$<R=\|\varphi\|_c,\quad \forall x\in G. \tag{8.17}$$

因此，

$$A(\varphi,\psi)\overline{\geqslant}(\varphi,\psi),\quad \forall(\varphi,\psi)\in\partial\Omega_1(P_1). \tag{8.18}$$

取定$\mu\in(0,\alpha)$。对任给$(\varphi,\psi)\in P_1$，令$G_\varphi=\{x\in G|\varphi(x)\geqslant u\|\varphi\|_C\}$，则由

$$\alpha\|\varphi\|_C\leqslant\|\varphi\|_L=\int_G\varphi(x)dx=\int_{G_\varphi}\varphi(x)dx+\int_{G\setminus G_\varphi}\varphi(x)dx$$

$$\leqslant\|\varphi\|_C\mathrm{mes}G_\varphi+\mu\|\varphi\|_C$$

可知，$\mathrm{mes}G_\varphi\geqslant\alpha-\mu$。由假设2°知，可取$\tau>0$，使

$$\mathrm{mes}G_g\geqslant 1-\frac{\alpha-\mu}{2}, \tag{8.19}$$

其中$G_g=\{x\in G|g(x)\geqslant\tau\}$。由(8.14)式知，存在$r\in(0,R)$，使当$0\leqslant u\leqslant r$时，有

$$f_1(u,v)\geqslant\delta u, \tag{8.20}$$

其中$\delta>\dfrac{2}{\tau\mu(\alpha-\mu)}$是一常数。令$\Omega_2(P_1)=\{(\varphi,\psi)\in P_1|\|\varphi\|_C<r\}$，则$\Omega_2(P_1)$是$P_1$中的有界开集，并且当$(\varphi,\psi)\in\partial\Omega_2(P_1)$时，有$\|\varphi\|=r$。于是，由(8.20)、(8.19)及$\mathrm{mes}G_\varphi\geqslant\alpha-\mu$，可知

$$\|A_1(\varphi,\psi)\|_C\geqslant\|A_1(\varphi,\psi)\|_L$$

$$=\int_G\int_G k_1(x,y)f_1(\varphi(y),\psi(y))dydx$$

$$=\int_G g(y)f_1(\varphi(y),\psi(y))dy$$

$$\geqslant\int_{G_\varphi\cap G_g} g(y)f_1(\varphi(y),\psi(y))dy$$

$$\geqslant\tau\delta\int_{G_\varphi\cap G_g}\varphi(y)dy\geqslant\tau\delta\mu\|\varphi\|_C\cdot\frac{\alpha-\mu}{2}>\|\varphi\|_C.$$

因此,

$$A(\varphi,\psi)\overline{\leqslant}(\varphi,\psi),\quad \forall(\varphi,\psi)\in\partial\Omega_2(P_1). \tag{8.21}$$

由(8.18)、(8.21)两式，并根据附录定理2.18可知，方程组(8.1)在P_1中必定有非平凡解.证完.

引理8.3 设假设1°、2°、4°、5°满足，则对任给$\varphi\in C(G)$，$\varphi(x)\geqslant 0$及$\psi\in C(G)$，有

(i) $\|A_1(\varphi,\psi)\|_L\geqslant\alpha\|A_1(\varphi,\psi)\|_C$;

(ii) $\|A_2(\varphi,\psi)\|_C\leqslant\gamma\|A_1(\varphi,\psi)\|_L$.

证 (i)证明同引理8.1.下仅需证(ii).事实上，由假设4°.5°可知

$$\left|\int_G k_2(x,y)f_2(\varphi(y),\psi(y))dy\right|$$

$$\leqslant\int_G|k_2(x,y)||f_2(\varphi(y),\psi(y))|dy$$

$$\leqslant\gamma\int_G\int_G k_1(z,y)f_1(\varphi(y),\psi(y)dydz$$

$$=\gamma\|A_1(\varphi,\psi)\|_L. \tag{8.22}$$

由于(8.22)式对任给$x\in G$成立，故(ii)获证.证完.

令

$$P_2=\{(\varphi(x),\psi(x))\in C(G)\times C(G)\,|\,\varphi(x)\geqslant 0,\ \|\varphi\|_L\geqslant\alpha\|\varphi\|_C,\|\psi\|_C\leqslant\gamma\|\varphi\|_L\}, \tag{8.23}$$

则显然P_2是$C(G)\times C(G)$中的锥.

定理8.4 设假设1°、2°、4°、5°成立，又设对$v\in(-\infty,+\infty)$一致成立

$$\lim_{u+|v|\to 0^+}\frac{f_1(u,v)}{u+|v|}=0, \tag{8.24}$$

$$\lim_{u\to+\infty}\frac{f_1(u,v)}{u}=+\infty. \tag{8.25}$$

则方程组(8.1)在P_2中必定有非零解.

证 由引理8.3及假设1°、5°可知，A是映P_2入P_2的全连续算子. 取$\varepsilon>0$，使$\varepsilon<[M(1+\gamma)]^{-1}$. 由(8.24)式知，存在$u_0>0$，使当$u+|v|\leqslant u_0$时

$$f_1(u,v)<\varepsilon(u+|v|). \tag{8.26}$$

取r，使$0<r<\dfrac{u_0}{1+\gamma}$. 令$\Omega_1(P_2)=\{(\varphi,\psi)\in P_2\mid\|\varphi\|_C<r\}$，则当$(\varphi,\psi)\in\partial\Omega_1(P_2)$时，有$\|\varphi\|_C=r$，并且

$$\varphi(x)+|\psi(x)|\leqslant\|\varphi\|_C+\|\psi\|_C\leqslant(1+\gamma)\|\varphi\|_C<u_0.$$

于是由(8.26)式知

$$\begin{aligned}A_1(\varphi,\psi)(x)&=\int_G k_1(x,y)f_1(\varphi(y),\psi(y))dy\\&<\varepsilon\int_G k_1(x,y)(\varphi(y)+|\psi(y)|)dy\\&\leqslant\varepsilon M(1+\gamma)\|\varphi\|_C<\|\varphi\|_C,\quad \forall x\in G.\end{aligned}$$

从而

$$A(\varphi,\psi)\overline{\geqslant}(\varphi,\psi),\quad \forall(\varphi,\psi)\in\partial\Omega_1(P_2), \tag{8.27}$$

取$\gamma,G_\varphi,\tau,G_\varepsilon$同定理8.2的证明，则$\mathrm{mes}G_\varphi\geqslant\alpha-u$，并且(8.19)式仍成立. 由(8.25)式知，必存在$R_1>0$，$b>0$，使当$\gamma\geqslant R_1$时

$$f_1(u,v)\geqslant N\gamma-b \tag{8.28}$$

其中$N>\frac{4}{\tau\mu(a-\mu)}$是一个常数．取

$$R=\max\left\{r+1, b\int_G g(y)dy+1, R_1\right\}, \tag{8.29}$$

令$\Omega_2(P_2)=\{(\varphi,\psi)\in P_2 \mid \|\varphi\|_C<R\}$，则对任给$(\varphi,\psi)\in\partial\Omega_2(P_2)$，有

$$\begin{aligned}
&\|A_1(\varphi,\psi)\|_C\geqslant\|A_1(\varphi,\psi)\|_L\\
&=\int_G\int_G k_1(x,y)f_1(\varphi(y),\psi(y))dydx\\
&=\int_G g(y)f_1(\varphi(y),\psi(y))dy\\
&\geqslant\int_{G_\varphi\cap G_g} g(y)f_1(\varphi(y),\psi(y))dy\\
&\geqslant N\int_{G_\varphi\cap G_g} g(y)\varphi(y)dy-b\int_G g(y)dy\\
&\geqslant\tau N\mu\|\varphi\|_C\frac{a-u}{2}-b\int_G g(y)dy\\
&\geqslant 2\|\varphi\|-b\int_G g(y)dy\\
&=2R-b\int_G\varphi(y)dy>R=\|\varphi\|,
\end{aligned}$$

所以，

$$A(\varphi,\psi)\overline{\leqslant}(\varphi,\psi),\quad \forall(\varphi,\psi)\in\partial\Omega_2(P_2). \tag{8.30}$$

由(8.27)、(8.30)两式，并根据锥拉压不动点定理，即知方程组(8.1)在P_2中必定有非零解．证完．

附注 定理8.2和定理8.4是黄春潮、颜骏〔1〕中证明的．

除了本章各节中已经提到的文献外，与非线性积分方程多

重解有关的其它文献有：郭大钧和V.Lakshmikantham〔1〕、郭大钧〔34〕，H. Amann〔1〕、〔2〕、〔3〕，J.Berger和J. Robert〔1〕，T.Laetsch〔1〕，R.W.Legget和L.R. Williams〔1〕，〔2〕、〔3〕，S.V.Parter〔1〕，C.A.Stuart〔3〕、H.R.Thieme〔2〕等。

第六章　非线性积分方程的分歧理论

§1　非线性积分方程的歧点

设E是实Banach空间，Ω是E中的开集，$\theta\in\Omega$，A: $\Omega\to E$是一个算子，$A\theta=\theta$。考察方程

$$x=\lambda Ax, \tag{1.1}$$

其中 $\lambda\in R^1$，$x\in\Omega$。

定义1.1　设$\lambda_0\in R^1$。如果对任意给定的$\varepsilon>0$，都存在满足方程(1.1)的$(\lambda,x)\in R^1\times E$，使得

$$|\lambda-\lambda_0|<\varepsilon,\quad 0<\|x\|<\varepsilon, \tag{1.2}$$

则称λ_0是算子A的歧点

定理1.2　设A: $\Omega\to E$是全连续算子，$\theta\in\Omega$，$A\theta=\theta$，A在θ处有Frechet 导算子A_θ'。设Δ是R^1中的有界闭区间，A_θ'没有特征值属于Δ。则存在$\delta>0$，使得当$\lambda\in\Delta$，$0<\|x\|<\delta$时，有$x\neq\lambda Ax$。

证　因为A_θ'没有特征值属于Δ，故当$\lambda\in\Delta$，$\|x\|=1$时$\|x-\lambda A_\theta'x\|\neq 0$。由于$A_\theta'$是全连续线性算子，故易知存在$\alpha>0$，使

$$\inf_{\lambda\in\Delta,\ \|x\|=1}\|x-\lambda A_\theta'x\|\geqslant\alpha.$$

因此，对任给$x\in E$，$\lambda\in\Delta$，必有

$$\|x-\lambda A_\theta'x\|\geqslant\alpha\|x\|. \tag{1.3}$$

由A_θ'的定义及$A\theta=\theta$知，存在$\delta>0$，使当$\lambda\in\Delta$，$0<\|x\|<\delta$时，有

$$\|\lambda Ax-\lambda A'_\theta x\|\leqslant\frac{a}{2}\|x\|. \tag{1.4}$$

因此，当$\lambda\in\Delta$，$0<\|x\|<\delta$　时

$$\|x-\lambda Ax\|\geqslant\|x-\lambda A'_\theta x\|-\|\lambda Ax-\lambda A'_\theta x\|$$

$$\geqslant a\|x\|-\frac{a}{2}\|x\|=\frac{a}{2}\|x\|>0.$$

证完.

由上述定理，立即可以得到：

推论1.3　若λ_0是A的歧点，则λ_0是A'_θ的特征值.

设A: $\Omega\to E$是全连续算子，$\theta\in\Omega$，$A\theta=\theta$，A'_θ存在. 取λ_0是A'_θ的一个特征值. 由于A'_θ是全连续线性算子，故必存在$\varepsilon>0$，使A'_θ在$[\lambda_0-\varepsilon, \lambda_0+\varepsilon]$中没有异于$\lambda_0$的特征值.由定理1.2及拓扑度的同伦不变性易知，对任给$\lambda\in(\lambda_0-\varepsilon, \lambda_0)$，$\operatorname{ind}(I-\lambda A,\theta)$均存在且保持不变. 记

$$\gamma(\lambda_0-0)=\operatorname{ind}(I-\lambda A, \theta), \quad \lambda\in(\lambda_0-\varepsilon,\lambda_0). \tag{1.5}$$

同样，对任给$\lambda\in(\lambda_0,\lambda_0+\varepsilon)$，$\operatorname{ind}(I-\lambda A,\theta)$均存在且保持不变. 记

$$\gamma(\lambda_0+0)=\operatorname{ind}(I-\lambda A,\theta), \quad \lambda\in(\lambda_0,\lambda_0+\varepsilon). \tag{1.6}$$

如果$\operatorname{ind}(I-\lambda_0 A,\theta)$存在，则定义

$$\gamma(\lambda_0)=\operatorname{ind}(I-\lambda_0 A,\theta) \tag{1.7}$$

设λ_0是A'_θ的特征值. 如果下列三种情况之一种出现，则称λ_0是A在θ处的指数变换点：

(i) $\gamma(\lambda_0-0)\neq\gamma(\lambda_0+0)$;

(ii) $\gamma(\lambda_0)$存在，并且$\gamma(\lambda_0-0)\neq\gamma(\lambda_0)$;

(iii) $\gamma(\lambda_0)$存在，并且$\gamma(\lambda_0+0)\neq\gamma(\lambda_0)$.

定理1.4　设λ_0是A在θ处的指数变换点，则λ_0是A的歧点.

证 先证当$\gamma(\lambda_0-0)\neq\gamma(\lambda_0+0)$时，$\lambda_0$是$A$的歧点．任给$\varepsilon>0$，取$\tau$，使$0<\tau<\varepsilon$，并使在$[\lambda_0-\tau,\lambda_0+\tau]$中没有$A'_\theta$的异于$\lambda_0$的特征值．于是$\mathrm{ind}(I-(\lambda_0-\tau)A,\theta)$和$\mathrm{ind}(I-(\lambda_0+\tau)A,\theta)$都有定义．并且

$$\mathrm{ind}(I-(\lambda_0-\tau)A,\theta)\neq\mathrm{ind}(I-(\lambda_0+\tau)A,\theta).\tag{1.8}$$

显然，存在$0<r<\varepsilon$，使

$$\deg(I-(\lambda_0-\tau)A,B_r,\theta)=\mathrm{ind}(I-(\lambda_0-\tau)A,\theta),\tag{1.9}$$

$$\deg(I-(\lambda_0+\tau)A,B_r,\theta)=\mathrm{ind}(I-(\lambda_0+\tau)A,\theta),\tag{1.10}$$

其中$B_r=\{x\in E\,|\,\|x\|<r\}$．由(1.8)、(1.9)、(1.10)三式及拓扑度的同伦不变性知，必存在$\lambda^*\in(\lambda_0-\tau,\ \lambda_0+\tau)$，$x^*\in\partial B_r$，使$x^*=\lambda^*Ax^*$，其中$|\lambda^*-\lambda_0|<\tau<\varepsilon,\|x^*\|=r<\varepsilon$．由于$\varepsilon$的任意性，故知$\lambda_0$是$A$的歧点

把上述证明中的$\gamma(\lambda_0+0)$换成$\gamma(\lambda_0)$，$\lambda_0+\tau$换成λ_0，即知当$\gamma(\lambda_0)$存在、并且$\gamma(\lambda_0-0)\neq\gamma(\lambda_0)$时，$\lambda_0$是$A$的歧点．同理，当$\gamma(\lambda_0)$存在且$\gamma(\lambda_0+0)\neq\gamma(\lambda_0)$时，$\lambda_0$是$A$的歧点．证完．

推论1.5 若λ_0是A'_θ的奇代数重数特征值，则λ_0必是A的歧点．

证 当λ_0是A'_θ的奇代数重数特征值时，根据Leray-Schauder定理，$\gamma(\lambda_0-0)\neq\gamma(\lambda_0+0)$．故由定理1.4可知$\lambda_0$是$A$的歧点．证完．

推论1.5 给出了歧点存在性的一个重要的判别法则．此外，由定理1.4可以看出，当λ_0是A'_θ的特征值时，$\gamma(\lambda_0)$是否存在，并且当$\gamma(\lambda_0)$存在时它的数值的计算，对于歧点的判定有着重要的意义．因此，下面将以非线性积分方程为背景，较详细地讨论当λ_0是A'_θ的特征值时，$\gamma(\lambda_0)$存在性的判定及其计

算方法．为了方便，下面总假定 $\lambda_0=1$，$A'_\theta=B$．

设E_0是 $I-B$ 的零子空间，即 $E_0=\{x\in E\mid x-Bx=\theta\}$，显然它是$E$的一个有限维子空间．设 P_0是 E 到E_0上的线性投影算子，$P^0=I-P_0$，$E^0=P^0E$．E的子空间E_0和E^0中的元素分别用 u 和 v 表示．

设 F^0是算子 $I-B$ 的值域，Q^0是E到F^0上的线性投影，$Q_0=I-Q^0$，$F_0=Q_0E$．根据Riesz－Schauder理论，F_0和E_0有相同的维数．因此，必存在映 F_0到E_0的线性算子D，使逆算子D^{-1}也存在．

显然，算子 $B-D^{-1}P_0$是全连续的．设对某 $x_0\in E$，使 $x_0=(B-D^{-1}P_0)x_0$，则 $x_0-Bx_0=-D^{-1}P_0x_0$．由于 $x_0-Bx_0\in F^0$，$-D^{-1}P_0x_0\in F_0$，故必有 $x_0-Bx_0=\theta$，$-D^{-1}P_0x_0=\theta$．因此，$x_0\in E_0$．所以$-D^{-1}x_0=-D^{-1}P_0x_0=\theta$，即 $x_0=-D\theta=\theta$．这表明不存在 E 中的非零元 x_0，使 $x_0=(B-D^{-1}P_0)x_0$，即 1 不是 $B-D^{-1}P_0$的特征值．因此，$I-(B-D^{-1}P_0)$有有界线性的逆算子．下面用$\beta(B,D)$表示$B-D^{-1}P_0$的属于$(0,1)$的所有特征值的代数重数和．

显然，$I-B+D^{-1}P_0$ 映E_0到F_0，映E^0到F^0．所以$(I-B+D^{-1}P_0)^{-1}$映 F_0到E_0，并易知在F_0上

$$(I-B+D^{-1}P_0)^{-1}=D; \tag{1.11}$$

同时 $(I-B+D^{-1}P_0)^{-1}$映 F^0到E^0，并且

$$(I-B+D^{-1}P_0)^{-1}(I-B)=I. \tag{1.12}$$

首先假设A在 θ 的某一邻域中可以表为

$$Ax=Bx+Cx+w(x), \tag{1.13}$$

这里假定

1°对某自然数 $k\geqslant 2$；C 是 k 齐次全连续算子，即对任给

$x\in E$，$t\in R^1$，$C(tx)=t^kCx$；

$2°$存在常数$q_0>0$，使对$x_1\in E, x_2\in E$，$\|x_1\|\leqslant r$，$\|x_2\|\leqslant r$，有

$$\|Cx_1-Cx_2\|\leqslant q_0r^{k-1}\|x_1-x_2\|;\tag{1.14}$$

$3°$ w 全连续，并满足

$$\lim_{\|x\|\to 0}\frac{\|w(x)\|}{\|x\|^k}=0.\tag{1.15}$$

引理1.6 设$1°\sim3°$成立. 设存在$a_0>0$，使对任给$u\in E_0$，有

$$\|Q_0Cu\|\geqslant a_0\|u\|^k.\tag{1.16}$$

则θ是A的孤立不动点，并且当ρ充分小时，在球面$\{x\in E\mid\|x\|=\rho\}$上，$I-A$与

$$\Phi_1(x)=-Q_0CP_0x+P^0x-BP^0x\tag{1.17}$$

同伦.

证 设$\Phi_1(x)=\theta$，则由于$-Q_0CP_0x\in F_0$，$P^0x-BP^0x\in F^0$，知必有$-Q_0CP_0x=\theta$，$P^0x-BP^0x=\theta$. 由(1.16)式即知$P_0x=\theta$. 由$P^0x\in E^0$及$P^0x-BP^0x=\theta$知，$P^0x=\theta$. 所以$x=\theta$. 这表明，若$\Phi_1(x)=\theta$，则$x=\theta$. 下面假设引理的结论不成立. 则由拓扑度的同伦不变性可知，必存在$x_n\in E$，$x_n\neq\theta$，$x_n\to\theta$，$\lambda_n\geqslant 0$，使

$$x_n-Ax_n=-\lambda_n\Phi_1(x_n)$$

（否则当ρ充分小时$I-A$与Φ_1在$\{x\in E\mid\|x\|=\rho\}$上同伦）. 上式可改写为

$$P^0x_n-BP^0x_n=\frac{\lambda_n}{1+\lambda_n}Q_0CP_0x_n$$

$$+\frac{1}{1+\lambda_n}[Cx_n+w(x_n)].\tag{1.18}$$

因此，由2°、3°可知，当n充分大时，必有

$$\|(I-B)\,P^0x_n\| \leqslant \frac{\lambda_n}{1+\lambda_n}\|Q_0\|q_0\|P_0x_n\|^k+$$

$$+\frac{1}{1+\lambda_n}\,q_0\|x_n\|^k+\frac{1}{1+\lambda_n}\|x_n\|^k$$

$$\leqslant\Big(\frac{\lambda_n}{1+\lambda_n}\|Q_0\|q_0\|P_0\|^k+\frac{1}{1+\lambda_n}q_0$$

$$+\frac{1}{1+\lambda_n}\Big)\,\|x\|^k$$

$$=b_1\|x_n\|^k, \tag{1.19}$$

其中，$b_1=\Big(\frac{\lambda_n}{1+\lambda_n}\|Q_0\|q_0\|P_0\|^k+\frac{1}{1+\lambda_n}q_0+\frac{1}{1+\lambda_n}\Big)$.

根据Banach逆算子定理，$I-B$作为映E^0到F^0的线性算子，它有有界线性的逆算子．因此，存在常数$b_2>0$，使对任给$v\in E^0$，$\|(I-B)v\|\geqslant b_2\|v\|$．故由(1.19)式可知，当$n$充分大时，必有

$$\|P^0x_n\|\leqslant b_2^{-1}\|(I-B)P^0x_n\|\leqslant b_1b_2^{-1}\|x_n\|^k \tag{1.20}$$

在(1.18)式两端用Q_0作用，并把所得的等式改写为

$$Q_0CP_0x_n=-\frac{1}{1+\lambda_n}[Q_0(Cx_n-CP_0x_n)$$

$$+Q_0w(x_n)]. \tag{1.21}$$

由(1.16)、(1.14)两式可得

$$\alpha_0\|P_0x_n\|^k\leqslant\|Q_0CP_0x_n\|$$

$$\leqslant\|Q_0\|q_0(\max\{\|x_n\|,\|P_0x_n\|\})^{k-1}\,\|P^0x_n\|$$

$$+\|Q_0\|\|w(x_n)\|$$

$$\leqslant\|Q_0\|q_0(\max\{\|x_n\|,\|P_0x_n\|\})^{k-1}$$

$$\cdot b_1b_2^{-1}\|x_n\|^k+\|Q_0\|\|w(x_n)\|. \tag{1.22}$$

由（1.22）式及3°即可知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\|P_0x_n\|}{\|x_n\|}=0\text{。}$$

由(1.20)式可知 $\lim_{n\to\infty}\frac{\|P^0x_n\|}{\|x_n\|}=0$，故

$$1=\lim_{n\to\infty}\frac{\|x_n\|}{\|x_n\|}\leqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\|P_0x_n\|+\|P^0x_n\|}{\|x_n\|}=0.$$

产生矛盾．证完．

定理1.7 设A可以表为(1.13)式的形式，并且假设1°～3°成立．设(1.16)式成立，则θ是A的孤立不动点，并且

$$\operatorname{ind}(I-A,\ \theta)=(-1)^{\beta(B,\ D)}\operatorname{ind}(\Psi,\theta;E_0),\tag{1.23}$$

其中Ψ是由等式

$$\Psi(u)=-DQ_0Cu\qquad(u\in E_0)\tag{1.24}$$

定义的映E_0入E_0的算子．

证 根据引理1.6，只需证明

$$\operatorname{ind}(I-B-Q_0CP_0,\ \theta)$$
$$=(-1)^{\beta(B,\ D)}\operatorname{ind}(\Psi,\theta;E_0).\tag{1.25}$$

考察

$$J=(I-B+D^{-1}P_0)^{-1}(I-B-Q_0CP_0).$$

根据指标乘积公式，

$$\operatorname{ind}(J,\theta)\operatorname{ind}(I-B+D^{-1}P_0,\theta)$$
$$=\operatorname{ind}(I-B-Q_0CP_0,\theta).\tag{1.26}$$

由于1不是 $B-D^{-1}P_0$的特征值，故由β（B，D）的定义和Leray－Schauder 定理知

$$\operatorname{ind}(I-B+D^{-1}P_0,\ \theta)=(-1)^{\beta(B,\ D)}.\tag{1.27}$$

另一方面，由（1.11)、(1.12)两式知

$$J(x)=\Psi P_0 x+P^0 x.$$

故由简化定理，

$$\operatorname{ind}(J,\theta;E)=\operatorname{ind}(\Psi,\theta;E_0). \tag{1.28}$$

由(1.26)、(1.27)、(1.28)三式，即知定理的结论成立。证完。

在$C(G)$空间中考察Урысон算子

$$A\varphi(x)=\int_G k(x,y,\varphi(y))dy, \tag{1.29}$$

其中G是R^N中的有界闭集。

引理1.8 设当$x\in G$，$y\in G$，$|u|\leqslant r$（$r>0$为一常数）时，$k(x,y,u)$连续，$k(x,y,u)$关于u二阶连续可微。又设$k(x,y,0)\equiv 0$，$\dfrac{\partial^2 k(x,y,0)}{\partial u^2}\not\equiv 0$，$\dfrac{\partial^2 k(x,y,u)}{\partial u^2}$在$G\times G\times[-r,r]$上连续。则由(1.29)式所定义的Урысон型非线性积分算子A可以表示为(1.13)式的形式，并且1°～3°成立，其中$k=2$，

$$B\varphi(x)=\int_G \frac{\partial k(x,y,0)}{\partial u}\varphi(y)dy, \tag{1.30}$$

$$C\varphi(x)=\frac{1}{2}\int_G \frac{\partial^2 k(x,y,0)}{\partial u^2}[\varphi(y)]^2 dy, \tag{1.31}$$

$$\omega\varphi(x)=A\varphi(x)-B\varphi(x)-C\varphi(x). \tag{1.32}$$

证 显然C是2齐次全连续算子，即假设1°满足。因为当$\varphi_1\in C(G)$，$\|\varphi_1\|\leqslant r$，$\varphi_2\in C(G)$，$\|\varphi_2\|\leqslant r$时有

$$|C\varphi_1(x)-C\varphi_2(x)|\leqslant\frac{1}{2}\int_G\left|\frac{\partial^2 k(x,y,0)}{\partial u^2}\right|\cdot|\varphi_1(y)+\varphi_2(y)|\cdot|\varphi_1(y)-\varphi_2(y)|dy,$$

故若取$q_0=\operatorname{mes}G\cdot\max\limits_{x,y\in G}\left|\dfrac{\partial^2 k(x,y,0)}{\partial u^2}\right|$，则有

$$\|C\varphi_1 - C\varphi_2\| \leqslant q_0 \cdot r \|\varphi_1 - \varphi_2\|.$$

故假设2°成立.

因为$k(x,y,0)\equiv 0$，故根据Taylor 公式,当 $x\in G$, $y\in G$, $|u|\leqslant r$ 时，有

$$k(x,y,u)=\frac{\partial k(x,y,0)}{\partial u}u+\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial^2 k(x,y,\theta_u u)}{\partial u^2}u^2$$

其中 $0<\theta_u<1$. 所以,

$$\omega\varphi(x)=\frac{1}{2}\int_G\left\{\frac{\partial^2 k[x,y,\theta_{\varphi(y)}\varphi(y)]}{\partial u^2}\right.$$

$$\left.-\frac{\partial^2 k(x,y,0)}{\partial u^2}\right\}[\varphi(y)]^2 dy. \tag{1.33}$$

注意到$\frac{\partial^2 k(x,y,u)}{\partial u^2}$关于$u$是一致连续的（当$|u|\leqslant r$ 时），故对任给 $\varepsilon>0$，存在$0<\delta<r$，使当 $x\in G, y\in G$，$|u|\leqslant\delta$时，有

$$\left|\frac{\partial^2 k(x,y,u)}{\partial u^2}-\frac{\partial^2 k(x,y,0)}{\partial u^2}\right|<\frac{2\varepsilon}{\operatorname{mes}G}. \tag{1.34}$$

所以，由(1.33)、(1.34)两式可知，当$\|\varphi\|\leqslant\delta$ 时，有

$$\frac{\|\omega\varphi\|}{\|\varphi\|^2}\leqslant\varepsilon.$$

即(1.15)式成立（取$k=2$）. 注意到ω是全连续的，故假设3°成立. 证完.

若$\frac{\partial^2 k(x,y,0)}{\partial u^2}\equiv 0$，可以建立下列引理:

引理1.9 设当 $x\in G, y\in G$, $|u|\leqslant r$ （$r\geqslant 0$ 是一常数）时，$k(x,y,u)$ 连续，$k(x, y, u)$ 关于u是k阶连续可微的（$k>2$为一自然数），并且 $k(x,y,0)\equiv 0$，$\frac{\partial^2 k(x,y,0)}{\partial u^2}\equiv\cdots\equiv\frac{\partial^{k-1}k(x,y,0)}{\partial u^{k-1}}\equiv 0$. 设$\frac{\partial^k k(x,y,0)}{\partial u^k}\not\equiv 0$，$\frac{\partial^k k(x,y,u)}{\partial u^k}$

在$G\times G\times[-r,r]$上连续，则由（1.29)式所定义的Урысон算子A可以表示为(1.13)式的形式，并且1°～3°成立，其中B由（1.30）式定义，

$$C\varphi(x)=\frac{1}{k!}\int_G\frac{\partial^k k(x,y,o)}{\partial u^k}[\varphi(y)]^k dy, \qquad (1.35)$$

$$\omega\varphi(x)=A\varphi(x)-B\varphi(x)-C\varphi(x). \qquad (1.36)$$

证 本引理的证明与引理1.8的证明类似，故从略.

在$C(G)$空间中考察Урысон算子（1.29)．设$A\theta=\theta$，$A'(\theta)$存在．记$B=A'(\theta)$．设λ_0是B的特征值．利用定理1.7可以讨论$\gamma(\lambda_0)$的判定及其计算方法．不失一般性，设$\lambda_0=1$．下面假定定理1.7的条件满足，即A可以表为(1.13)式的形式，假设1°～3°成立（引理1.8和引理1.9给出了A可以表为(1.13)式的形式，并且1°～3°成立的具体条件），并且(1.16)式成立．设自然数k是由假设1°确定的齐次指数．

引理1.10 (i)若k是偶数，则

$$\mathrm{ind}(\Psi,\theta;E_0)\equiv 0\ (\mathrm{mod}2);$$

其中Ψ由(1.24)式定义；特别地，又若$\dim E_0\equiv 1(\mathrm{mod}2)$，则

$$\mathrm{ind}(\Psi,\theta;E_0)=0.$$

(ii)若k是奇数，则

$$\mathrm{ind}(\Psi,\theta;E_0)\equiv 1(\mathrm{mod}2).$$

证 这是附录定理2.9和定理2.10的推论．证完.

引理1.11 设$\dim E_0=1$，φ_0是E_0中的单位向量，$k\equiv 1(\mathrm{mod}2)$．则

(i)若φ_0与$\Psi(\varphi_0)$方向相同，则$\mathrm{ind}(\Psi,\theta;E_0)=1$；

(ii)若φ_0与$\Psi(\varphi_0)$方向相反，则$\mathrm{ind}(\Psi,\theta;E_0)=-1$.

这一引理是显然的.

下面设 B 是具有对称核的线性积分算子.

在这种情况下，$E_0=F_0$，$E^0=F^0$；此时可以取$D=I$. 设E_0是 n 维空间，取 $e_i(x)\in E_0(i=1,2,\cdots,k)$，使

$$\int_G e_i(x)e_j(x)\,dx=\begin{cases}0, & i\neq j,\\ 1, & i=j,\end{cases}\quad (i,\ j=1,2,\cdots,n).$$

容易证明，此时P_0可以表达为

$$P_0\varphi=\sum_{i=1}^{n} e_i(x)\int_G\varphi(x)e_i(x)dx\quad (\varphi\in C(G)),\tag{1.37}$$

并且$Q_0=P_0$. 若 $n=1$，$e_0(x)$是 E_0中的单位向量，则易知对 $\varphi\in E_0$，

$$\Psi(\varphi)=-e_0(x)\int_G C[\varphi(x)]e_0(x)dx.\tag{1.38}$$

引理1.12 设引理1.8或引理1.9的条件满足. 又设

$$\dim E_0=1,$$

$$a=\frac{1}{k!}\int_G\int_G\frac{\partial^k k(x,y,0)}{\partial u^k}[e_0(y)]^k e_0(x)dxdy.\tag{1.39}$$

设 $a\neq 0$. 则θ是A的孤立不动点，并且

(i)若 k 是偶数，则 $\mathrm{ind}(\Psi,\theta;E_0)=0$；

(ii)若 k 是奇数，$a>0$；则 $\mathrm{ind}(\Psi,\theta;E_0)=-1$；

(iii)若 k 是奇数，$a<0$，则 $\mathrm{ind}(\Psi,\theta;E_0)=1$.

证 由 $a\neq 0$及C的 k 齐次性，易知(1.16)式成立. 根据定理1.7，θ 是A的孤立不动点. 由引理1.10的(i)及引理1.11，可知结论(i)、(ii)、(iii)成立. 证完.

若 $\dim E_0>1$，也可以获得某些结果. 为了简便，下面将讨论 Hammerstein 型积分算子的情况. 设

$$A\varphi(x)=\int_G k(x,y)f(y,\varphi(y))dy,\tag{1.40}$$

其中G是R^N中有界闭集. 假定

(1) 由 $k(x,y)$确定的线性积分算子K映$C(G)$入$C(G)$ 全连续，$k(x,y)=k(y,x)$，并且 1 是K的特征值；

(2) $f(x,0)\equiv 0$，$f(x,u)$ 关于u k阶连续可微($k\geqslant 2$ 为一自然数)，并且

$$\frac{\partial f(x,0)}{\partial u}\equiv 1,\quad \frac{\partial^2 f(x,0)}{\partial u^2}\equiv\cdots\equiv\frac{\partial^{k-1} f(x,0)}{\partial u^{k-1}}\equiv 0;$$

(3) 对任给$x\in G$，$\dfrac{\partial^k f(x,0)}{\partial u^k}\neq 0$。

令

$$g(x)=\frac{1}{k!}\cdot\frac{\partial^k f(x,0)}{\partial u^k}. \tag{1.41}$$

引理1.13 设上述假设(1)～(3) 成立，k 为奇数，则θ是A的孤立零点，并且

(i) 若 $g(x)<0\ (\forall x\in G)$，则 $\mathrm{ind}(\Psi,\theta;E_0)=1$；

(ii)若 $g(x)>0\ (\forall x\in G)$，则 $\mathrm{ind}(\Psi,\theta;E_0)=-1$。

证 仿引理1.8和引理1.9可知，A可以表为(1.13)式的形式，其中$B=K$,C 由

$$C\varphi(x)=\int_G k(x,y)g(y)[\varphi(y)]^k dy \tag{1.42}$$

确定，$\omega=A-B-C$。由 $k(x,y)=k(y,x)$ 知，$E_0=F_0$，$E^0=F^0$，$P_0=Q_0$，并且可以取 $D=I$。此时$\Psi=-P_0C$。

首先假定

$$g(x)<0\ (\forall x\in G).$$

如果$-P_0C$ 在$S_1=\{\varphi\in E_0\mid\|\varphi\|=1\}$有零解，或者 deg $(-P_0C,V_1,\theta)\neq 1$ ($V_1=\{\varphi\in E_0\mid\|\varphi\|<1\}$)，则存在$\varphi^*\in S_1$及$\mu\geqslant 0$，使

$$-P_0C\varphi^*+\mu\varphi^*=\theta. \tag{1.43}$$

注意到在 P_0 的表达式(1.37)中，可以取 $e_1(x)=\varphi^*(x)$，故由(1.37)、(1.43)两式可知

$$-\sum_{i=1}^{n} e_i(x)\int_G [Ce_1(y)]e_i(y)dy+\mu e_1(x)=0. \quad (1.44)$$

(1.44) 式两端乘以 $e_1(x)$，并在G上积分，有

$$\mu=\int_G [Ce_1(y)]e_1(y)dy. \quad (1.45)$$

由(1.42)、(1.45)两式，并注意到$\int_G k(y,\ y_1)e_1(y)\,dy=\int_G k(y_1,y)e_1(y)dy=e_1(y_1)$，可以得到

$$\begin{aligned}\mu&=\int_G\left\{\int_G k(y,y_1)g(y_1)[e_1(y_1)]^k dy_1\right\}e_1(y)dy\\&=\int_G\left[\int_G k(y,y_1)e_1(y)dy\right]g(y_1)[e_1(y_1)]^k dy_1\\&=\int_G g(y_1)[e_1(y_1)]^{k+1}dy_1. \quad (1.46)\end{aligned}$$

由于 k 是奇数，故$[e_1(y_1)]^{k+1}\geqslant 0$，$[e_1(y_1)]^{k+1}\not\equiv 0$. 又因为$g(y_1)<0$ ($\forall y_1\in G$)，故由(1.46) 式可得$\mu<0$. 此与 $\mu\geqslant 0$ 矛盾. 因此，$-P_0C$ 在 S_1上没有零解，并且

$$\deg(-P_0C,\ V_1,\ 0)=1.$$

亦即 θ 是A的孤立不动点，并且$\mathrm{ind}(\Psi,\theta;E_0)=1$.

用完全同样的方法可以证明：当 $g(x)>0$ ($\forall x\in G$) 时，θ 也是A的孤立不动点，并且 $\mathrm{ind}(\Psi,\theta;E_0)=-1$. 证完.

为了用定理 1.7 计算 $\mathrm{ind}\ (I-A,\ \theta)$，我们还需要知道$(-1)^{\beta(B,D)}$. 事实上，在$E_0$与$B$对应于1的根子空间重合的情况（这是一种最常见的重要情况）下，容易知道有

$$(-1)^{\beta(B,D)}=(-1)^{\beta}, \tag{1.47}$$

其中β是B的属于（0，1）的所有特征值的代数重数和。

下面在$C(G)$空间中讨论非线性积分方程歧点的存在性及其性质。先考虑Урысон算子(1.29)。

定理1.14　设引理1.8或引理1.9的条件成立。

设$\dfrac{\partial k(x,y,0)}{\partial u}=\dfrac{\partial k(y,x,0)}{\partial u}$，$\lambda_0$是

$$B\varphi(x)=\int_G\frac{\partial k(x,y,0)}{\partial u}\varphi(y)dy$$

的一重特征值，$e_0(x)$是B对应于λ_0的就范特征函数，a由(1.39)式确定。设$a\neq 0$。则λ_0是A的歧点，并且

(i)若k是偶数，则存在$\varepsilon>0$，$\delta>0$，使得对任给$\lambda\in(\lambda_0-\delta,\lambda_0)\cup(\lambda_0,\lambda_0+\delta)$，都存在$\varphi_\lambda$，$0<\|\varphi_\lambda\|<\varepsilon$，满足$\varphi_\lambda=\lambda A\varphi_\lambda$；

(ii)若k是奇数，$a>0$，则存在$\varepsilon>0$，$\delta>0$，使得对任给$\lambda\in(\lambda_0-\delta,\lambda_0)$，都存在$\varphi_\lambda$，$0<\|\varphi_\lambda\|<\varepsilon$，满足$\varphi_\lambda=\lambda A\varphi_\lambda$；

(iii)若k是奇数，$a<0$，则存在$\varepsilon>0$，$\delta>0$，使得对任给$\lambda\in(\lambda_0,\lambda_0+\delta)$，都存在$\varphi_\lambda$，$0<\|\varphi_\lambda\|<\varepsilon$，满足$\varphi_\lambda=\lambda A\varphi_\lambda$。

证　由$\dfrac{\partial k(x,y,0)}{\partial u}=\dfrac{\partial k(y,x,0)}{\partial u}$可知，$B$相应于$\lambda_0$的零子空间和根子空间重合，故(1.47)式成立。从而根据定理1.7，有

$$\gamma(\lambda_0)=\gamma(\lambda_0-0)\,\mathrm{ind}(\Psi,\theta;E_0). \tag{1.48}$$

又显然

$$\gamma(\lambda_0+0)=-\gamma(\lambda_0-0). \tag{1.49}$$

设 k 是偶数. 根据引理1.12结论(i) 及 (1.48) 式可知, $\gamma(\lambda_0)=0$. 根据 $\gamma(\lambda_0)$ 的定义知, 存在 $\varepsilon>0$, 使得

$$\deg(I-\lambda_0 A,\ T_\varepsilon, o)=0. \tag{1.50}$$

其中 $T_\varepsilon=\{\varphi\in C(G)\mid\|\varphi\|<\varepsilon\}$. 根据小扰动不变性 (见附录定理2.2) 知, 存在 $\delta>0$, 使当 $\lambda\in(\lambda_0-\delta,\ \lambda_0+\delta)$ 时

$$\deg(I-\lambda A,\ T_\varepsilon,0)=\deg(I-\lambda_0 A,T_\varepsilon,0)=0. \tag{1.51}$$

不失一般性, 可以假定 A_θ' 在 $[\lambda_0-\delta,\lambda_0+\delta]$ 上没有特征值. 于是, 当 $\lambda\in(\lambda_0-\delta,\lambda_0+\delta)$, $\lambda\neq\lambda_0$ 时, 有

$$|\operatorname{ind}(I-\lambda A,\theta)|=1. \tag{1.52}$$

由(1.51)、(1.52)两式即知, 对任给 $\lambda\in(\lambda_0-\delta,\lambda_0)\cup(\lambda_0,\lambda_0+\delta)$, 存在 $\varphi_\lambda\in T_\varepsilon$, $\varphi_\lambda\neq\theta$, 使 $\varphi_\lambda=\lambda A\varphi_\lambda$. 结论(i)获证.

利用同样的方法可以证明结论(ii)、(iii). 证完.

再考察 Hammerstein 型积分算子(1.40).

定理1.15 设由 $k(x,y)$ 确定的线性积分算子 K 映 $C(G)$ 入 $C(G)$ 全连续, $k(x,y)=k(y,x)$, 并且 λ_0 是 K 的特征值. 又设引理1.13中的假设(2)、(3)成立, 其中 k 是奇数. 设 $g(x)$ 由 (1.41) 式确定. 则下列结论成立:

(i)若 λ_0 是 K 的奇重特征值, $g(x)<0\ (\forall x\in G)$, 则 λ_0 是 A 的歧点, 并且存在 $\varepsilon>0$, $\delta>0$, 使得对任给 $\lambda\in(\lambda_0,\ \lambda_0+\delta)$, 都存在 φ_λ, $0<\|\varphi_\lambda\|<\varepsilon$, 满足 $\varphi_\lambda=\lambda A\varphi_\lambda$;

(ii)若 λ_0 是 K 的奇重特征值, $g(x)>0\ (\forall x\in G)$, 则 λ_0 是 A 的歧点, 并且存在 $\varepsilon>0$, $\delta>0$, 使得对任给 $\lambda\in(\lambda_0-\delta,\ \lambda_0)$, 都存在 φ_λ, $0<\|\varphi_\lambda\|<\varepsilon$, 满足 $\varphi_\lambda=\lambda A\varphi_\lambda$.

(iii)若 λ_0 是 K 的偶重特征值, $g(x)>0\ (\forall x\in G)$, 则 λ_0 是 A 的歧点, 并且存在 $\varepsilon>0$, $\delta>0$, 使得对任给 $\lambda\in(\lambda_0-\delta,$

$\lambda_0) \cup (\lambda_0, \lambda_0+\delta)$，都存在 φ_λ，$0<\|\varphi_\lambda\|<\varepsilon$，满足$\varphi_\lambda=\lambda A\varphi_\lambda$.

证 证明方法与定理1.14相同（利用引理1.13）.证完.

与歧点相对应，可以建立渐近歧点的定义.

定义1.16 设 $\lambda_0\in R^1$. 如果对任给 $\varepsilon>0$，都存在满足方程(1.1)的$(\lambda,x)\in R^1\times E$，使得

$$|\lambda-\lambda_0|<\varepsilon, \quad \|x\|>\frac{1}{\varepsilon},$$

则称 λ_0是A的渐近歧点.

本节所述的关于歧点的理论，可以平行推广到渐近歧点的情况，本书不再详述.

附注 本节只叙述了分歧理论中的拓扑方法. 在本书第七章§3中将讨论变分方法在分歧理论中的应用. 分歧理论中的解析方法及其在非线性积分方程中的应用，可见M.M.Вайнберг和B.A.Треногин〔1〕.

§2 某些准备知识

为了研究非线性积分方程特征元的全局性理论，需要某些预备知识.

设M是一个距离空间，如果M是它的两个非空的、不相交的开子集A和B的并集，则称M是不连通的距离空间；如果 M 不是不连通的，则称M是连通的距离空间. 距离空间M中的一个子集称为是连通的或者是不连通的，如果按照它作为子空间时，是连通的或者是不连通的.

如果距离空间M的一个子集A是最大的连通子集（即 A 是连通的，并且它不是M的另一个连通子集的真子集），则称 A

是M的一个连通分支，关于连通分支的一个主要性质是（其证明见江泽涵〔1〕）：

引理2.1 距离空间M中的每一个连通子集都包含在M的某一个连通分支中。M的每一个连通分支都是M中的闭集。

定理2.2 设M是一个紧的距离空间，A和B是M的不相交的闭子集，并且不存在M的连通分支同时与A和B都相交。则必存在M的不相交的紧子集M_A和M_B，使

$$M=M_A\cup M_B,\quad A\subset M_A,\quad B\subset M_B.$$

这一定理的证明见G.T.Whyburn〔1〕.

设M是一个距离空间，$C_1,C_2,\cdots,C_n,\cdots$是由$M$中的子集组成的一个集序列。定义

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}C_n=\{x\in M\mid 存在\{n\}的子列\{n_i\}及\ x_{n_i}\in C_{n_i},\ 使\ x_{n_i}\to x\},$$

则称$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}C_n$是$\{C_n\}$的上限点集。显然，$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}C_n$是$M$中的闭集。

定理2.3 设M是一个距离空间，$R^1=(-\infty,+\infty)$，$(a,b)\subset R^1$（其中a可以是$-\infty$，b可以是$+\infty$）。设

$$a<\cdots<\alpha_n<\cdots<\alpha_2<\alpha_1<\beta_1<\beta_2<\cdots<\beta_n<\cdots<b, \tag{2.1}$$

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_n=a,\quad \lim_{n\to\infty}\beta_n=b. \tag{2.2}$$

设$\Sigma=\{C_n|n=1,2,\cdots\}$是$R^1\times M$中的一个连通子集族，满足下列条件：

（1）对每一个$n=1,2,\cdots$，

$$C_n\cap(\{\alpha_n\}\times M)\neq\phi, \tag{2.3}$$

$$C_n\cap(\{\beta_n\}\times M)\neq\phi; \tag{2.4}$$

（2）对任给$a<\alpha<\beta<b$，$(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}C_n)\cap([\alpha,\beta]\times M)$是$R^1\times M$中的相对紧集；

则在 $D=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} C_n$ 中必存在一个连通分支 C^*，满足

$$C^*\cap(\{\lambda\}\times M)\neq\phi,\quad \forall\lambda\in(a,b). \tag{2.5}$$

为了证明定理2.3，首先需要证明下列引理:

引理2.4 设定理2.3的全部条件满足. 则对任给 $Z\in D$，D 中含有 z 的连通分支 C_z 至少满足下列两式之一：

$$\inf\{\lambda|(\lambda,u)\in C_z\}=a, \tag{2.6}$$

$$\sup\{\lambda|(\lambda,u)\in C_z\}=b. \tag{2.7}$$

证 用反证法，设(2.6)(2.7)式均不成立，则

$$\inf\{\lambda|(\lambda,u)\in C_z\}=a'>a, \tag{2.8}$$

$$\sup\{\lambda|(\lambda,u)\in C_z\}=b'<b. \tag{2.9}$$

因此，由(2.1)、(2.2) 式知，必存在 n_0，使当 $n\geqslant n_0$ 时，$\alpha_n<a'$，$\beta_n>b'$. 注意到 D 是 $R^1\times M$ 中的闭集，故由引理 2.1 可知 C_z 是 D 中，从而也是 $R^1\times M$ 中的闭集. 由定理2.3的条件(2)及(2.8)、(2.9)两式，易知 C_z 紧，并且存在 C_z 的 δ 邻域 U_1，使 $\overline{U}_1\subset(\alpha_{n_0},\ \beta_{n_0})\times M$. 如果 $\partial U_1\cap D\neq\phi$，则由定理2.3的条件(2)易知，$D\cap\overline{U}_1$ 是一个紧的距离空间. 显然, C_z 和 $\partial U_1\cap D$ 是 $D\cap\overline{U}_1$ 的两个非空的不相交的闭子集. 由 C_z 的极大连通性可知,不存在 $D\cap\overline{U}_1$ 的连通分支 L,使 $L\cap C_z\neq\phi$, $L\cap(\partial U_1\cap D)\neq\phi$. 根据定理2.2 (在定理2.2中，令 $M=D\cap\overline{U}_1$，$A=C_z$，$B=\partial U_1\cap D$)，存在 $D\cap\overline{U}_1$ 的不相交的紧子集 M_A，M_B，使 $C_z\subset M_A$，$\partial U_1\cap D\subset M_B$，$M_A\cup M_B=D\cap\overline{U}_1$. 显然 $d(M_A,M_B)>0$. 令 $\delta=\frac{1}{3}d(M_A,M_B)$，$U_2$ 是 M_A 的 $\frac{\delta}{3}$ 邻域,并令 $U=U_1\cap U_2$，则显然

$$C_z\subset U,\quad \partial U\cap D=\phi,\quad \overline{U}\subset(\alpha_{n_0},\beta_{n_0})\times M. \tag{2.10}$$

如果 $\partial U_1\cap D=\phi$，则令 $U=U_1$，显然(2.10)式也成立.

由上限点集的定义知，存在 $\{n\}$ 的子列 $\{n_i\}$ 及 $z_{n_i}\in C_{n_i}$，使 $z_{n_i}\to z$. 不失一般性，可以假定 $\{z_{n_i}\}\subset U$. 由(2.3)、(2.4)两式知，对每一个 $n_i\geqslant n_0$，都有

$$C_{n_i}\cap(\{\alpha_{n_i}\}\times M)\neq\phi,\ C_{n_i}\cap(\{\beta_{n_i}\}\times \mathrm{M})\neq\phi. \tag{2.11}$$

如果对 $n_i\geqslant n_0$，$C_{n_i}\cap\partial U=\phi$，则显然 $C_{n_i}\cap U$ 和 $C_{n_i}\cap((R^1\times \mathrm{M})\setminus\overline{U})$ 都是 C_{n_i} 的非空开子集，并且 $C_{n_i}=(C_{n_i}\cap U)\cup(C_{n_i}\cap((R^1\times \mathrm{M})\setminus\overline{U}))$，此与 C_{n_i} 的连通性矛盾. 故对每个 $n_i\geqslant n_0$，

$$C_{n_i}\cap\partial U\neq\phi. \tag{2.12}$$

取 $y_{n_i}\in C_{n_i}\cap\partial U$，则 $\{y_{n_i}\mid n_i\geqslant n_0\}$ 是相对紧集. 故必存在 $y^*\in\partial U$ 及 $\{y_{n_i}\mid n_i\geqslant n_0\}$ 的某一子列，使该子列收敛于 y^*. 根据上限点集的定义可知，$y^*\in D$. 因此 $y^*\in D\cap\partial U$，此与(2.10)式矛盾. 这一矛盾表明(2.6)式与(2.7)式中至少有一式成立. 引理2.4证完.

定理2.3的证明 取 $c\in(\alpha_1,\beta_1)$，令 $D(c)=D\cap(\{c\}\times \mathrm{M})$. 仿(2.12)式可以证明，对任给 $n=1, 2, \cdots$，

$$C_n\cap(\{c\}\times \mathrm{M})\neq\phi.$$

取 $y_n\in C_n\cap(\{c\}\times \mathrm{M})$. 由条件(2)知 $\{y_n\mid n=1,2,\cdots\}$ 是相对紧集，故存在 $y^*\in\{c\}\times \mathrm{M}$，使 $\{y_n\}$ 有一子列收敛于 y^*. 因此由上限点集的定义知 $y^*\in D$，故 $D(c)\neq\phi$. 显然 $D(c)$ 是闭集，故由条件(2)知，$D(c)$ 是 $R^1\times \mathrm{M}$ 中的紧集. 任取 $(c,v)\in D(c)$，令 $E(v)$ 是 D 中含有 (c,v) 的连通分支. 令

$$\underline{\lambda}(v)=\inf\{\lambda\mid(\lambda,u)\in E(v)\},$$

$$\overline{\lambda}(v)=\sup\{\lambda\mid(\lambda,u)\in E(v)\}.$$

若对某 $(c,v)\in D(c)$，$\underline{\lambda}(v)=a$，$\overline{\lambda}(v)=b$，则定理的结论显

然成立．因此下设对任给$(c,v)\in D(c)$，$\underline{\lambda}(v)=a$和$\bar{\lambda}(v)=b$不能同时成立．由引理2.4知，$\underline{\lambda}(v)=a$和$\bar{\lambda}(v)=b$至少有一个成立，因此若令$A=\{(c,v)\in D(c)\mid\bar{\lambda}(v)=b\}$，$B=\{(c,v)\in D(c)\mid\underline{\lambda}(v)=a\}$，则必有

$$A\cap B=\phi,\ A\cup B=D(c). \tag{2.13}$$

令

$$A_1=\{(c,v)\in A\mid\underline{\lambda}(v)>\alpha_1\},$$
$$A_n=\{(c,v)\in A\mid\alpha_{n-1}\geqslant\underline{\lambda}(v)>\alpha_n\}\quad(n=2,3,\cdots),$$
$$B_1=\{(c,v)\in B\mid\bar{\lambda}(v)<\beta_1\},$$
$$B_n=\{(c,v)\in B\mid\beta_{n-1}\leqslant\bar{\lambda}(v)<\beta_n\}\quad(n=2,3,\cdots).$$

则显然有

$$A=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n,\qquad B=\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n. \tag{2.14}$$

任给$(c,v)\in A$，用$E'(v)$表示$E(v)\cap((a,\beta_1]\times\mathrm{M})$的含有$(c,v)$的连通分支．利用与引理2.4证明中关于$U$的做法同样的方法，可以做出$(a,\beta_1]\times\mathrm{M}$中的有界开集$U(v)$，使$E'(v)\subset U(v)$，$\partial U(v)\cap D=\phi$，并且

$$\inf\{\lambda\mid(\lambda,u)\in\overline{U}(v)\}>a, \tag{2.15}$$

其中$\partial U(v)$和$\overline{U}(v)$分别表示$U(v)$在$(a,\beta_1]\times\mathrm{M}$中的边界和闭包．同样，对每一个$(c,v)\in B$，可以做出$[\alpha_1,b)\times\mathrm{M}$中的有界开集$V(v)$，使$E''(v)\subset V(v)$，$\partial V(v)\cap D=\phi$，并且

$$\sup\{\lambda\mid(\lambda,u)\in\overline{V}(v)\}<b, \tag{2.16}$$

其中，$E''(v)$是$E(v)\cap([\alpha_1,b)\times\mathrm{M})$的含有$(c,v)$的连通分支，$\partial V(v)$和$\overline{V}(v)$分别是$V(v)$在$[\alpha_1,b)\times\mathrm{M}$中的边界和闭包．

显然，$\{c\}\times\mathrm{M}$中的开集族

$$\{U(v)\cap(\{c\}\times \mathrm{M})|(c,v)\in A\}\cup$$
$$\{V(v)\cap(\{c\}\times \mathrm{M}|(c,v)\in B\}$$

构成了 $D(c)$ 的一个开覆盖（在空间$\{c\}\times \mathrm{M}$中考虑）．由于$D(c)$是$\{c\}\times M$中的紧集，故必存在 $v_1,\cdots,v_m,v_{m+1},\cdots,v_p$（$p>m$），使 $(c,v_i)\in A$（$1\leqslant i\leqslant m$），$(c,v_i)\in B(m+1\leqslant i\leqslant p)$，并且$\{c\}\times \mathrm{M}$中的有限开集族

$$\{U(v_i)\cap(\{c\}\times \mathrm{M})|\ i=1,2,\cdots,m\}\cup$$
$$\{V(v_i)\cap(\{c\}\times M|\ i=m+1,\cdots,p\}\tag{2.17}$$

也覆盖了$D(c)$．令

$$U_1=\bigcup_{i=1}^{m}U(v_i),\ V_1=\bigcup_{n=m+1}^{p}V(v_i).$$

则显然U_1是$(a,\beta_1]\times M$中的有界开集，$\partial U_1\cap D=\phi$，并且由（2.15）式易知有

$$\inf\{\lambda|(\lambda,u)\in\overline{U}_1\}>a,\tag{2.18}$$

其中∂U_1和$\overline{U}_1$分别是U_1在$(a,\beta_1]\times \mathrm{M}$中的边界和闭包．同理，$V_1$是$[\alpha_1,b)\times M$中的有界开集，$\partial V_1\cap D=\phi$并且

$$\sup\{\lambda|(\lambda,\ u)\in\overline{V}_1\}<b,\tag{2.19}$$

其中∂V_1和$\overline{V}_1$分别是V_1在$[\alpha_1,b)\times M$中的边界和闭包．

令 $J=\partial U_1\cup\partial V_1\cup((\{c\}\times M)\backslash(U_1\cup V_1))$，则显然

$$J\cap D=\phi.\tag{2.20}$$

由(2.20)式及条件(1)显然可知存在n'，使当$n\geqslant n'$时$C_n\cap J=\phi$．由(2.18)、(2.19)式知存在 n''，使当 $n\geqslant n''$时，有

$$\alpha_n<\inf\{\lambda|(\lambda,u)\in\overline{U}_1\},\ \beta_n>\sup\{\lambda|(\lambda,u)\in\overline{V}_1\}.\tag{2.21}$$

取 $n^*=\max\{n',n''\}$．由(2.3)、(2.4)、(2.21)式，并注意到当$n\geqslant n^*$时 $C_n\cap J=\phi$及 C_n 的连通性，用与证明(2.12)式同样的

方法可以证得对任给 $n \geqslant n^*$,

$$C_n \cap ((\{c\} \times M) \cap U_1 \cap V_1) \neq \phi. \tag{2.22}$$

因此，由上限点集的定义及(2.22)式易知

$$D_1(c) = D(c) \cap U_1 \cap V_1 \neq \phi \tag{2.23}$$

并且 $D_1(c)$是闭集．由条件(1)知，$D_1(c)$是紧集．

任给 $(c,v) \in D_1(c)$．若 $(c,v) \in A$，则由$\partial V_1 \cap D = \phi$知，必有

$$\inf\{\lambda | (\lambda,u) \in E(v)\} < \alpha_1,$$

因此 $(c,v) \overline{\in} A_1$．同理，若 $(c,v) \in B$，则$(c,v) \overline{\in} B_1$．所以，由(2.13)式知

$$D_1(c) \cap (A_1 \cup B_1) = \phi. \tag{2.24}$$

用$D_1(c)$代替上文中的$D(c)$，β_2和 α_2分别代替上文中的β_1和α_1，则用和上文同样的方法可以作出非空紧集$D_2(c) \subset D_1(c)$使得

$$D_2(c) \cap (A_2 \cup B_2) = \phi. \tag{2.25}$$

同样，对每一个$n=3,4,\cdots$，都可以作出非空紧集 $D_n(c)$，使 $D_n(c) \subset D_{n-1}(c)$，并且

$$D_n(c) \cap (A_n \cup B_n) = \phi \qquad (n=3,4,\cdots). \tag{2.26}$$

令 $D^* = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} D_n(c)$，则显然 $D^* \neq \phi$，$D^* \subset D(c)$．由 (2.24)、(2.25)、(2.26)式知，对一切n，有

$$D^* \cap (A_n \cup B_n) = \phi.$$

所以，由 (2.14)式知

$$D^* \cap (A \cup B) = \phi.$$

但由(2.13)式知，$D(c) = A \cup B$，故 $D^* \cap D(c) = \phi$．此与$D^* \neq \phi$，$D^* \subset D(c)$矛盾．这一矛盾表明，必存在$(c,v) \in D(c)$，

使 $\underline{\lambda}(v)=a$ 与 $\bar{\lambda}(v)=b$ 同时成立．由此可知定理的结论成立．定理2.3证完．

下面给出关于拓扑度计算的一个一般性结论．

设 E 是实Banach空间，$A:E\to E$ 全连续，$A\theta=\theta$．考察方程

$$x=\lambda Ax. \tag{2.27}$$

显然，$\{(\lambda,\theta)\mid\lambda\in R^1\}$是方程(2.27)的平凡解集．用 L 表示方程(2.27)的非平凡解集在 $R^1\times E$中的闭包，即

$$L=\overline{\{(\lambda,x)\mid\lambda\in R^1,\ x\in E,x\neq\theta,\ x=\lambda Ax\}}.$$

下面假定 A'_θ 存在．设$-\infty<\lambda^*<\lambda^{**}<+\infty$，$\Delta=[\lambda^*,\lambda^{**}]$，$U$是$\Delta\times E$中的有界开集．令

$$U(\lambda)=U\cap(\{\lambda\}\times E),$$

则$U(\lambda)$是$\{\lambda\}\times E$中的有界开集．设μ是 A'_θ 的特征值，令

$$\gamma(\mu-0)=\lim_{\lambda\to\mu-0}\operatorname{ind}(I-\lambda A,\theta),$$
$$\gamma(\mu+0)=\lim_{\lambda\to\mu+0}\operatorname{ind}(I-\lambda A,\theta).$$

显然，$\gamma(\mu-0)$和$\gamma(\mu+0)$都是有意义的．

定理2.5 设$A:E\to E$ 全连续，$A\theta=\theta$，A'_θ 存在．设U是$\Delta\times E$ 中的有界开集，

$$\partial U\cap L=\phi, \tag{2.28}$$

其中∂U是U相对于$\Delta\times E$的边界．则下列结论成立：

(i)若 $(\lambda^*,\theta)\overline{\in}\overline{U}$，$(\lambda^{**},\theta)\overline{\in}\overline{U}$，则

$$\deg(I-\lambda^{**}A,U(\lambda^{**}),0)=\deg(I-\lambda^*A,U(\lambda^*),0)+2J;$$

(ii)若 $(\lambda^*,\theta)\in U$，$(\lambda^{**},\theta)\in U$，则

$$\deg(I-\lambda^{**}A,\ U(\lambda^{**}),0)$$

$$=\deg(I-\lambda^* A, U(\lambda^*), 0)+2J-\gamma(\mu_1-0)$$
$$+\gamma(\mu_n+0);$$

(iii)若 $(\lambda^*,\theta)\in U$，$(\lambda^{**},\theta)\overline{\in}\overline{U}$，则

$$\deg(I-\lambda^{**}A, U(\lambda^{**}), 0)=\deg(I-\lambda^* A, U(\lambda^*), 0)$$
$$+2J-\gamma(\mu_1-0);$$

(iv)若 $(\lambda^*,\theta)\overline{\in}\overline{U}$，$(\lambda^{**},\theta)\in U$，则

$$\deg(I-\lambda^{**}A, U(\lambda^{**}), 0)=\deg(I-\lambda^* A, U(\lambda^*), 0)$$
$$+2J+\gamma(\mu_n+0);$$

其中，μ_1，$\mu_2,\cdots,\mu_n$ 是 A'_θ 的满足 $(\mu_i,\theta)\in U(1\leqslant i\leqslant n)$ 的全体奇代数重数特征值，并且

$$\lambda^*\leqslant\mu_1<\mu_2<\cdots<\mu_n\leqslant\lambda^{**},$$

$$J=\sum_{i=1}^{n}\gamma(\mu_i-0). \tag{2.29}$$

证 先证结论(i). 设 $\overline{\mu}_1$，…，$\overline{\mu}_m$是A的满足 $(\overline{\mu}_i, \theta)\in U$ $(1\leqslant i\leqslant m)$ 的全体歧点，并且

$$\lambda^*<\overline{\mu}_1<\overline{\mu}_2<\cdots<\overline{\mu}_m<\lambda^{**}.$$

由 $(\overline{\mu}_i, \theta)\in U$ $(1\leqslant i\leqslant m$, 下同) 知，对每一个$\overline{\mu}_i$，都存在$\delta_i>0$，使得诸 $[\overline{\mu}_i-\delta_i, \overline{\mu}_i+\delta_i]$ 两两互不相交，均属于$\varDelta$，在 $[\overline{\mu}_i-\delta_i, \overline{\mu}_i+\delta_i]$ 中没有A'_θ的异于$\overline{\mu}_i$的特征值，并且 $\{(\lambda,\theta)\mid\lambda\in[\overline{\mu}_i-\delta_i, \overline{\mu}_i+\delta_i]\}\subset U$. 由(2.28)式知方程 (2.27) 在 $\partial U\cap([\overline{\mu}_i-\delta_i, \overline{\mu}_i+\delta_i]\times E)$ 上没有解. 因此，由广义同伦不变性（见附录定理2.12），知

$$\deg(I-(\overline{\mu}_i-\delta_i)A, U(\overline{\mu}_i-\delta_i), 0)$$
$$=\deg(I-(\overline{\mu}_i+\delta_i)A, U(\overline{\mu}_i+\delta_i), 0). \tag{2.30}$$

令 $\varDelta^*=\varDelta\setminus\bigcup\limits_{i=1}^{m}[\overline{\mu}_i-\delta_i, \overline{\mu}_i+\delta_i]$. 显然

$$(\varDelta^*\times\{\theta\})\cap(U\cap L)=\phi,$$

因此，$d_1=d(\varDelta^*\times\{\theta\},\ U\cap L)>0$，其中 $d(\cdot,\cdot)$ 表点集间的距离. 又显然

$$d_2=d(\partial U,\ \bigcup_{i=1}^{m}[\overline{\mu}_i-\delta_i,\ \overline{\mu}_i+\delta_i]\times\{\theta\})>0.$$

取 $r=\frac{1}{2}\min\{d_1,\ d_2\}$，$B_r=\{x\in E\,\big|\,\|x\|<r\}$，$U^*=U\backslash(\varDelta\times\overline{B}_r)$，则$U^*$是$\varDelta\times E$ 中的有界开集. 显然方程(2.27)在$\partial U^*\cap(\varDelta^*\times E)$中无解（其中$\partial U^*$表$U^*$在$\varDelta\times E$ 中的边界）. 因此，再由同伦不变性可知

$$\begin{aligned}&\deg(I-(\overline{\mu}_i+\delta_i)A,\ U^*(\overline{\mu}_i+\delta_i),\ 0)\\&\quad=\deg(I-(\overline{\mu}_{i+1}-\delta_{i+1})A,U^*(\overline{\mu}_{i+1}-\delta_{i+1}),\ 0)\\&\qquad\qquad(i=1,2,\cdots,m-1);\end{aligned}\tag{2.31}$$

$$\begin{aligned}&\deg(I-\lambda^*A,\ U^*(\lambda^*),0)\\&\quad=\deg(I-(\overline{\mu}_1-\delta_1)A,\ U^*(\overline{\mu}_1-\delta_1),0);\end{aligned}\tag{2.32}$$

$$\begin{aligned}&\deg(I-(\overline{\mu}_m+\delta_m)A,U^*(\overline{\mu}_m+\delta_m),0)\\&\quad=\deg(I-\lambda^{**}A,U^*(\lambda^{**}),0),\end{aligned}\tag{2.33}$$

其中$U^*(\lambda)=U^*\cap(\{\lambda\}\times E)$. 由 r 的选取知，对每一个$i=1,2,\cdots,m)$，有

$$\{\overline{\mu}_i+\delta_i\}\times B_r\subset U(\overline{\mu}_i+\delta_i),$$
$$\{\overline{\mu}_i-\delta_i\}\times B_r\subset U(\overline{\mu}_i-\delta_i).$$

注意到$\deg(I-(\overline{\mu}_i\pm\delta_i)A,B_r,0)=\gamma(\overline{\mu}_i\pm 0)$，故

$$\begin{aligned}&\deg(I-(\overline{\mu}_i\pm\delta_i)A,U(\overline{\mu}_i\pm\delta_i),0)\\&\quad=\deg(I-(\overline{\mu}_i\pm\delta_i)A,U^*(\overline{\mu}_i\pm\delta_i),0)\\&\qquad+\gamma(\overline{\mu}_i\pm 0).\end{aligned}\tag{2.34}$$

由 $(\lambda^*,\theta)\overline{\in}\overline{U}$，$(\lambda^{**},\theta)\overline{\in}\overline{U}$易知

$$\deg(I-\lambda^*A,U(\lambda^*),0)=\deg(I-\lambda^*A,U^*(\lambda^*),0), \tag{2.35}$$

$$\deg(I-\lambda^{**}A,U(\lambda^{**}),0)=\deg(I-\lambda^{**}A,U^*(\lambda^{**}),0). \tag{2.36}$$

由(2.30)～(2.36)式，经过计算可知

$$\deg(I-\lambda^{**}A,U(\lambda^{**}),0)=\deg(I-\lambda^*A,U(\lambda^*),0)+\sum_{i=1}^{m}[\gamma(\overline{\mu}_i-0)-\gamma(\overline{\mu}_i+0)]. \tag{2.37}$$

注意到当$\overline{\mu}_i$是A_θ'的奇代数重数特征值时，$r(\overline{\mu}_i+0)=-\gamma(\overline{\mu}_i-0)$，而当$\overline{\mu}_i$是$A_\theta'$的偶代数重数特征值时，$\gamma(\overline{\mu}_i+0)=\gamma(\overline{\mu}_i-0)$，由(2.37)式即知(i)的结论成立。

结论(ii)、(iii)、(iv)可仿证之。证完。

推论2.6 设 $A:E\to E$ 全连续，$A\theta=\theta$，A_θ'存在。设U是$[\lambda^*,+\infty)\times E$中的有界开集，$\partial U\cap L=\phi$。那么

(i)若 $(\lambda^*,\theta)\overline{\in}\overline{U}$，则

$$\deg(I-\lambda^*A,U(\lambda^*),0)\equiv 0\ (\mathrm{mod}2);$$

(ii)若 $(\lambda^*,\theta)\in U$，则

$$\deg(I-\lambda^*A,U(\lambda^*),0)\equiv 1\ (\mathrm{mod}2).$$

证 取 λ^{**}充分大，使$\overline{U}\cap(\{\lambda^{**}\}\times E)=\phi$，则$(\lambda^{**},\theta)\overline{\in}\overline{U}$。由定理2.5的结论(i)、(iii)即知推论2.6成立。证完。

推论2.7 设$A:E\to E$ 全连续，$A\theta=\theta$，A_θ'存在。设U是$(-\infty,\lambda^{**}]\times E$中的有界开集，$\partial U\cap L=\phi$。那么

(i)若$(\lambda^{**},\theta)\overline{\in}\overline{U}$，则

$$\deg(I-\lambda^{**}A,U(\lambda^{**}),0)\equiv 0\ (\mathrm{mod}2);$$

(ii)若 $(\lambda^{**},\theta)\in U$，则

$$\deg(I-\lambda^{**}A,U(\lambda^{**}),0)\equiv 1\ (\mathrm{mod}2).$$

这个推论的证明与推论2.6的证明类似.

附注 C.A.Stuart〔1〕中曾经使用了定理2.3，但没有明确提出这一定理，并且其证明是错误的. 孙经先〔6〕中明确提出并证明了定理2.3. 定理2.5是孙经先〔10〕、〔11〕提出的，其证明思想基于P.H.Rabinowitz〔1〕.

§3 非线性积分方程特征元的全局结构

设E是实 Banach 空间，$A:E\to E$ 全连续，$A\theta=\theta$，A 在θ处的 Fréchet 导算子A'_θ存在. 考察

$$x=\lambda Ax. \tag{3.1}$$

用L表示方程(3.1)的非平凡解集在$R^1\times E$中的闭包，即

$$L=\overline{\{(\lambda,x)\mid\lambda\in R^1,\ x\in E,\ x\neq\theta,\ x=\lambda Ax\}}. \tag{3.2}$$

定理3.1 设μ_0是A'_θ的奇（代数）重数特征值，C是L中含有(μ_0,θ)的连通分支. 那么或者

(i) C在$R^1\times E$中是无界的；或者

(ii) 存在A'_θ的偶数个奇重数特征值μ_i（$0\leqslant i\leqslant n$，μ_0含在内，n为奇数），使$(\mu_i,\theta)\in C$ ($0\leqslant i\leqslant n$).

证 设(i)不出现,即C在$R^1\times E$中是有界的.设μ_i($0\leqslant i\leqslant n$)是A'_θ的奇重特征值，满足$(\mu_i,\theta)\in C$. 仿照引理2.4证明中关于U的做法，可以做出$R^1\times E$中的有界开集U，满足

$$C\subset U,\ \partial U\cap L=\phi, \tag{3.3}$$

并且若μ是A'_θ的奇重特征值，$(\mu,\theta)\overline{\in}C$，则有$(\mu,\theta)\overline{\in}\overline{U}$.因为

U是$R^1\times E$中的有界开集，故存在$\lambda^*\in R^1$，$\lambda^{**}\in R^1$，使$\overline{U}\subset(\lambda^*,\lambda^{**})\times E$。显然$U(\lambda^*)=U\cap(\{\lambda^*\}\times E)=\phi$,$U(\lambda^{**})=U\cap(\{\lambda^{**}\}\times E)=\phi$。根据定理2.5结论(i)，并注意到$\deg(I-\lambda^{**}A,U(\lambda^{**}),0)=0$，$\deg(I-\lambda^*A,U(\lambda^*),0)=0$，可知必有$2J=0$.

$$\sum_{i=0}^{n}\gamma(\mu_i-0)=0. \qquad (3.4)$$

因为诸μ_i（$0\leqslant i\leqslant n$）都满足$|\gamma(\mu_i-0)|=1$，故n必为奇数。这表明存在A_θ'的偶数个奇重特征值μ_i（$0\leqslant i\leqslant n$）；使$(\mu_i,\theta)\in C$。证完。

注3.2 由定理3.1的证明可知，在定理条件下，若C有界，$\{\mu_i|0\leqslant i\leqslant n\}$是$A_\theta'$的所有满足$(\mu_i,\theta)\in C$的奇重特征值，则必有(3.4)式成立。

下面考虑一重特征值的情况。设μ是A_θ'的一重特征值。在这种情况下，存在$v\in E\backslash\{\theta\}$，$f\in E^*\backslash\{\theta\}$，使$v=\mu A_\theta' v$，$f=\mu(A_\theta')^*f$（其中$(A_\theta')^*$表示$A_\theta'$的共轭算子），并且$\|v\|=1$，$f(v)=1$。取定某$0<\alpha<1$，令

$$P_\alpha=\{(\lambda,x)\in R^1\times E\,|\,|f(x)|>\alpha\|x\|\}, \qquad (3.5)$$

$$P_\alpha^+=\{(\lambda,x)\in P_\alpha\,|\,f(x)>0\},\quad P_\alpha^-=P_\alpha\backslash P_\alpha^+. \qquad (3.6)$$

用B_r表示$R^1\times E$中以(μ,θ)为球心，r为半径的闭球。可以证明（见P.H.Rabinowitz〔1〕），存在$r>0$，使

$$(L\backslash\{(\mu,\theta)\})\cap B_r\subset P_\alpha, \qquad (3.7)$$

并且若$(\lambda,x)\in(L\backslash\{(\mu,\theta)\})\cap B_r$，则有

$$x=\beta v+w, \qquad (3.8)$$

其中$|\beta|>\alpha\|x\|$，$f(w)=0$，$|\lambda-\mu|=o(1)$，$w=o(|\beta|)$

($\beta\to 0$ 时).

对任给 $0<\varepsilon\leqslant r$，令 $D^+_{\mu,\varepsilon}$ 是$\{(\mu,\theta)\}\cup(L\cap B_\varepsilon\cap P^+_\alpha)$ 中含有(μ,θ) 的连通分支，$D^-_{\mu,\varepsilon}$ 是$\{(\mu,\theta)\}\cup(L\cap B_\varepsilon\cap P^-_\alpha)$中含有 (μ,θ) 的连通分支，设C_μ是 L 中含有 (μ,θ)的连通分支，$C^+_{\mu,\varepsilon}$是$\overline{C_\mu\backslash D^-_{\mu,\varepsilon}}$ 中含有(μ,θ)的连通分支，$C^-_{\mu,\varepsilon}$ 是 $\overline{C_\mu\backslash D^+_{\mu,\varepsilon}}$ 中含有(μ,θ)的连通分支．令

$$C^+_\mu=\overline{\bigcup_{0<\varepsilon\leqslant r}C^+_{\mu,\varepsilon}},\quad C^-_\mu=\overline{\bigcup_{0<\varepsilon\leqslant r}C^-_{\mu,\varepsilon}}. \tag{3.9}$$

则容易证明 C^+_μ 和 C^-_μ 都是连通的，$(\mu,\theta)\in C^+_\mu\cap C^-_\mu$，

$$C_\mu=C^+_\mu\cup C^-_\mu, \tag{3.10}$$

并且 C^+_μ和 C^-_μ均与 α 的选取无关．

定理3.3 设 μ 是A'_θ 的一重特征值，C^+_μ和C^-_μ如(3.9)式所定义．则或者

(i) C^+_μ和 C^-_μ都是无界的；或者

(ii) $C^+_\mu\cap C^-_\mu\neq(\mu,\theta)$．

这一定理的证明见 E.N.Dancer〔3〕.

注3.4 定理3.3的几何意义在于：如果μ 是A'_θ 的一重特征值，C_μ 是L通过 (μ,θ) 的连通分支，则或者 C_μ 可以分为两部分：C^+_μ和 C^-_μ，而 C^+_μ和 C^-_μ均通过(μ,θ)，并且均无界连通；或者C_μ 有一个"环状结构".

下面利用定理3.1和定理3.3，研究含振荡核的Hammerstein 型积分方程特征元的全局结构．

设 $[a,b]\subset R^1$，$\varphi(x)$ 是$[a,b]$上的连续函数，$x_0\in(a,b)$是 $\varphi(x)$ 的孤立零点，若在 x_0两侧，$\varphi(x)$ 取值符号相反，则称 x_0是 $\varphi(x)$的结点．令

$$N_i=\{\varphi(x)\in C[a,b]\,|\,\varphi(x)\text{在}(a,b)\text{中恰有 } i-1\text{个孤立零点，并且每一个零点都是 }\varphi(x)\text{的结点}\}, \tag{3.11}$$

$$N_i^+=\{\varphi(x)\in N_i \mid \lim_{x\to a+0}\operatorname{sign}\varphi(x)=1\},N_i^-=N_i\setminus N_i^+. \tag{3.12}$$

设 $k(x,y)$：$[a,b]\times[a,b]\to R^1$是连续的.如果对$[a,b]$上任何正连续函数 $q(y)$，线性积分方程

$$\varphi(x)=\lambda\int_a^b k(x,y)q(y)\varphi(y)dy \tag{3.13}$$

都具有递增的单重正特征值序列：$0<\mu_1<\mu_2<\cdots<\mu_n<\cdots$，$\lim_{n\to\infty}\mu_n=+\infty$,并且对应于 μ_i 的特征函数$\psi_i(x)\in N_i$，则$k(x,y)$称为是振荡核。

考察非线性 Hammerstein 型积分方程

$$\begin{aligned}\varphi(x)&=\lambda\int_a^b k(x,y)F(y,\varphi(y))\varphi(y)dy\\&=\lambda A\varphi(x).\end{aligned} \tag{3.14}$$

假设

1° $k(x,y)$是连续的振荡核；

2° $F(x,u)$：$[a,b]\times R^1\to R^1$是正的连续函数.

显然，由(3.14)式定义的算子A 映 $C[a,b]$入 $C[a,b]$全连续，A在 θ 处 Fréchet 可微，并且A'_θ 可以表为

$$A'_\theta\varphi(x)=\int_a^b k(x,y)F(y,0)\varphi(y)dy. \tag{3.15}$$

由于1°和2°，A'_θ 具有递增的单重正特征值序列：$0<\mu_1<\mu_2<\cdots<\mu_n<\cdots$，$\lim_{n\to\infty}\mu_n=+\infty$. 取 $E=C[a,b]$. 对每一个 μ_n，取 $\psi_n\in N_n^+$，使 $\psi_n=\mu_n A'_\theta\psi_n$. 设$C_{\mu_n}^+$和 $C_{\mu_n}^-$由（3.9）式定义. 记$C_n^+=C_{\mu_n}^+$，$C_n^-=C_{\mu_n}^-$.

定理3.5 设假设1°和2°成立. 则对每一个 n，C_n^+和 C_n^-在$R^1\times C[a,b]$ 中都是无界的.

证 令 C_n 是L通过(λ_n,θ)的连通分支. 令

$$D=\{(\lambda,\varphi)\in C_n \mid (\lambda,\varphi)\in(R^1\times N_n)\cup\{(\mu_n,\theta)\}\}. \quad (3.16)$$

其中N_n由(3.11)式定义．下面先证明D是C_n中的闭集．设$(\lambda_m,\varphi_m)\in D$，$(\lambda_m,\varphi_m)\to(\lambda,\varphi)$．因为$C_n$是闭集，故$(\lambda,\varphi)\in C_n$．由$\varphi_m\to\varphi$知，$k(x,y)F(y,\varphi_n(y))$在$[a,b]\times[a,b]$上一致收敛于$k(x,y)F(y,\varphi(y))$．根据第一章引理3.19知，在$R^1$中的任何有界闭集上，一致地有

$$\lim_{m\to\infty}D_m(\lambda)=D(\lambda) \quad (3.17)$$

其中$D_m(\lambda)$和$D(\lambda)$分别是$k(x,y)F(y,\varphi_m(y))$和$k(x,y)F(y,\varphi(y))$的Fredholm行列式．由于$k(x,y)F(y,\varphi_m(y))$和$k(x,y)F(y,\varphi(y))$的一切特征值都是单重的（根据假设1°和2°），故$D_m(\lambda)$和$D(\lambda)$的一切零点都是单重的．因此，由（3.17）式可知，$k(x,y)F(y,\varphi_m(y))$的第n个特征值必然收敛到$k(x,y)F(y,\varphi(y))$的第n个特征值．注意到λ_m是$k(x,y)F(y,\varphi_m(y))$对应于特征函数$\varphi_m(x)$的特征值，$\varphi_m(x)\in N_n$，故由假设1°和2°可知，λ_m是$k(x,y)F(y,\varphi_m(y))$的第n个特征值，故λ也是$k(x,y)F(y,\varphi(y))$的第n个特征值，而相应的特征函数$\varphi(y)\in N_n$．所以$(\lambda,\varphi)\in D$，即D是C_n中的闭集．

用和上面同样的证明思想，也可以证明D还是C_n中的开集．由于C_n是连通的，故必有$D=C_n$．因此，

$$C_n\subset(R^1\times N_n)\cup\{(\mu_n,\theta)\} \quad (3.18)$$

下面考察C_n^+和C_n^-．显然$C_n=C_n^+\cup C_n^-$．下证下列两式必有一个成立：

$$C_n^+\subset(R^1\times N_n^+)\cup\{(\mu_n,\theta)\}, \quad (3.19)$$

$$C_n^+\subset(R^1\times N_n^-)\cup\{(\mu_n,\theta)\}. \quad (3.20)$$

事实上，如果(3.19)、(3.20)两式均不成立，则由（3.18）式及C_n^+的定义和连通性知，必存在$(\lambda,\varphi)\neq(\mu_n,\theta)$，使

$$(\lambda,\varphi)\in C_n^+\cap(R^1\times\overline{N_n^+})\cap(R^1\cap\overline{N_n^-}). \qquad (3.21)$$

由（3.18)、(3.21)两式，并注意到$N_n^+\cap N_n^-=\phi$，知必然有$(\lambda,\varphi)=(\mu_n,\theta)$。产生矛盾。故(3.19)、(3.20)两式之一成立。

设(3.20)式成立，则当$(\lambda,\varphi)\in C_n^+$，$(\lambda,\varphi)$充分接近$(\mu_n,\theta)$时，有（参见(3.8)式）

$$\varphi=\beta\psi_n+w, \qquad (3.22)$$

其中$\beta=f(\varphi)>0$（f是$(A_\theta')^*$的对应于μ_n且满足$f(\psi_n)=1$的特征元），w满足$f(w)=0$，$w=0(|\beta|)$（$\beta\to0$时）。由于$\varphi\in N_n^-$，故由(3.22)式得

$$\psi_n+\frac{w}{\beta}=\frac{\varphi}{\beta}\in N_n^-.$$

令$\beta\to0$，并注意到$w=0(|\beta|)(\beta\to0$时$)$，可知$\psi_n\in\overline{N_n^-}$。但由$N_n^+$和$N_n^-$的定义知，$N_n^+\cap\overline{N_n^-}=\phi$。注意到$\psi_n\in N_n^+$。故产生矛盾。所以必有(3.19)式成立。

同理可以证得

$$C_n^-\subset(R^1\times N_n^-)\cup\{(\mu_n,\theta)\}. \qquad (3.23)$$

由（3.19)、(3.23)两式，并注意到$N_n^+\cap N_n^-=\phi$，故必有$C_n^+\cap C_n^-=(\mu_n,\theta)$。根据定理3.3可知，$C_n^+$和$C_n^-$都是无界的.证完。

注3.6 由定理3.5的证明过程可知下列结论成立：

(i) 对每一个n，都有

$$C_n\subset(R^1\times N_n)\cup\{(\mu_n,\theta)\}. \qquad (3.24)$$

由于当$n\neq m$时，$N_n\cap N_m=\phi$，故

$$C_n\cap C_m=\phi \quad (n\neq m); \qquad (3.25)$$

(ii)对每一个n，都有

$$C_n^+\subset(R^1\times N_n^+)\cup\{(\mu_n,\theta)\}, \qquad (3.26)$$

$$C_n^-\subset(R^1\times N_n^-)\cup\{(\mu_n,\theta)\}. \qquad (3.27)$$

注意到$N_n^+\cap N_n^-=\phi$，故$C_n^+\cap C_n^-=\{(\mu_n,\theta)\}$，并且$C_n^+$和$C_n^-$分别是$(R^1\times N_n^+)\cup\{(\mu_n,\theta)\}$和$(R^1\times N_n^-)\cup\{(\mu_n,\theta)\}$中的无界连通分支．

下面重新考察方程(3.1)．

定义3.7 设W是具有逆星形性质的收缩核，并满足下列两性质之一：

(i) 若$\lambda_1\geqslant\lambda_2>0$，则$\lambda_1W\supset\lambda_2W$；

(ii) 若$\lambda_1\geqslant\lambda_2>0$，则$\lambda_1W\subset\lambda_2W$；

那么称W是单调的具有逆星形性质的收缩核．

定理3.8 设第五章定理6.6的条件满足，并设其中的W是单调的具有逆星形性质的收缩核．则

(i) 0是A的唯一渐近歧点；

(ii)存在L的无界连通分支$C^+\subset(0,+\infty)\times E$，使得对任给$\lambda>0$，$C^+\cap(\{\lambda\}\times E)\neq\phi$；

(iii)存在L的无界连通分支$C^-\subset(-\infty,0)\times E$，使得对任给$\lambda<0$，$C^-\cap(\{\lambda\}\times E)\neq\phi$；

(iv) $\lim\limits_{\substack{\lambda\to 0\\(\lambda,x)\in C^+\cup C^-}}\|x\|=+\infty$．

证 下面仅就W满足定义3.7性质(i)的情况证明，另一种情况可以仿证．先证对任给$0<\lambda_1<\lambda_2<+\infty$，$L$在$[\lambda_1,\lambda_2]\times E$上有界．事实上，由第五章(6.1)式知，存在$\overline{R}>0$，使当$x\in\lambda_2W$，$\|x\|\geqslant\overline{R}$时，有$\|\lambda_1Ax\|>\|x\|$．取$R>\max\{\overline{R},R^*\}$，设存在$\lambda\in[\lambda_1,\lambda_2]$，$x_\lambda\in E$，使$(\lambda,x_\lambda)\in L$，$\|x_\lambda\|\geqslant R$．由于$\lambda A$映$\{x\in E\mid\|x\|\geqslant R^*\}$入$\lambda W$，故$x_\lambda\in\lambda W\subset\lambda_2W$．因此，$\|\lambda Ax_\lambda\|\geqslant\|\lambda_1Ax_\lambda\|>\|x_\lambda\|$，产生矛盾．故$L$在$[\lambda_1,\lambda_2]\times E$上有界．由于$A$：$E\to E$全连续，故$L\cap([\lambda_1,\lambda_2]\times E)$紧．取

$\{\alpha_n\}$ 和 $\{\beta_n\}$，满足

$$0<\cdots<\alpha_n<\cdots<\alpha_2<\alpha_1<\beta_1<\beta_2<\cdots<\beta_n<\cdots, \tag{3.28}$$

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_n=0,\quad \lim_{n\to\infty}\beta_n=+\infty, \tag{3.29}$$

并且诸$\{\beta_n\}$均不是A'_θ的特征值．下面证明：对每一个n，都存在L的连通分支C_n，满足

$$C_n\cap(\{\alpha_n\}\times E)\neq\phi,\quad C_n\cap(\{\beta_n\}\times E)\neq\phi. \tag{3.30}$$

设n固定．假设对每一个$(\beta_n,x)\in L\cap(\{\beta_n\}\times E)$，$L\cap([\alpha_n,\beta_n]\times E)$的通过$(\beta_n,x)$的连通分支$C_x$都有$C_x\cap(\{\alpha_n\}\times E)=\phi$．则仿引理2.4证明中$U$的做法，可以做出$[\alpha_n,\beta_n]\times E$中的有界开集$U_x$，满足$C_x\subset U_x$，$(\beta_n,\theta)\overline{\in}\overline{U}_x$，$\overline{U}_x\cap(\{\alpha_n\}\times E)=\phi$，并且$\partial U_x\cap L=\phi$．显然，在$\{\beta_n\}\times E$中，

$$\{U_x\cap(\{\beta_n\}\times E)\mid(\beta_n,x)\in L\cap(\{\beta_n\}\times E)\}$$

构成了$L\cap(\{\beta_n\}\times E)$的一个开覆盖．由于$L\cap(\{\beta_n\}\times E)$是紧集，故存在$\{U_x\cap(\{\beta_n\}\times E)\mid(\beta_n,x)\in L\cap(\{\beta_n\}\times E)\}$中的有限个开集$\{U_{x_i}\cap(\{\beta_n\}\times E)\mid(\beta_n,x_i)\in L\cap(\{\beta_n\}\times E,1\leqslant i\leqslant k\}$也覆盖了$L\cap(\{\beta_n\}\times E)$．令$U=\bigcup\limits_{1\leqslant i\leqslant k}U_{x_i}$，则$L\cap(\{\beta_n\}\times E)\subset U$，$(\beta_n,\theta)\overline{\in}\overline{U}$，$\partial U\cap L=\phi$．根据推论2.7，

$$\deg(I-\beta_nA,\ U\cap(\{\beta_n\}\times E),\theta)\equiv 0\ (\mathrm{mod}\,2). \tag{3.31}$$

由于β_n不是A'_θ的特征值，故

$$|\mathrm{ind}(I-\beta_nA,\theta)|=1. \tag{3.32}$$

由第五章定理6.6的证明可知

$$\mathrm{ind}(I-\beta_nA,\ \infty)=0. \tag{3.33}$$

但另一方面，由$L\cap(\{\beta_n\}\times E)\subset U$及(3.31)、(3.32)两式知，有

$$\mathrm{ind}(I-\beta_nA,\infty)\equiv 1\ (\mathrm{mod}\,2).$$

此与(3.33)式矛盾．因此，必存在某 $(\beta_n,x)\in L\cap(\{\beta_n\}\times E)$，使 $L\cap([\alpha_n,\beta_n]\times E)$ 的通过 (β_n,x) 的连通分支 C_x 满足 $C_x\cap(\{\alpha_n\}\times E)\neq\phi$．令 C_n 是 L 中含有 C_x 的连通分支，则对该 C_n 来说，(3.30)式成立．

根据定理2.3，在 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}C_n$ 中必存在连通分支 C^*，满足对任给 $\lambda>0$，有 $C^*\cap(\{\lambda\}\times E)\neq\phi$．注意到 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}C_n\subset L$，故 $C^*\subset L$．令 C^+ 是 L 中含有 C^* 的连通分支，则 C^+ 满足：任给 $\lambda>0$，$C^+\cap(\{\lambda\}\times E)\neq\phi$．由于 $L\cap(\{0\}\times E)=\phi$，故 $C^+\subset(0,+\infty)\times E$．结论(ii)获证．结论(iii)可仿证．由第五章定理6.6结论(ii)的证明知，结论(iv)成立．于是0是 A 的渐近歧点．由于对任给 $0<\alpha<\beta<+\infty$，$L\cap([\alpha,\beta]\times E)$ 有界，故任给 $\lambda>0$，都不是 A 的渐近歧点．同理，任给 $\lambda<0$ 也不是 A 的歧点，结论(i)获证．证完．

推论3.9 设第五章推论6.8的条件满足，并设其中的 W 是单调的具有逆星形性质的收缩核，则

(i) 0是 A 的唯一非负渐近歧点；

(ii) 存在 L 的无界连通分支 $C^+\subset(0,+\infty)\times E$，使对任给 $\lambda>0$，$C^+\cap(\{\lambda\}\times E)\neq\phi$；

(iii) $\lim\limits_{\substack{\lambda\to0^+\\(\lambda,x)\in C^+}}\|x\|=+\infty$．

下面利用定理3.8和推论3.9考察非线性 Hammerstein 型积分方程

$$\varphi(x)=\lambda\int_G k(x,y)f(y,\varphi(y))dy=\lambda A\varphi(x). \quad (3.34)$$

定理3.10 设第五章定理6.12的条件成立．用 L 表示方程(3.34)的非平凡解集在 $R^1\times C(G)$ 中的闭包．则

（i）0是 A 的唯一渐近歧点；

(ii)存在L的无界连通分支 $C^+\subset(0,+\infty)\times C(G)$，使对任给 $\lambda>0$，$C^+\cap(\{\lambda\}\times C(G))\neq\phi$；

(iii)存在 L 的无界连通分支$C^-\subset(-\infty,0)\times C(G)$，使对任给 $\lambda<0$，$C^-\cap(\{\lambda\}\times C(G))\neq\phi$；

(iv) $\lim\limits_{\substack{\lambda\to 0\\(\lambda,\varphi)\in C^+\cup C^-}}\|\varphi\|=+\infty$。

证 由第五章定理6.12的证明及定理3.8知，只需证明由下式

$$W=\left\{\varphi\in C(G)\left|\int_{G_1}h(x)\,[\varphi(x)+\varphi_0(x)]dx\geqslant\delta\|\varphi+\varphi_0\|\right.\right\}$$

定义的W满足：对一切 $0<\lambda_2\leqslant\lambda_1$，有 $\lambda_2W\subset\lambda_1W$.事实上，对固定的 $\lambda\neq 0$，有

$$\lambda W=\left\{\lambda\varphi\left|\int_{G_1}h(x)[\varphi(x)+\varphi_0(x)]dx\geqslant\delta\|\varphi+\varphi_0\|\right.\right\}$$

$$=\left\{\varphi\left|\operatorname{sign}\lambda\cdot\int_{G_1}h(x)[\varphi(x)+\lambda\varphi_0(x)]dx\right.\right.$$
$$\left.\geqslant\delta\|\varphi+\lambda\varphi_0\|\right\}.$$

对任给 $0<\lambda_2\leqslant\lambda_1$，当 $\varphi\in\lambda_2W$时，由上式知

$$\int_{G_1}h(x)[\varphi(x)+\lambda_1\varphi_0(x)]\,dx=\int_{G_1}h(x)[\varphi(x)$$
$$+\lambda_2\varphi_0(x)]dx+(\lambda_1-\lambda_2)\int_{G_1}h(x)\varphi_0(x)dx$$
$$\geqslant\delta\|\varphi+\lambda_2\varphi_0\|+(\lambda_1-\lambda_2)\delta\|\varphi_0\|$$
$$\geqslant\delta\|\varphi+\lambda_1\varphi_0\|,$$

即 $\varphi\in\lambda_1W$. 因此 $\lambda_2W\subset\lambda_1W$.证完.

定理3.11 设 (1)$k(x,y)$ 在$G\times G$上连续（不要求非负），并且存在闭集 $G_1\subset G$，$\delta>0$，使得

$$\int_{G_1} k(x,y)dx > 0 \qquad (\forall y \in G_1), \tag{3.35}$$

$$\int_{G_1} k(x,y)dx \geqslant \delta |k(\tau,y)| \quad (\forall \tau, y \in G); \tag{3.36}$$

（2）$f(x,u)$ 下方有界，并且对 $x \in G_1$ 一致成立

$$\lim_{u \to +\infty} \frac{f(x,u)}{u} = +\infty; \tag{3.37}$$

（3）$f_u'(x,0)$ 存在连续。

则下列结论成立：

(i) 0 是A的唯一非负渐近歧点；

(ii)存在L的无界连通分支 $C^+ \subset (0,+\infty) \times C(G)$，使对任给 $\lambda > 0$，有 $C^+ \cap (\{\lambda\} \times C(G)) \neq \phi$；

(iii) $\lim\limits_{\substack{\lambda \to 0^+ \\ (\lambda,\varphi) \in C^+}} \|\varphi\| = +\infty$。

证 取W同定理3.10的证明，其中

$$h(x) = \begin{cases} 1, & \text{当 } x \in G_1 \text{时}, \\ 0, & \text{当} x \in G \backslash G_1 \text{时}, \end{cases}$$

则仿第五章定理6.12的证明，可知对每一个固定的 $\lambda > 0$，有

$$\lim_{\substack{\varphi \in \lambda W \\ \|\varphi\| \to +\infty}} \frac{\|A\varphi\|}{\|\varphi\|} = +\infty.$$

仿定理3.10的证明（并利用推论3.9），即知本定理的结论成立.证完.

考察含振荡核的 Hammerstein 型非线性积分方程 3.14.设 μ_n, C_n^+, C_n^-, N_n^+, N_n^-的意义如定理3.5前面的叙述所说.

定理3.12 设：(1)$k(x,y)$：$[a,b] \times [a,b] \to R^1$是非负连续的振荡核，并存在 $G_0 \subset G$，$\text{mes} G_0 \neq 0$，$\delta > 0$，使得

$$k(x,y) \geqslant \delta k(\tau,y), \quad \forall x \in G_0, y, \tau \in G, \tag{3.38}$$

$$k(x,y)\geqslant\delta k(x,\tau),\quad \forall y\in G_0, x,\tau\in G; \qquad (3.39)$$

(2) $F(x,u)$：$[a,b]\times R^1\to R^1$是正的连续函数；

(3) $F(x,u)u$ 下方有界，并且对 $x\in G_0$，一致有

$$\lim_{u\to+\infty} F(x,u)u=+\infty; \qquad (3.40)$$

则下列结论成立：

(i)对每个$n\geqslant 1$，当 $\lambda>\mu_n$ 时，$C_n^-\cap(\{\lambda\}\times(C[a,b]\backslash\{\theta\}))\neq\phi$；

(ii)对每个 $n\geqslant 2$，当 $\lambda>\mu_n$ 时，$C_n^+\cap(\{\lambda\}\times(C[a,b]\backslash\{\theta\}))\neq\phi$.

证 设 n 固定，$\lambda>\mu_n$ 给定．根据第五章引理6.13，存在 $R=R(\lambda)>0$，使得若（$\bar\lambda$，φ）为方程3.14的解，$0<\bar\lambda<\lambda$，$\|\varphi\|\geqslant R$，就必有 $\varphi\in P=\{\varphi\in C[a,b]\,|\,\varphi(x)\geqslant 0\}$．因此，由 N_n^+和N_n^-的定义及（3.26）、（3.27）两式知

$$C_n^+\cap([0,\lambda]\times\{\varphi\in C[a,b]\,|\,\|\varphi\|=R\})=\phi \quad (n\geqslant 2), \qquad (3.41)$$

$$C_n^-\cap([0,\lambda]\times\{\varphi\in C[a,b]\,|\,\|\varphi\|=R\})=\phi \quad (n\geqslant 1). \qquad (3.42)$$

又显然当 $\lambda=0$ 时方程（3.14）仅有零解，且0不是 A 的歧点，故易知

$$C_n^+\cap(\{0\}\times C[a,b])=\phi,\quad C_n^-\cap(\{0\}\times C[a,b])=\phi. \qquad (3.43)$$

由(3.41)、(3.42)、(3.43)及 C_n^+和 C_n^-的无界连通性，即知定理的结论成立．证完

推论3.13 在定理3.12的条件下，对每一个n，当 $\lambda>\mu_n$时，方程（3.14）至少有$2n-1$个非平凡解．

定理3.14 在定理3.12的条件下，若把（3.40）式加强为

$$\lim_{u\to+\infty} F(x,u)=+\infty \quad (\text{关于}x\in G_0\text{一致}), \tag{3.44}$$

并进一步假定

$$\int_{G_0} k(x,y)dx>0, \quad \forall y\in G_0. \tag{3.45}$$

则定理3.12的结论(i)、(ii)成立，且有

(iii)对任给 $0<\lambda<\mu_1$，方程（3.14）至少有一个正解 $\varphi_\lambda\in N_1^+$.

证 若C_1^+满足

$$C_1^+\cap(\{\lambda\}\times C(G))\neq\phi \quad (0<\lambda<\mu_1), \tag{3.46}$$

注意到 $C_1^+\cap((0,\mu_1)\times\{\theta\})=\phi$, $C_1^+\subset\{\varphi\in C(G)\,|\,\varphi(x)\geqslant 0\}$，即知结论(iii)成立．下设$C_1^+$不满足(3.46)式．

由(3.38)式知

$$\int_{G_0} k(x,y)dx\geqslant\int_{G_0}\delta k(\tau,y)dx\geqslant\delta\,\mathrm{mes}\,G_0 k(\tau,y).$$

故知定理3.11的全部条件满足．根据定理3.11，L存在无界连通分支 $C^*\subset(0,+\infty)\times C(G)$，使

$$C^*\cap(\{\lambda\}\times C(G))\neq\phi \quad (\forall\lambda>0), \tag{3.47}$$

并且

$$\lim_{\substack{\lambda\to 0^+\\ (\lambda,\varphi)\in C^*}}\|\varphi\|=+\infty. \tag{3.48}$$

由（3.48）式及第五章引理6.13知，当λ是充分小的正数时，若 $(\lambda,\varphi_\lambda)\in C^*$，就必有 $\varphi_\lambda(x)\geqslant 0$．由 $k(x,y)$的振荡性知

$$\varphi_\lambda\in N_1^+. \tag{3.49}$$

由（3.10）式及 C_1^+不满足(3.46)式，并注意到C^*满足(3.47)式，即可知 $C^*\neq C_1^+\cup C_1^-=C_1$．故 $C^*\cap C_1=\phi$．由(3.49)式，并仿（3.18）式的证明知（注意$(\mu_1,\theta)\overline{\in}C^*$）

$$C^*\subset(0,+\infty)\times N_1. \tag{3.50}$$

下证

$$C^* \subset (0,+\infty)\times N_1^+. \tag{3.51}$$

若不然，则$C^*\cap((0,+\infty)\times N_1^+)$ 和 $C^*\cap((0,+\infty)\times N_1^-)$ 都非空．由C^*的连通性知，$(C^*\cap([0,+\infty)\times\overline{N_1^+}))\cap(C^*\cap([0,+\infty)\times\overline{N_1^-}))$非空（否则$C^*\cap([0,+\infty)\times\overline{N_1^+})$和$C^*\cap([0,+\infty)\times\overline{N_1^-})$ 是 C^*的不相交的闭集，且 C^* 为该两个闭集之并，与 C^*的连通性矛盾）．注意到$\overline{N_1^+}\cap\overline{N_1^-}=\{\theta\}$，故 $C^*\cap([0,+\infty)\times\{\theta\})$非空，此与(3.50) 式矛盾．这一矛盾表明（3.51）式成立（注意(3.49) 式）．因此，对任给 $\lambda>0$，方程（3.14）都有正解 $\varphi_\lambda\in N_1^+$．证完．

最后，我们给出著名的 Birkhoff－Kellogg 定理的全局推广．它们的基本证明思想与定理3.8类似．

定理3.15 设E是无穷维 Banach空间，$A:E\to E$全连续，$A\theta=\theta$，A'_θ 存在．设存在E中的有界开集Ω，$\theta\in\Omega$，使

$$\inf_{x\in\partial\Omega}\|Ax\|>0. \tag{3.52}$$

则L（由(3.2)式定义）必有无界连通分支$C\subset(0,+\infty)\times E$，并存在 $\lambda>0$，使得

(i) $C\cap([\lambda,+\infty)\times\Omega)$ 有无界连通分支；

(ii) $C\cap(((0,+\infty)\times E)\backslash((\lambda,+\infty)\times\overline{\Omega}))$ 有无界连通分支；

(iii) $C\cap([\lambda,+\infty)\times\partial\Omega)=\phi$.

定理3.16 设E是无穷维 Banach 空间，A: $E\to E$ 全连续．设存在 E 中的有界开集Ω，$\theta\in\Omega$，使（3.52）式成立．则 L 必有无界连通分支 C，并存在 $\lambda>0$，使得

(i) $C\cap(((0,+\infty)\times E)\backslash((\lambda,+\infty)\times\overline{\Omega}))$ 有无界连通分支；

(ii)$C\cap([\lambda,+\infty)\times\partial\Omega)=\phi$, $C\cap\{(0,x)|x\in E,$

$x\neq\theta\}=\phi$;

并且下列两种情况之一出现:

(iii)$C\cap([\lambda,+\infty)\times\Omega)$有无界连通分支;

(iv)$C\cap\{(\lambda,\theta)|\lambda\geqslant 0, \theta=\lambda A\theta\}\neq\phi$.

附注 关于非线性算子特征值问题的全局理论,最早由P. H.Rabinowitz[1]开始研究. 定理3.1和定理3.3属于P. H. Rabinowitz[1]和E.N.Dancer[3]. 定理3.5是P.H.Rabinowitz[1]证明的. 定理3.8定理3.10、定理3.11是孙经先[11](10]证明的.定理3.12和定理3.14的证明思想已在孙经先[11]、[8]中提出. 定理3.15和定理3.16见郭大钧、孙经先[1], 以及孙经先[5].

与全局理论有关的文献, 还有H. Amann[1], M. G. Crandall 和 P.H.Rabinowitz[1][3], E.N.Dancer[1][2], P.H.Rabinowitz[2], C.A.Stuart[1], R. E. L. Turner[1][2], 孙经先[11][5][10].

关于含振荡核Hammerstein型积分方程的研究, 可见S. V.Parter[1], G.H.Pimbley[1], S.Karlin[1], M.G. Crandall 和P.H.Rabinowitz[3].

第七章　非线性积分方程的多重解——变分方法

§1　Mountain Pass引理的应用

本节利用 Mountain Pass 引理（见附录定理 3.8）研究 Hammerstein 型非线性积分方程

$$\varphi(x)=\int_G k(x,y)f(y,\varphi(y))dy=A\varphi \tag{1.1}$$

非零解的存在性，这里，G 是 R^N 中的可测集，$\mathrm{mes}\,G<+\infty$. 设

1° $k(x,y)$是正定对称核，由 $k(x,y)$ 确定的线性积分算子K映 L_q入 L_p 全连续（$p>2$，$p^{-1}+q^{-1}=1$），并且K的谱半径 $r(K)\neq 0$；

2°存在 $a>0$ 和 $b>0$，使对任给 $x\in G$，$u\in R^1$，

$$|f(x,u)|\leqslant a+b|u|^{p-1}\,; \tag{1.2}$$

3°存在 $0\leqslant\tau<\frac{1}{2}$及$M>0$，使对任给 $x\in G$，$|u|\geqslant M$，有

$$F(x,u)=\int_0^u f(x,v)dv\leqslant\tau uf(x,u); \tag{1.3}$$

4°存在 $\varepsilon_0'>0$ 及 $\delta>0$，使对任给 $x\in G$，$0<|u|<\delta$，有

$$\frac{f(x,u)}{u} \leqslant \lambda_1 - \varepsilon_0', \tag{1.4}$$

其中，λ_1是k的最小特征值；

5°存在 $\varepsilon_0''>0$及$R>0$，使得对任给$x\in G$，$|u|\geqslant R$，有

$$\frac{f(x,u)}{u} \geqslant \lambda_1 + \varepsilon_0''. \tag{1.5}$$

定理1.1 设1°～5°满足，则方程(1.1)在L_p中至少有一个非平凡解.

证 令H是K的正平方根. 由1°知H映L_2入L_p全连续，H^*映L_q入L_2全连续. 由2°知$\mathrm{f}\varphi=f(x, \varphi(x))$映$L_p$入$L_q$连续、有界. 定义

$$\Psi(\psi)=\frac{1}{2}\|\psi\|^2-\int_G dx\int_0^{H\psi} f(x,v)dv. \tag{1.6}$$

则由第三章引理2.1及引理2.3知，Ψ映L_2入R^1，并且

$$\Psi'(\psi)=\psi-H^*\mathrm{f}H\psi. \tag{1.7}$$

下证$\Psi(\psi)$满足Mountain Pass引理的条件. 取$\varepsilon_0=\min\{\varepsilon_0',\varepsilon_0''\}$. 由4°知，对任给$x\in G$，$|u|<\delta$，有

$$F(x,u)\leqslant\frac{1}{2}(\lambda_1-\varepsilon_0)u^2. \tag{1.8}$$

由2°知，对任给$x\in G$，$u\in R^1$，有

$$F(x,u)\leqslant a|u|+\frac{b}{p}|u|^p. \tag{1.9}$$

由(1.8)、(1.9)两式知，存在$b_1>0$，使对任给$x\in G, u\in R^1$，有

$$F(x,u)\leqslant\frac{1}{2}(\lambda_1-\varepsilon_0)u^2+b_1|u|^p. \tag{1.10}$$

因此，对$\psi\in L_2$，有

$$\int_G F(x,H\psi)\,dx \leqslant \frac{1}{2}(\lambda_1-\varepsilon_0)\int_G [H\psi(x)]^2 dx$$

$$+b_1\int_G |H\psi(x)|^p dx$$

$$=\frac{1}{2}(\lambda_1-\varepsilon_0)\ (K\psi,\psi)+b_1\|H\psi\|_p^p$$

$$\leqslant \frac{1}{2}(\lambda_1-\varepsilon_0)\|K\|\ \|\psi\|^2+b_1\|H\|^p\|\psi\|^p$$

$$=\frac{\lambda_1-\varepsilon_0}{2\lambda_1}\|\psi\|^2+b_1\|H\|^p\|\psi\|^p, \tag{1.11}$$

其中$\|K\|$表示K作为映 L_2入L_2的线性算子时的范数，$\|H\|$表示H做为映 L_2入L_p 的线性算子时的算子范数．由(1.6)、(1.11)两式知，对任给 $\psi\in H$，有

$$\Psi(\psi)\geqslant\frac{\varepsilon_0}{2\lambda_1}\|\psi\|^2-b_1\|H\|^p\|\psi\|^p.$$

因为 $p>2$，故存在充分小的 $r>0$，使

$$\inf_{\psi\in\partial B_r}\Psi(\psi)>0\ . \tag{1.12}$$

其中 $B_r=\{\psi\in L_2\,|\,\|\varphi\|<r\}$。

令 ψ_1是K对应于 λ_1的就范特征函数．考察

$$\Phi(t)=\Psi(t\psi_1) \tag{1.13}$$

令 $\mu=\lambda_1^{-\frac{1}{2}}$,注意到 $H\psi_1=K^{\frac{1}{2}}\psi_1=\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}\psi_1=\mu\psi_1$，故

$$\Phi(t)=\frac{t^2}{2}\|\psi_1\|^2-\int_G F(x,tH\psi_1)dx$$

$$=\frac{t^2}{2}-\int_G F(x,t\mu\psi_1)dx \tag{1.14}$$

取 $0<t_1<t_2<\cdots<t_n<\cdots$, $t_n\to+\infty$。令

$$D_n=\{x\in G\,|\,t_n\mu|\psi_1(x)|\geqslant R\},$$

$$D_n^{(1)}=\{x\in G\,|\,t_n\mu\psi_1(x)\geqslant R\},$$
$$D_n^{(2)}=\{x\in G\,|\,t_n\mu\psi_1(x)\leqslant -R\},$$
则 $D_n=D_n^{(1)}\cup D_n^{(2)}$，$D_n^{(1)}\cap D_n^{(2)}=\phi$。由5°知
$$f(x,u)\geqslant(\lambda_1+\varepsilon_0)u,\quad \forall x\in G,\ u\geqslant R$$
$$f(x,u)\leqslant(\lambda_1+\varepsilon_0)u,\quad \forall x\in G,\ u\leqslant -R$$
于是，
$$\int_G F(x,t_n\mu\psi_1)\,dx=\int_{D_n^{(1)}}dx\left(\int_0^R\right.$$
$$\left.+\int_R^{t_n\mu\psi_1(x)} f(x,v)dv\right)$$
$$+\int_{D_n^{(2)}}dx\left(\int_0^{-R}+\int_{-R}^{t_n\mu\psi_1(x)} f(x,v)dv\right)$$
$$+\int_{G\setminus D_n}dx\int_0^{t_n\mu\psi_1(x)} f(x,v)dv$$
$$\geqslant\int_{D_n^{(1)}}dx\int_R^{t_n\mu\psi_1(x)}(\lambda_1+\varepsilon_0)v\,dv$$
$$-\int_{D_n^{(1)}}dx\int_0^R|f(x,v)|dv$$
$$-\int_{D_n^{(2)}}dx\int_{t_n\mu\psi_1(x)}^{-R}(\lambda_1+\varepsilon_0)v\,dv$$
$$-\int_{D_n^{(2)}}dx\int_{-R}^0|f(x,v)|dv$$
$$-\int_{G\setminus D_n}dx\int_{-R}^R|f(x,v)|dv$$
$$\geqslant\frac{\lambda_1+\varepsilon_0}{2}\int_{D_n^{(1)}}(t_n^2\mu^2[\psi_1(x)]^2-R^2)dx$$

$$-\int_{D_n} dx \int_0^R |f(x,v)|dv$$

$$+\frac{\lambda_1+\varepsilon_0}{2}\int_{D_n^{(2)}}(t_n^2\mu^2[\psi_1(x)]^2-R^2)dx$$

$$-\int_{D_n} dx\int_{-R}^0 |f(x,v)|dv$$

$$-\int_{G\setminus D_n} dx \int_{-R}^R |f(x,v)|dv$$

$$=\frac{\lambda_1+\varepsilon_0}{2}\int_{D_n}(t_n^2\mu^2[\psi_1(x)]^2-R^2)dx$$

$$-\int_G dx\int_{-R}^R |f(x,v)|dv$$

$$\geqslant\frac{(\lambda_1+\varepsilon_0)t_n^2}{2\lambda_1}\int_{D_n}[\psi_1(x)]^2dx-M_1, \qquad (1.15)$$

其中

$$M_1=\left[\frac{\lambda_1+\varepsilon_0}{2}R^2+2aR+\frac{2b}{p}R^p\right]\text{mes}G.$$

令 $D=\{x\in G|\psi_1(x)\neq 0\}$，则

$$\int_D [\psi_1(x)]^2dx=\int_G [\psi_1(x)]^2dx=\|\psi_1\|=1.$$

显然，$D_1\subset D_2\subset\cdots\subset D_n\subset\cdots$，$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} D_n=D$，$\lim\limits_{n\to\infty}$ mes $D_n=\text{mes}D$.
所以存在$N_0>0$，使对任给 $n>N_0$，有

$$\int_{D_n}[\psi_1(x)]^2dx>\int_D[\psi_1(x)]^2dx-\frac{\varepsilon_0}{2(\lambda_1+\varepsilon_0)}$$

$$=1-\frac{\varepsilon_0}{2(\lambda_1+\varepsilon_0)}. \qquad (1.16)$$

由(1.14)、(1.15)、(1.16)三式知

$$\Phi(t_n)=\frac{t_n^2}{2}-\int_G F(x,t_n\mu\psi_1)dx$$

$$\leqslant\frac{t_n^2}{2}-\frac{(\lambda_1+\varepsilon_0)t_n^2}{2\lambda_1}\int_{D_n}[\psi_1(x)]^2dx+M_1$$

$$\leqslant-\frac{\varepsilon_0}{4\lambda_1}t_n^2+M_1.$$

因此，必存在 n_0，使 $\|t_{n0}\psi_1\|=t_{n0}>r$，

$$\Psi(t_{n0}\psi_1)=\Phi(t_{n0})\leqslant 0\,. \tag{1.17}$$

又显然 $\Psi(\theta)=0$，故由(1.12)、(1.17)式可得

$$\inf_{x\in\partial B_r}\Psi(\psi)>\max\{\Psi(\theta),\ \Psi(t_{n0}\psi_1)\}. \tag{1.18}$$

下面验证Ψ满足 $P.S$ 条件．设$\{h_n\}\subset L_2$，使得$|\Psi(h_n)|\leqslant\beta$ $(n=1,2,\cdots)$，并且 $\Psi'(h_n)\to\theta$．令

$$G_n=\{x\in G\,\big|\,|Hh_n(x)|\geqslant M\},$$

则由2°、3°及(1.9)式可得

$$\beta\geqslant\Psi(h_n)=\frac{1}{2}\|h_n\|^2-\int_G F(x,Hh_n(x))dx$$

$$\geqslant\frac{1}{2}\|h_n\|^2-\int_{G_n}F(x,Hh_n(x))dx-M_2$$

$$\geqslant\frac{1}{2}\|h_n\|^2-\tau\int_{G_n}f(x,Hh_n(x))Hh_n(x)dx-M_2$$

$$\geqslant\frac{1}{2}\|h_n\|^2-\tau\int_G f(x,Hh_n(x))Hh_n(x)dx-M_3, \tag{1.19}$$

其中，M_2和M_3是与 n 无关的常数．由(1.7)式知

$$(\Psi'(h_n),\ h_n)=(h_n-H^*\mathrm{f}Hh_n,\ h_n)$$

$$=\|h_n\|^2-(\mathrm{f}Hh_n,Hh_n)$$

$$=\|h_n\|^2-\int_G f(x,Hh_n(x))Hh_n(x)dx. \qquad (1.20)$$

故利用(1.19)、(1.20)两式可得

$$\beta\geqslant\left(\frac{1}{2}-\tau\right)\|h_n\|^2+\tau(\Psi'(h_n),h_n)-M_3$$

$$\geqslant\left(\frac{1}{2}-\tau\right)\|h_n\|^2-\tau\|\Psi'(h_n)\|\|h_n\|-M_3,$$

$$(n=1,2,\cdots). \qquad (1.21)$$

这表明$\{h_n|n=1,2,\cdots\}$ 是L_2中的有界集。因为L_2是Hilbert空间，故必有$\{h_n\}$的某子列 $\{h_{n_i}\}$ 弱收敛于某$h_0\in L_2$。因为H：$L_2\to L_p$是全连续的，故

$$\lim_{n\to\infty}\|Hh_{n_i}-Hh_0\|=0.$$

因为f：$L_p\to L_q$是连续的，故由(1.20)式可得

$$\lim_{i\to\infty}\|h_{n_i}\|^2=(\mathrm{f}Hh_0,\ Hh_0). \qquad (1.22)$$

另一方面，

$$(\Psi'(h_{n_i}),\ h_0)=(h_{n_i}-H^*\mathrm{f}Hh_{n_i},\ h_0)$$

$$=(h_{n_i},\ h_0)-(\mathrm{f}Hh_{n_i},\ Hh_0)$$

令$n_i\to\infty$，并注意到$\Psi'(h_{n_i})\to\theta$，可得

$$\|h_0\|^2=(\mathrm{f}Hh_0,\ Hh_0). \qquad (1.23)$$

由 (1.22)、(1.23) 两式知$\lim\limits_{i\to\infty}\|h_{n_i}\|=\|h_0\|$。故

$$\lim_{n\to\infty}\|h_{n_i}-h_0\|^2=\lim_{n\to\infty}[\|h_{n_i}\|^2-2(h_{n_i},h_0)+\|h_0\|^2]$$

$$=\|h_0\|^2-2\|h_0\|^2+\|h_0\|^2=0.$$

即$h_{n_i}\to h_0$。因此Ψ满足P. S条件。根据 Mountain Pass 引理，(见附录定理3.8) 存在$\psi^*\in L_2$，$\psi^*\neq\theta$，使

$$\psi^*=H^*\mathrm{f}H\psi^*. \qquad (1.24)$$

由4°及 Caratheodory 条件可知，对几乎一切$x\in G$，有$f(x,0)=0$.故 f$\theta=\theta$.若$H\psi^*=\theta$，则由(1.24)式可知$\psi^*=\theta$，产生

矛盾．故 $H\psi^* \neq \theta$．在（1.24）式两端作用 H，即知 $H\psi^* = HH^*fH\psi^*$．因此，若令 $\varphi^* = H\psi^*$，则 $\varphi^* \neq \theta$，并且 $\varphi^* = HH^*f\varphi^* = Kf\varphi^* = A\varphi^*$．故 φ^*是方程(1.1) 的非平凡解．证完．

推论1.2 设 $k(x,y) \geq 0$．设假设1°～4°满足，又设存在 $\varepsilon_0'' > 0$ 及 $R > 0$，使对任给 $x \in G$，$u \geq R$，有

$$\frac{f(x,u)}{u} \geq (\lambda_1 + \varepsilon_0''). \tag{1.25}$$

则方程(1.1)至少有一个非平凡解．

证 因为 $k(x,y) \geq 0$，故根据第五章定理2.5，并注意到 $\lambda_1 = r^{-1}(K)$，可知必存在 $\psi_1(x) \geq 0$，$\|\psi_1\| = 1$，使得 $\psi_1 = \lambda_1 K\psi_1$．取该 ψ_1定义(1.13)式，则显然定理1.1证明中的 $D_n^{(2)} = \phi$．检查(1.15)式的证明，可知在这种情况下，只要(1.25) 式成立，就可以保证(1.15)式成立．因此，由定理 1.1 的证明，即知方程(1.1)必有一非平凡解．证完．

注1.3 在推论1.2中，(1.25)式只要求对 $u \geq R$成立，而在定理1.1中，则要求(1.5)式对 $u \geq R$ 和 $u \leq -R$ 都成立．由推论1.2的证明还容易得知：如果 $k(x, y) \geq 0$，假设 1°～4° 成立，并且存在 $\varepsilon_0'' > 0$ 及 $R > 0$，使对任给 $x \in G$，$u \leq -R$，(1.25)成立，则方程 (1.1) 也至少有一非平凡解．在这种情况下，取$\psi_1(x) \geq 0$，$\|\psi_1\| = 1$，使 $\psi_1 = \lambda_1 K\psi_1$，并用

$$\Phi(t) = \Psi(-t\psi_1)$$

代替(1.13)式．则用与推论1.2相似的证明即可知方程(1.1)至少有一非平凡解．

下面讨论拟正定核的情况．设

6° $k(x, y)$是拟正定对称核，并且由 $k(x, y)$确定的线性

积分算子 K 映 L_q 入 L_p 全连续，这里 $p>2$，$p^{-1}+q^{-1}=1$；

7°存在 $\varepsilon_0>0$ 及 $\delta>0$，使对任给 $x\in G$，$0<|u|<\delta$，有

$$\frac{f(x,u)}{u}\leqslant\lambda_1-\varepsilon_0 \tag{1.26}$$

这里 $\lambda_1<0$ 是 K 的最小特征值；

8°存在 $\eta>0$ 及 $R>0$，使对任给 $x\in G$，$|u|\geqslant R$，有

$$\frac{f(x,u)}{u}\geqslant\eta. \tag{1.27}$$

定理1.4 设2°、3°、6°、7°、8°满足，则方程（1.1）在 L_p 中至少有一个非平凡解.

证 设拟正定核 $k(x,y)$ 的特征值集合为 $\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m,\lambda_{m+1},\cdots\}$，其中 $\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots\leqslant\lambda_m<0<\lambda_{m+1}\leqslant\cdots$. 取 λ，使 $\lambda>|\lambda_1|$，令 $R_1=\left(K+\frac{1}{\lambda}I\right)^{-1}$，

$$K_1=KR_1, \tag{1.28}$$

则 K_1 是正定自共轭线性算子，K_1 映 L_q 入 L_p 全连续，并且 K_1 的最小特征值为 $1+\frac{\lambda_1}{\lambda}>0$（参见第三章§3）.令

$$f_1(x,u)=u+\frac{1}{\lambda}f(x,u).$$

根据第三章引理3.8，只需证明方程

$$\varphi=K_1f_1\varphi \tag{1.29}$$

在 L_p 中有非平凡解即可.

由2°知

$$\begin{aligned}|f_1(x,u)|&\leqslant|u|+\frac{a}{\lambda}+\frac{b}{\lambda}|u|^{p-1}\\&\leqslant\left(1+\frac{a}{\lambda}\right)+\left(1+\frac{b}{\lambda}\right)|u|^{p-1}.\end{aligned} \tag{1.30}$$

由3°知，对 $x\in G$，$|u|\geqslant M$，有

$$F_1(x,u)=\int_0^u f_1(x,v)dv\leqslant\frac{u^2}{2}+\frac{\tau}{\lambda}uf(x,u). \quad (1.31)$$

取 τ_1，使 $\tau<\tau_1<\frac{1}{2}$，并且满足

$$\left(\frac{1}{2}-\tau_1\right)\lambda(\tau_1-\tau)^{-1}<\eta.$$

则由8°可知对任给 $x\in G$，$|u|\geqslant R$，有

$$\frac{uf(x,u)}{u^2}=\frac{f(x,u)}{u}\geqslant\eta>\left(\frac{1}{2}-\tau_1\right)\lambda(\tau_1-\tau)^{-1}. \quad (1.32)$$

于是，当 $x\in G$，$|u|\geqslant\max\{M,R\}$时，由(1.31)、(1.32)两式可得

$$\begin{aligned}F_1(x,u)&\leqslant\frac{u^2}{2}+\frac{\tau}{\lambda}uf(x,u)\\&=\tau_1u^2+\left(\frac{1}{2}-\tau_1\right)\mu^2+\frac{\tau}{\lambda}uf(x,u)\\&\leqslant\tau_1u^2+\left(\frac{1}{2}-\tau_1\right)\cdot\left(\frac{1}{2}-\tau_1\right)^{-1}\lambda^{-1}(\tau_1-\tau)f(x,u)u\\&\qquad+\frac{\tau}{\lambda}uf(x,u)\\&=\tau_1u^2+\frac{\tau_1}{\lambda}uf(x,u)\\&=\tau_1u\left(u+\frac{1}{\lambda}f(x,u)\right)=\tau_1f_1(x,u). \quad (1.33)\end{aligned}$$

由7°可知，当 $x\in G$，$0<|u|<\delta$时，有

$$\begin{aligned}\frac{f_1(x,u)}{u}&=\frac{1}{u}\left(u+\frac{1}{\lambda}f(x,u)\right)=1+\frac{1}{\lambda}\frac{f(x,u)}{u}\\&\leqslant1+\frac{1}{\lambda}(\lambda_1-\varepsilon_0)=\left(1+\frac{\lambda_1}{\lambda}\right)-\frac{\varepsilon_0}{\lambda}. \quad (1.34)\end{aligned}$$

最后，由8°可知，当 $x\in G$，$|u|\geqslant R$ 时，有

$$\frac{f_1(x,u)}{u}=1+\frac{f(x,u)}{\lambda u}\geqslant 1+\frac{\eta}{\lambda}>1$$

$$=\left(1+\frac{\lambda_1}{\lambda}\right)-\frac{\lambda_1}{\lambda}. \tag{1.35}$$

由(1.30)、(1.33)、(1.34)、(1.35)四式可知，对 $f_1(x,u)$ 来说，假设2°～5°成立。因此，根据定理1.1，方程(1.29) 在 L_p 中至少有一非零解，亦即方程 (1.1)在L_p中至少有一非零解。

附注 Mountain Pass 引理首先由 A.Ambrosetti和P.H.Rabinowitz〔1〕证明。它是临界点理论中的一个重要定理。关于这一定理，有多方面的推广，可见张恭庆〔1〕、〔3〕、戚桂杰〔1〕以及孙经先〔2〕。

A.Amebrosetti 和 P.H.Rabinowitz〔1〕利用 Mountain Pass 引理研究了非线性积分方程非平凡解的存在性。他们的结果被郭大钧〔30〕改进和推广。本节所叙述的全部结论，都是属于郭大钧〔30〕的。

§2 非线性积分方程的特征函数

变分方法为研究非线性积分方程特征值与特征函数的性质，提供了有力的工具。

定理2.1 设H是 Hilbert 空间，$B: H\to H$是自共轭线性算子，$S=\{\varphi\in H\,|\,(B\varphi,\varphi)=c\}$，其中 $c\neq 0$ 是一个实常数。设$\Phi: H\to R^1$是一个实泛函，并且存在 $\varphi_0\in S$，使得$\Phi(\varphi_0)=\max\limits_{\varphi\in S}\Phi(\varphi)$。又设$\Phi$在 φ_0处是 Fréchet 可微的。则存在实数λ，使

$$\Phi'(\varphi_0)=\lambda B\varphi_0 .$$

证 用反证法，设定理中的结论不成立.则易知

$$g=\Phi'(\varphi_0)-\frac{(\Phi'(\varphi_0),B\varphi_0)}{(B\varphi_0,B\varphi_0)}B\varphi_0\neq\theta. \tag{2.1}$$

于是$(g,B\varphi_0)=0$，从而

$$(\Phi'(\varphi_0),g)=(g,g)>0 . \tag{2.2}$$

定义 ψ_a 如下：

$$\psi_a=\left[\frac{c}{c+\alpha^2(Bg,g)}\right]^{\frac{1}{2}}(\varphi_0+\alpha g), \tag{2.3}$$

其中 $\alpha>0$，并满足

$$\alpha<\frac{|c|}{2|(Bg,g)|},\quad \alpha^2<\frac{|c|}{2|(Bg,g)|} \tag{2.4}$$

由(2.4)式易知

$$\frac{1}{2}<\left[\frac{c}{c+\alpha^2(Bg,g)}\right]^{\frac{1}{2}}<2, \tag{2.5}$$

$$\left|\left[\frac{c}{c+\alpha^2(Bg,g)}\right]^{\frac{1}{2}}-1\right|$$

$$=\frac{\alpha^2|(Bg,g)|}{|c+\alpha^2(Bg,g)|\left[\left(\frac{c}{c+\alpha^2(Bg,g)}\right)^{\frac{1}{2}}+1\right]}$$

$$<\frac{2\alpha^2|(Bg,g)|}{|c|}<\alpha. \tag{2.6}$$

因为 B 是自共轭线性算子，故$(Bg,\varphi_0)=(g,B\varphi_0)=0$，从而

$$(B\psi_a,\psi_a)=\frac{c}{c+\alpha^2(Bg,g)}(B\varphi_0+\alpha Bg,\ \varphi_0+\alpha g)$$

$$=\frac{c}{c+\alpha^2(Bg,g)}[(B\varphi_0,\varphi_0)+\alpha^2(Bg,g)]=c.$$

所以 $\psi_a\in S$. 令 $h_a=\psi_a-\varphi_0$，则由(2.5)、(2.6)两式可得

$$\|h_\alpha\|\leqslant\alpha\left[\frac{c}{c+\alpha^2(Bg,g)}\right]^{\frac{1}{2}}\|g\|+\left|\left[\frac{c}{c+\alpha^2(Bg,g)}\right]^{\frac{1}{2}}-1\right|\|\varphi_0\|<(2\|g\|+\|\varphi_0\|)\alpha. \tag{2.7}$$

$$(\Phi'(\varphi_0),h_\alpha)=\left|\left[\frac{c}{c+\alpha^2(Bg,g)}\right]^{\frac{1}{2}}-1\right|(\Phi'(\varphi_0),\varphi_0)$$

$$+\alpha\left[\frac{c}{c+\alpha^2(Bg,g)}\right]^{\frac{1}{2}}\|g\|^2$$

$$>\frac{\alpha}{2}\|g\|^2-\frac{2\alpha^2|(Bg,g)|}{|c|}|(\Phi'(\varphi_0),\varphi_0)|. \tag{2.8}$$

由于Φ在φ_0处 Frechet 可微，故$\Phi(\psi_\alpha)$可以表为

$$\Phi(\psi_\alpha)=\Phi(\varphi_0)+(\Phi'(\varphi_0),\ h_\alpha)+\omega(\varphi_0,h_\alpha), \tag{2.9}$$

其中$\omega(\varphi_0,h)$满足$\lim\limits_{\|h\|\to 0}\dfrac{\omega(\varphi_0,h)}{\|h\|}=0$．显然存在$\delta>0$，使当$h_\alpha\in H$，$\|h_\alpha\|<\delta$时有

$$|\omega(\varphi_0,\ h_\alpha)|\leqslant\frac{\|g\|^2}{4(2\|g\|+\|\varphi_0\|)}\|h_\alpha\|. \tag{2.10}$$

取$\alpha>0$，使其在满足(2.4)式的同时还满足

$$\alpha<\min\left\{\frac{\delta}{2\|g\|+\|\varphi_0\|},\ \frac{|c|\|g\|^2}{8|(Bg,g)(\Phi'(\varphi_0),\varphi_0)|}\right\}.$$

则由(2.7)式知，$\|h_\alpha\|<\delta$，于是由(2.9)、(2.8)、(2.10)式得

$$\Phi(\psi_\alpha)>\Phi(\varphi_0)+\frac{\alpha}{2}\|g\|^2-\frac{2\alpha^2|(Bg,g)(\Phi'(\varphi_0),\varphi_0)|}{|c|}$$

$$-\frac{\|g\|^2}{4}\alpha=\Phi(\varphi_0)+\left[\frac{1}{4}\|g\|^2\right.$$

$$\left.-\frac{2\alpha|(Bg,g)(\Phi'(\varphi_0),\ \varphi_0)|}{|c|}\right]\alpha>\Phi(\varphi_0)$$

此与定理的条件矛盾．证完．

推论2.2 设H是Hilbert空间，$S=\{\varphi\in H \mid \|\varphi\|=c\}$，$c>0$是一常数．设$\Phi: H\to R^1$是一个实泛函，并且存在$\varphi_0\in S$，使得$\Phi(\varphi_0)=\max\limits_{\varphi\in S}\Phi(\varphi)$．又设$\Phi$在$\varphi_0$处是Fréchet可微的．则存在实数$\lambda$，使

$$\Phi'(\varphi_0)=\lambda\varphi_0. \tag{2.11}$$

证 在定理2.1中，令$B\equiv I$即可．证完．

下面利用定理2.1讨论非线性算子特征元的性质．

设H是Hilbert空间，H_1和H_2是H的闭子空间，满足

$$H=H_1\oplus H_2,$$

并且H_1的维数是有限的（$\dim H_1\geqslant 1$）．设P_1和P_2分别是H到H_1和H_2的直交投影算子．令

$$J=P_1-P_2. \tag{2.12}$$

先给出一个引理．

引理2.3 设$\varphi_n\in H$（$n=1, 2\cdots$），$\varphi_n\xrightarrow{弱}\varphi_0$，并且存在常数$c$，使

$$(J\varphi_n,\varphi_n)\geqslant c \quad (n=1,2,\cdots). \tag{2.13}$$

则$(J\varphi_0,\varphi_0)\geqslant c$．

证 因为$\varphi_n\xrightarrow{弱}\varphi_0$，$P_1$是有限维算子，故有$P_1\varphi_n\longrightarrow P_1\varphi_0$．又因为$P_2$是有界算子，故$P_2$映弱收敛序列为弱收敛序列，所以$P_2\varphi_n\xrightarrow{弱}P\varphi_0$．于是

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\|P_2\varphi_n\|\geqslant\underline{\lim_{n\to\infty}}\|P_2\varphi_n\|\geqslant\|P_2\varphi_0\|.$$

由(2.13)式可知

$$\begin{aligned}(J\varphi_0,\varphi_0)&=(P_1\varphi_0-P_2\varphi_0,P_1\varphi_0+P_2\varphi_0)\\&=\|P_1\varphi_0\|^2-\|P_2\varphi_0\|^2\geqslant\lim_{n\to\infty}\|P_1\varphi_n\|^2-\overline{\lim_{n\to\infty}}\|P_2\varphi_n\|^2\end{aligned}$$

$$=\varliminf_{n\to\infty}(\|P_1\varphi_n\|^2-\|P_2\varphi_n\|^2)=\varliminf_{n\to\infty}(J\varphi_n,\varphi_n)\geqslant c.$$

证完.

注2.4 若令

$$T_C=\{\varphi\in H\mid(J\varphi,\varphi)\geqslant C\},\tag{2.14}$$

则引理2.3表明：T_c是弱序列闭的.

令

$$F_0=\{\varphi\in H\mid\|P_1\varphi\|\geqslant\|P_2\varphi\|\}.\tag{2.15}$$

定理2.5 设A是弱连续泛函$\Phi:H\to R^1$的梯度算子，Φ满足条件

$$\lim_{\|\varphi\|\to\infty,\varphi\in F_0}\Phi(\varphi)=+\infty;\tag{2.16}$$

则对任意一个常数c，JA在T_c中有一个特征元的连续统. 更进一步，若对某常数$c_0\geqslant 0$及任给$\varphi\in T_{c_0}$，$A\varphi\neq\theta$，则对任给$c\geqslant c_0$，JA在

$$\{\varphi\in H\mid(J\varphi,\varphi)=c\}$$

上至少有一个特征元.

证 先证定理结论的第二部分. 设对某$c_0>0$及任给$\varphi\in T_{c_0}$，$A\varphi\neq\theta$. 任意给定$C\geqslant C_0$，取$\psi\in T_C$. 由(2.16)式可知，存在$R>0$，使当$\varphi\in T_c$，$\|\varphi\|\geqslant R$时，$\Phi(\varphi)>\Phi(\psi)$. 由引理2.3知，T_c是弱闭的，由于H是Hilbert空间，故$\{\varphi\in H\mid\|\varphi\|\leqslant R\}\cap T_c$是弱列紧的弱闭集. 根据附录定理3.4，存在$\varphi^*\in\{\varphi\in H\mid\|\varphi\|\leqslant R\}\cap T_c$，使

$$\Phi(\varphi^*)=\inf_{\varphi\in T_C,\ \|\varphi\|\leqslant R}\Phi(\varphi).$$

因为当$\|\varphi\|\geqslant R$，$\varphi\in T_c$时，$\Phi(\varphi)\geqslant\Phi(\psi)\geqslant\Phi(\varphi^*)$. 故

$$\Phi(\varphi^*)=\inf_{\varphi\in T_C}\Phi(\varphi).$$

若φ^*是T_c的内点，则由附录定理3.6可知必有$A\varphi^*=\theta$，与假

设矛盾．故$\varphi^*\in\partial T_c$．根据定理2.1，存在实数λ，使$\lambda A\varphi^*=J\varphi^*$.所以

$$\lambda JA\varphi^*=J^2\varphi^*=(P_1-P_2)^2\varphi^*=(P_1^2+P_2^2)\varphi^*$$
$$=(P_1+P_2)\varphi^*=\varphi^*.$$

定理的第二部分获证．下证定理结论的第一部分．若对任意$c>0$，JA在∂T_c上都有特征元，则定理结论的第一部分自然成立．故不失一般性，可以假定对某$c_1>0$，JA在∂T_{c_1}上没有特征元．取

$$f(u)=\frac{u-1}{u+1}.$$

则当$u\geqslant 0$时，$f(u)$是非负单调增函数，并且当u充分大时，有

$$f(u^2)\leqslant\inf_{\varphi\in F_0,\ \|\varphi\|\geqslant u}\Phi(\varphi). \tag{2.17}$$

对任给$0<\alpha<1$，定义

$$\Phi_\alpha(\varphi)=\Phi(\varphi)-\alpha f[(J\varphi,\varphi)]. \tag{2.18}$$

当$\varphi\in F_0$时，$0\leqslant(J\varphi,\varphi)\leqslant\|\varphi\|^2$．故由$f(u)$的单调性知

$$f[(J\varphi,\varphi)]\leqslant f(\|\varphi\|^2). \tag{2.19}$$

由(2.17)、(2.19)两式可知，当u充分大，$\varphi\in F_0$，$\|\varphi\|\geqslant u$时，有

$$\Phi_\alpha(\varphi)\geqslant\Phi(\varphi)-\alpha\Phi(\varphi)=(1-\alpha)\Phi(\varphi).$$

所以，对每一个固定的α，$0<\alpha<1$，有

$$\lim_{\varphi\in F_0,\ \|\varphi\|\to\infty}\Phi_\alpha(\varphi)=+\infty. \tag{2.20}$$

设$\alpha(0<\alpha<1)$固定．取$\varphi_n\in T_{c_1}(n=1,2,\cdots)$，使

$$\lim_{n\to\infty}\Phi_\alpha(\varphi_n)=\inf_{\varphi\in T_{c_1}}\Phi_\alpha(\varphi). \tag{2.21}$$

由于(2.20)式，$\{\varphi_n|n=1,2,\cdots\}$是有界集，故不失一般性，可

以假定φ_n弱收敛于某$\varphi_a \in H$。根据引理2.3，T_{c_1}是弱闭的，故$\varphi_a \in T_{c_1}$。显然

$$\lim_{n\to\infty} P_1\varphi_n = P_1\varphi_a.$$

显然，不失一般性，还可以假定$\|P_2\varphi_n\|$收敛于某实数b（否则取子列即可）。于是

$$\|P_2\varphi_a\| \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \|P_2\varphi_n\| = b.$$

由(2.21)、(2.18)两式可知

$$\begin{aligned}\inf_{\varphi\in T_{c_1}} \Phi_a(\varphi) &= \lim_{n\to\infty}\{\Phi(\varphi_n) - \alpha f[(J\varphi_n, \varphi_n)]\} \\ &= \Phi(\varphi_a) - \alpha \lim_{n\to\infty} f(\|P_1\varphi_n\|^2 - \|P_2\varphi_n\|^2) \\ &= \Phi(\varphi_a) - \alpha f(\|P_1\varphi_a\|^2 - b^2),\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\Phi(\varphi_a) - \alpha f(\|P_1\varphi_a\|^2 - b^2) &\leqslant \Phi_a(\varphi_a) \\ &= \Phi(\varphi_a) - \alpha f[(J\varphi_a, \varphi_a)] \\ &= \Phi(\varphi_a) - \alpha f(\|P_1\varphi_a\|^2 - \|P_2\varphi_a\|^2),\end{aligned}$$

亦即

$$f(\|P_1\varphi_a\|^2 - \|P_2\varphi_a\|^2) \leqslant f(\|P_1\varphi_a\|^2 - b^2).$$

注意到f的单调增性，可知$\|P_2\varphi_a\| > b$。因此可知$\|P_2\varphi_a\| = b$。由$\varphi_n \xrightarrow{弱} \varphi_a$及$P_2$的有界性知

$$P_2\varphi_n \xrightarrow{弱} P_2\varphi_a.$$

因此，

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\|P_2\varphi_n - P_2\varphi_a\|^2 &= \lim_{n\to\infty}[\|P_2\varphi_n\|^2 \\ &\quad - 2(P_2\varphi_n, P_2\varphi_a) + \|P_2\varphi_a\|^2] \\ &= b^2 - 2\lim_{n\to\infty}(P_2\varphi_n, P_2\varphi_a) + b^2 = 0.\end{aligned}$$

即$P_2\varphi_n \to P_2\varphi_\alpha$. 注意到 $P_1\varphi_n \to P_1\varphi_\alpha$，故 $\varphi_n \to \varphi_\alpha$. 因此由(2.21)式可知

$$\Phi_\alpha(\varphi_\alpha) = \inf_{\varphi \in Tc_1} \Phi_\alpha(\varphi),$$

即$\Phi_\alpha(\varphi)$在 φ_α 处取到它在 Tc_1上的最小值. 若$(J\varphi_\alpha, \varphi_\alpha) = c_1$，则根据定理2.1可知，存在实数 λ，使

$$\mathrm{grad}\Phi_\alpha(\varphi_\alpha) = \lambda J\varphi_\alpha.$$

由于

$$\mathrm{grad}\Phi_\alpha(\varphi) = A\varphi - \alpha f'[(J\varphi, \varphi)]\frac{1}{2}J\varphi,$$

所以

$$A\varphi_\alpha - \frac{\alpha}{2}f'[(J\varphi_\alpha, \varphi_\alpha)]J\varphi_\alpha = \lambda J\varphi_\alpha.$$

注意到 $J^2\varphi_\alpha = \varphi_\alpha$，故由上式可得

$$JA\varphi_\alpha = \{\lambda + \frac{\alpha}{2}f'[(J_\alpha, \varphi_\alpha)]\}\varphi_\alpha,$$

此与 JA 在 ∂Tc_1上没有特征元矛盾. 故必有$(J\varphi_\alpha, \varphi_\alpha) > c_1$，即 φ_α 是 Tc_1的内点. 根据附录定理3.6，$\mathrm{grad}\Phi_\alpha'(\varphi_\alpha) = \theta$，即$A\varphi_\alpha = \frac{\alpha}{2}f'[(J\varphi_\alpha, \varphi_\alpha)]J\varphi_\alpha$，亦即

$$JA\varphi_\alpha = \frac{\alpha}{2}f'[(J\varphi_\alpha, \varphi_\alpha)]\varphi_\alpha. \tag{2.22}$$

由(2.22)式可知，当 $0 < \alpha_1 < 1$，$0 < \alpha_2 < 1$，$\alpha_1 \neq \alpha_2$ 时，必有 $\varphi_{\alpha_1} \neq \varphi_{\alpha_2}$. 故 A 在 Tc_1中有一个特征元的连续统. 定理证完.

考察 Hammerstein 型积分方程

$$\varphi(x) = \lambda\int_G k(x, y)f(y, \varphi(y))dy = \lambda A\varphi(x), \tag{2.23}$$

其中 G 是 R^N中某可测集，$0 < \mathrm{mes}\, G \leqslant +\infty$. 设

1°设线性积分算子

$$K\varphi=\int_G k(x,y)\varphi(y)dy \tag{2.24}$$

是映 L_2 入 L_2 的全连续自共轭的拟正定线性算子（假定 K 至少有一个负特征值），并且映 $L_p(p>2)$ 入 L_q 全连续（$p^{-1}+g^{-1}=1$）；

2°存在 $a(x)\in L_q$，$b>0$，使对任给 $x\in G,-\infty<u<+\infty$，

$$|f(x,u)|\leqslant a(x)+b|u|^{p-1}.$$

定理2.6 设1°,2°成立．又设存在 $\alpha>0$，$0<\gamma<1$，$\beta(x)\in L_{\frac{2}{\gamma}}$，$c(x)\in L_2$，使

$$f(x,u)\cdot\mathrm{sign}u\geqslant\alpha|u|-\beta(x)|u|^{1-\gamma}-c(x). \tag{2.25}$$

则 A 有一个特征函数的连续统，并且对任给 $R>0$，都存在 A 的特征函数 φ_R，满足 $\|\varphi_R\|\geqslant R$．

证 令 H 是 K 的本质平方根，则由1°知 H 映 L_2 入 L_p 全连续，H^* 映 L_g 入 L_2 全连续．由2°知算子 $\mathrm{f}\varphi=f(x,\varphi(x))$ 映 L_p 入 L_g 连续、有界．定义

$$\Phi(\varphi)=\int_G dx\int_0^{H\varphi}f(x,u)du, \tag{2.26}$$

则显然 $\Phi:L_2\to R^1$ 是弱连续泛函，并且 $\mathrm{grad}\Phi=H^*\mathrm{f}H$．

下面证明，存在常数 $\beta_1>0$，使对任给 $\varphi\in F_0$，都有

$$\int_G|H\varphi(x)|^2dx\geqslant\beta_1\|\varphi\|^2. \tag{2.27}$$

其中 F_0 由(2.15)式定义，P_1 是 L_2 到 K 的一切对应于负特征值的特征函数所张成的线性空间的直交投影算子，$P_2=I-P_1$．事实上，若 $\varphi\in F_0$，则有 $\|P_1\varphi\|\geqslant\|P_2\varphi\|$，所以，

$$\|P_1\varphi\|^2=\frac{1}{2}(\|P_1\varphi\|^2+\|P_1\varphi^2\|^2)$$

$$\geqslant \frac{1}{2}(\|P_1\varphi\|^2+\|P_2\varphi\|^2)=\frac{1}{2}\|\varphi\|^2. \qquad (2.28)$$

从而

$$\int_G |H\varphi(x)|^2 dx=\int_G |HP_1\varphi(x)|^2 dx$$

$$+\int_G |HP_2\varphi(x)|^2 dx \geqslant \int_G |HP_1\varphi(x)|^2 dx. \qquad (2.29)$$

注意到H在K的一切对应于负特征值的特征函数张成的空间上是可逆的，故存在$\delta>0$，使

$$\int_G |HP_1\varphi(x)|^2 dx \geqslant \delta\|P_1\varphi\|^2. \qquad (2.30)$$

由(2.28)、(2.29)、(2.30)三式，即知(2.27)式成立。

由(2.25)、(2.26)两式可知，当$\varphi\in F_0$时有

$$\Phi(\varphi)\geqslant \frac{\alpha}{2}\int_G |H\varphi(x)|^2 dx$$

$$-\frac{1}{2-\gamma}\int_G \beta(x)|H\varphi(x)|^{2-\gamma} dx$$

$$-\int_G c(x)|H\varphi(x)|dx$$

$$\geqslant \frac{\alpha}{2}\beta_1\|\varphi\|^2-b_1\|\varphi\|^{2-\gamma}-c_1\|\varphi\|,$$

其中

$$b_1=\frac{1}{2-\gamma}\left\{\int_G |\beta(x)|^{\frac{2}{\gamma}} dx\right\}^{\frac{\gamma}{2}}\|H\|^{2-\gamma},$$

$$c_1=\left\{\int_G [c(x)]^2 dx\right\}^{\frac{1}{2}}\|H\|.$$

所以，

$$\lim_{\substack{\|\varphi\|\to\infty\\ \varphi\in F_0}} \Phi(\varphi)=+\infty. \qquad (2.31)$$

另一方面，由(2.25)、(2.27)两式可知：当 $\varphi\in F_0$ 时，有

$$(\mathfrak{f}H\varphi,H\varphi)\geqslant\alpha(H\varphi,\ H\varphi)-\int_G\beta(x)\,|H\varphi(x)|^{2-\gamma}dx$$

$$-\int_G c(x)\,|H\varphi(x)|\,dx\geqslant\alpha\beta_1\|\varphi\|^2$$

$$-(2-\gamma)b_1\|\varphi\|^{2-\gamma}-c_1\|\varphi\|. \tag{2.32}$$

取 $c_0>0$，使得当 $\rho^2\geqslant c_0$ 时

$$\alpha\beta_1\rho^2-(2-\gamma)b_1\rho^{2-\gamma}-c\rho>0. \tag{2.33}$$

注意到当 $\varphi\in T_{c_0}$ 时，$\|\varphi\|^2\geqslant c_0$。故由(2.32)、(2.33)两式知，当 $\varphi\in T_{c_0}$ 时有

$$(H^*\mathfrak{f}H\varphi,\varphi)=(\mathfrak{f}H\varphi,H\varphi)>0.$$

因此，对任给 $\varphi\in T_{c_0}$，$H^*\mathfrak{f}H\varphi\neq\theta$。根据定理2.5，对任给 $c\geqslant c_0$，存在 $\varphi_c\in\{\varphi\in L_2\,|\,(J\varphi,\varphi)=c\}$，使 φ_c 是 $JH^*\mathfrak{f}H$ 的特征函数，即存在 λ_c，使 $\varphi_c=\lambda_c JH^*\mathfrak{f}H\varphi_c$。该式两端以 H 作用之，并注意到 $K=H(-P_1+P_2)H^*$，可得

$$H\varphi_c=-\lambda_c H(-P_1+P_2)H^*\mathfrak{f}H\varphi_c=-\lambda_c AH\varphi_c. \tag{2.34}$$

这表明 $H\varphi_c$ 是 A 的特征函数.

下证当 $c_1\neq c_2$ 时 $H\varphi_{c_1}\neq H\varphi_{c_2}$。事实上，如果 $c_1\neq c_2$，但 $H\varphi_{c_1}=H\varphi_{c_2}$，则

$$\lambda_{c_1}^{-1}\varphi_{c_1}=JH^*\mathfrak{f}H\varphi_{c_1}=JH^*\mathfrak{f}H\varphi_{c_2}=\lambda_{c_2}^{-1}\varphi_{c_2}.$$

又由(2.34)式可知 $\lambda_{c_1}^{-1}=\lambda_{c_2}^{-1}$。故必有 $\varphi_{c_1}=\varphi_{c_2}$.因此，

$$c_1=(J\varphi_{c_1},\varphi_{c_1})=(J\varphi_{c_2},\varphi_{c_2})=c_2,$$

产生矛盾．所以，A 的特征函数构成一个连续统.

任给 $R>0$，取 $c\geqslant\max\{c_0,\beta_1^{-1}R^2\}$，其中 β_1 由(2.27)式确定．则由上所述，知存在 $\varphi_c\in\{\varphi\in L_2\,|\,(J\varphi_c,\ \varphi_c)=c\}$，使

$H\varphi_c$ 是A的特征函数．由$(J\varphi_c,\varphi_c)=c$ 可知，$\|\varphi_c\|^2\geqslant c$．因此，若令 $\varphi_R=H\varphi_c$，则由(2.27)式可得

$$\|\varphi_R\|=\|H\varphi_c\|\geqslant\beta_1^{\frac{1}{2}}\|\varphi_c\|\geqslant\beta_1^{\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{2}}\geqslant R.$$

证完．

附注 利用变分方法研究非线性积分方程特征函数的存在性，开始于 L. Lichtenstein〔2〕和M. Golomb〔1〕. 随后，为Л. А. Люстерник〔1〕、〔2〕、〔3〕、〔4〕、B. И. Соболев〔1〕、〔2〕、*E*、*Rothe*〔1〕、〔2〕、〔4〕、M. M. Вайнберг〔4〕、〔5〕、〔6〕、〔7〕所发展，并在 M. M. Вайнберг〔1〕和M. A. Красносельский〔1〕中被系统地加以总结．

§3 非线性积分方程的歧点

先对一般算子来讨论歧点的存在性．

引理3.1 设H是Hilbert 空间，Ω是H中的开集，$\theta\in\Omega$，$\Phi:\Omega\to R^1$是一个实泛函，$\Phi(\theta)=0$，$A=\operatorname{grad}\Phi$ 存在．又设$A\theta=\theta$，A在 θ 处有 Fréchet 导算子 B．则对任给 $\varepsilon>0$，都存在$\delta>0$，使得当 $\varphi\in H$，$\|\varphi\|\leqslant\delta$ 时有

$$|\Phi(\varphi)-\frac{1}{2}(B\varphi,\varphi)|\leqslant\varepsilon\|\varphi\|^2. \tag{3.1}$$

证 任给 $\varepsilon>0$．因为 $A\theta=\theta$，$A'_\theta=B$，故存在 $\delta>0$，使得当 $\varphi\in H$，$\|\varphi\|\leqslant\delta$ 时有

$$\|A\varphi-B\varphi\|\leqslant\varepsilon\|\varphi\| \tag{3.2}$$

考察泛函 $f(t)=\Phi(t\varphi)$，其中$\|\varphi\|\leqslant\delta$，$0\leqslant t\leqslant1$．于是

$$f'(t)=(A(t\varphi),\varphi).$$

从而

$$\Phi(\varphi)=f(1)-f(0)=\int_0^1 f'(t)dt=\int_0^1 (A(t\varphi),\varphi)dt.$$

由(3.2)式，可得

$$\Phi(\varphi)-\frac{1}{2}(B\varphi,\varphi)=\int_0^1 (A(t\varphi),\varphi)dt-(B\varphi,\varphi)\int_0^1 tdt$$

$$=\int_0^1 (A(t\varphi)-B(t\varphi)),\varphi)dt$$

$$\leqslant\int_0^1 \|A(t\varphi)-B(t\varphi)\|\|\varphi\|dt\leqslant\varepsilon\|\varphi\|^2.$$

证完.

定理3.2 设H是 Hilbert 空间，Ω是H中的开集，$\theta\in\Omega$，Φ: $\Omega\to R^1$是C^1泛函，$\Phi(\theta)=0$. 令 $A=\mathrm{grad}\,\Phi$，设A: $\Omega\to H$是全连续算子，$A\theta=\theta$，A在θ处有 Fréchet 导算子B. 又设B是自共轭算子. 则B的最小正特征值是A的歧点.

证 用λ_0表示B的最小正特征值，H_0是B相应于λ_0的特征向量空间，$H_1=H\ominus H_0$. 令P_0: $H\to H_0$，P_1: $H\to H_1$表示相应的投影算子，ν是B除了λ_0^{-1}以外的最大正固有值（若B除了λ_0^{-1}，没有其它正固有值时，取$\nu=0$）. 由于A全连续，故B是全连续线性算子. 设$\{\lambda_i|i=0,1,2,\cdots\}$是$B$的全体特征值组成的集合，$\{\psi_i|i=0,1,2,\cdots\}$是$B$相应的就范正交特征向量系，则

$$B\varphi=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(\varphi,\psi_i)}{\lambda_i}\psi_i,$$

于是，对任给$\varphi\in H$，有

$$(BP_1\varphi,\varphi)\leqslant\nu\|P_1\varphi\|^2. \tag{3.3}$$

任意取定$\varepsilon>0$，$\delta>0$. 取$\varepsilon_1>0$，$\varepsilon_2>0$，使

$$\varepsilon_1<\frac{\lambda_0^{-1}-\nu}{4} \tag{3.4}$$

$$\varepsilon_2 < \lambda_0^{-1}\left[1 - \frac{4\varepsilon_1}{\lambda_0^{-1} - \nu}\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{3.5}$$

$$\varepsilon_2 + (\|B\| + \lambda_0^{-1}) \cdot 2\varepsilon_1^{\frac{1}{2}}(\lambda_0^{-1} - \nu)^{-\frac{1}{2}} < \varepsilon; \tag{3.6}$$

取 $\rho > 0$，使 $\rho < \delta$，并且当 $\|\varphi\| \leqslant \rho$ 时有

$$|\Phi(\varphi) - \frac{1}{2}(B\varphi, \varphi)| \leqslant \varepsilon_1 \|\varphi\|^2, \tag{3.7}$$

$$\|A\varphi - B\varphi\| \leqslant \varepsilon_2 \|\varphi\|, \tag{3.8}$$

由引理3.1，并注意到 $A\theta = \theta$，$A'_\theta = B$，故这样的ρ是存在的。对任给 $\varphi \in H_0$，$\|\varphi\| \leqslant \rho$，

$$\Phi(\varphi) \geqslant \frac{1}{2}(B\varphi, \varphi) - |\Phi(\varphi) - \frac{1}{2}(B\varphi, \varphi)|$$

$$\geqslant \left(\frac{1}{2\lambda_0} - \varepsilon_1\right)\|\varphi\|^2.$$

因此

$$\sup_{\varphi \in T} \Phi(\varphi) \geqslant \left(\frac{1}{2\lambda_0} - \varepsilon_1\right)\rho^2, \tag{3.9}$$

其中 $T = \{\varphi \in H \mid \|\varphi\| < \rho\}$. 因为 A 全连续，故根据附录定理3.7，$\Phi(\varphi)$是弱连续的，从而存在 $\varphi_0 \in \overline{T}$，使

$$\Phi(\varphi_0) = \sup_{\varphi \in T} \Phi(\varphi) \geqslant \left(\frac{1}{2\lambda_0} - \varepsilon_1\right)\rho^2. \tag{3.10}$$

另一方面，由(3.7)式可得

$$\Phi(\varphi_0) \leqslant \frac{1}{2}(B\varphi_0, \varphi_0) + |\Phi(\varphi_0) - \frac{1}{2}(B\varphi_0, \varphi_0)|$$

$$\leqslant \frac{1}{2\lambda_0}\|P_0\varphi_0\|^2 + \frac{\nu}{2}\|P_1\varphi_0\|^2 + \varepsilon_1\rho^2. \tag{3.11}$$

由(3.10)、(3.11)两式，可得

$$\left(\frac{1}{2\lambda_0} - \varepsilon_1\right)\rho^2 \leqslant \varepsilon_1\rho^2 + \frac{1}{2\lambda_0}\|P_0\varphi_0\|^2 + \frac{\nu}{2}\|P_1\varphi_0\|^2.$$

把$\|P_1\varphi_0\|^2 = \|\varphi_0\|^2 - \|P_0\varphi_0\|^2$代入上式，并注意到$\|\varphi_0\| \leqslant \rho$，可得

$$\|P_0\varphi_0\|^2 \geqslant \rho^2 - \frac{4\varepsilon_1\rho^2}{\lambda_0^{-1}-\nu}, \tag{3.12}$$

再利用$\|P_1\varphi_0\|^2=\|\varphi_0\|^2-\|P_0\varphi_0\|^2$，由(3.12)式可得

$$\|P_1\varphi_0\|^2 \leqslant \frac{4\varepsilon_1\rho^2}{\lambda_0^{-1}-\nu}. \tag{3.13}$$

由(3.12)式，有

$$\|B\varphi_0\|^2 \geqslant \|BP_0\varphi_0\|^2 = \lambda_0^{-2}\|P_0\varphi_0\|^2 \geqslant \lambda_0^{-2}\rho^2 - \frac{4\varepsilon_1\lambda_0^{-2}\rho^2}{\lambda_0^{-1-\nu}}.$$

再利用(3.8)式，可得

$$\begin{aligned}\|A\varphi_0\| &\geqslant \|B\varphi_0\| - \|A\varphi_0 - B\varphi_0\|\\ &\geqslant \lambda_0^{-1}\rho\left[1-\frac{4\varepsilon_1}{\lambda_0^{-1}-\nu}\right]^{\frac{1}{2}} - \varepsilon_2\|\varphi_0\|\\ &\geqslant \rho\left[\lambda_0\left(1-\frac{4\varepsilon_1}{\lambda_0^{-1}-\nu}\right)^{\frac{1}{2}} - \varepsilon_2\right] > 0.\end{aligned}$$

这表明$\varphi_0 \overline{\in} T$.因此$\varphi_0 \in \partial T$，即$\|\varphi_0\|=\rho$. 根据推论2.2，存在实数$\lambda$，使$A\varphi_0=\lambda^{-1}\varphi$.

根据歧点的定义，为了证明定理的结论，下面只需证明$|\lambda_0^{-1}-\lambda^{-1}|<\varepsilon$. 事实上，利用(3.8)和(3.13)两式，可得

$$\begin{aligned}|\lambda_0^{-1}-\lambda^{-1}| &= \frac{1}{\rho}\|\lambda_0^{-1}\varphi_0 - \lambda^{-1}\varphi_0\|\\ &\leqslant \frac{1}{\rho}\|A\varphi_0 - B\varphi_0\| + \frac{1}{\rho}\|B\varphi_0 - \lambda_0^{-1}\varphi_0\|\\ &\leqslant \varepsilon_2 + \frac{1}{\rho}\|BP_1\varphi_0 - \lambda_0^{-1}P_1\varphi_0\|\\ &\leqslant \varepsilon_2 + \frac{1}{\rho}(\|B\|+\lambda^{-1})\|P_1\varphi_0\|\\ &\leqslant \varepsilon_2 + (\|B\|+\lambda_0)\cdot 2\varepsilon_1^{\frac{1}{2}}(\lambda_0^{-1}-\nu)^{-\frac{1}{2}} < \varepsilon.\end{aligned}$$

证完.

注3.3 利用与定理3.2相同的证明方法可以证明：在定理

3.2的条件下，B 的最大负特征值也是A的歧点。

为了证明另一个关于歧点存在的主要结论，需要做某些准备。

设H是Hilbert 空间，$T=\{\varphi\in H \mid \|\varphi\|<\rho\}$。$\Phi$: $\overline{T}\to R^1$是C^1泛函，并且是弱连续的。令 $A=\mathrm{grad}\Phi$。因此，Φ可以表示为

$$\Phi(\varphi+h)-\Phi(\varphi)=(A\varphi,h)+\omega(\varphi,h), \tag{3.14}$$

其中$\lim\limits_{\|h\|\to 0}\dfrac{\omega(\varphi,h)}{\|h\|}=0$。如果对任给 $\varepsilon>0$，都存在$\delta>0$，使得对一切 $\varphi\in T$，只要$\|h\|<\delta$，就都有

$$\frac{|\omega(\varphi,h)|}{\|h\|}<\varepsilon, \tag{3.15}$$

则称Φ在T上是一致可微的。显然，如果Φ在T上一致可微，则存在一个不减的连续函数 $\delta=\delta(\varepsilon)$，$\delta(0)=0$，当 $\varepsilon>0$ 时，$\delta(\varepsilon)>0$，并且对一切 $\varphi\in T$，只要$\|h\|\leqslant\delta$，就有$|\omega(\varphi,h)|\leqslant\varepsilon\|h\|$。

对 $\varphi\in\partial T$，定义

$$D\varphi=A\varphi-\frac{(A\varphi,\varphi)}{\|\varphi\|^2}\varphi. \tag{3.16}$$

显然，当 $\varphi\in\partial T$ 时，$(D\varphi,\varphi)=0$。令

$$l=\sup_{\varphi\in\partial T}\|D\varphi\|,\quad m=\sup_{\varphi\in\partial T,\psi\in T}|(A\varphi,\varphi)+(\psi,D\varphi)|. \tag{3.17}$$

对任给 $\varphi\in\partial T$，$0\leqslant t\leqslant 1$，定义

$$J(t,\varphi)=\frac{\varphi+t\alpha(\varphi)D\varphi}{\|\varphi+t\alpha(\varphi)D\varphi\|}\rho, \tag{3.18}$$

其中

$$\alpha(\varphi)=\min\left\{\frac{1}{2l}\delta\frac{\|D\varphi\|}{4}),\ \frac{\rho}{2l},\ \frac{\rho^2}{4m}\right\} \tag{3.19}$$

引理3.4 在上述假设和记号下，有

$$\Phi(J(t,\varphi))\geqslant\Phi(\varphi)+\frac{t\alpha(\varphi)}{4}\|D(\varphi)\|^2. \tag{3.20}$$

证 为了简洁，令

$$g=t\alpha(\varphi)D\varphi,\quad h=J(t,\varphi)-\varphi=\frac{\varphi+g}{\|\varphi+g\|}\rho-\varphi.$$

给定 $\varphi\in\partial T$. 则$\|\varphi\|=\rho$. 由于$(D\varphi,\varphi)=0$，故$(g,\varphi)=0$.
所以$\|\varphi+g\|\geqslant\|\varphi\|=\rho$，并且

$$\|\varphi+g\|-\rho=\frac{\|\varphi+g\|^2-\rho^2}{\|\varphi+g\|+\rho}=\frac{\|g\|^2}{\|\varphi+g\|+\rho}$$

$$\leqslant\frac{1}{\rho}\|g\|^2. \tag{3.21}$$

由(3.21)、(3.19)两式，得

$$\|h\|=\frac{\|\rho g+(\rho-\|\varphi+g\|)\varphi\|}{\|\varphi+g\|}\leqslant\frac{\rho\|g\|+(\|\varphi+g\|-\rho)\rho}{\|\varphi+g\|}$$

$$\leqslant\frac{\rho\|g\|+\|g\|^2}{\rho}\leqslant 2\|g\|\leqslant\delta\left(\frac{\|D\varphi\|}{4}\right). \tag{3.22}$$

由D的定义知，$A\varphi=D\varphi+\rho^{-2}(A\varphi,\varphi)\varphi$. 所以利用$(g,\varphi)=0$可以得到

$$(A\varphi,h)=\frac{\rho}{\|\varphi+g\|}(D\varphi,g)+\left(\frac{\rho}{\|\varphi+g\|}-1\right)(A\varphi,\varphi)$$

$$=\frac{\rho-\|\varphi+g\|}{\|\varphi+g\|}[(A\varphi,\varphi)+(D\varphi,g)]+(D\varphi,g). \tag{3.23}$$

利用(3.21)、(3.19)两式，可以由(3.23)式得到

$$|(A\varphi,h)-(D\varphi,g)|\leqslant\frac{m}{\rho^2}\|g\|^2$$

$$\leqslant\frac{m}{\rho^2}t\alpha^2(\varphi)\|D\varphi\|^2\leqslant\frac{t}{4}\alpha(\varphi)\|D\varphi\|^2. \tag{3.24}$$

由(3.22)式知有

$$|\omega(\varphi,h)|\leqslant\frac{\|D\varphi\|}{4}\|h\|\leqslant\frac{\|D\varphi\|}{2}\|g\|=\frac{t}{2}\alpha(\varphi)\|D\varphi\|^2.$$

所以，由(3.23)、(3.24)两式可得

$$\begin{aligned}
&\Phi(J(t,\varphi))-\Phi(\varphi)=\Phi(\varphi+h)-\Phi(\varphi)\\
&\quad=(A\varphi,h)+\omega(\varphi,h)\\
&\quad=t\alpha(\varphi)\|D\varphi\|^2+[(A\varphi,h)-(D\varphi,g)]+\omega(\varphi,h)\\
&\quad\geqslant t\alpha(\varphi)\|D\varphi\|^2-\frac{t}{4}\alpha(\varphi)\|D\varphi\|^2-\frac{t}{2}\alpha(\varphi)\|D\varphi\|^2\\
&\quad=\frac{t}{4}\alpha(\varphi)\|D\varphi\|^2.
\end{aligned}$$

因此(3.20)式成立．证完．

下面令 $J\varphi=J(1,\varphi)$．

设N是∂T中的一个子集族，满足 (i)N 的每一个成员都是H中的相对紧集；(ii)若 $F\in N$，则$JF\in N$．在 N 上定义一个泛函如下：对任给 $F\in N$，令

$$\Phi^*(F)=\min_{\varphi\in F}\Phi(\varphi).\tag{3.25}$$

由于Φ在$\overline{T}$上是弱连续的，故Φ^*是有定义的．令

$$c=\sup_{F\in N}\Phi^*(F).\tag{3.26}$$

引理3.5 在以上假设和记号下，必存在一个序列 $\{\varphi_n|n=1,2,\cdots\}\subset\bigcup_{F\in N}F$，使得

$$\lim_{n\to\infty}\Phi(\varphi_n)=c\tag{3.27}$$

$$\lim_{n\to\infty}\|D\varphi_n\|=0\tag{3.28}$$

证 用反证法，设引理的结论不成立，则存在 $\alpha>0$，$\beta>0$，使得只要 $\varphi\in\bigcup_{F\in N}F$，$|\Phi(\varphi)-c|<\beta$，就有

$$\|D\varphi\|>\alpha.$$

取 $F_0\in N$，使

$$\Phi^*(F_0)>c-\frac{\delta\alpha^2}{4},$$

其中

$$\delta<\min\left\{\frac{1}{2l}\delta\left(\frac{\alpha}{4}\right),\ \frac{\rho}{21},\ \frac{\rho^2}{4m}\right\}\leqslant\alpha(\varphi),$$

令$L=\{\varphi\in F_0\,|\,\Phi(\varphi)<c+\beta\}$.由$N$的定义可知 $J(F_0)\in N$. 故

$$\Phi^*(J(F_0))\leqslant c. \tag{3.29}$$

另一方面，对任给 $\varphi\in F_0\backslash L$，由引理3.4知

$$\Phi(J\varphi)\geqslant\Phi(\varphi)\geqslant c+\beta>c. \tag{3.30}$$

对任给 $\varphi\in L$，由引理3.4知有

$$\Phi(J\varphi)\geqslant\Phi(\varphi)+\frac{1}{4}\alpha(\varphi)\|D\varphi\|^2$$

$$\geqslant c-\frac{\delta}{4}\alpha^2+\frac{\alpha(\varphi)}{4}\alpha^2\geqslant c+\frac{\alpha^2}{4}(\alpha(\varphi)-\delta), \tag{3.31}$$

由(3.30)、(3.31)两式知，$\Phi^*(J(F_0))>c$。此与(3.29)式矛盾。证完。

引理3.6 设$\{\varphi_n|n=1,2,\cdots\}\subset\partial T$满足：

(1) 存在 $\varphi_0\in H$，使 $\varphi_n\xrightarrow{\text{弱}}\varphi_0$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\|D\varphi_n\|=0$；

(3) 存在 $\psi\neq\theta$，使 $A\varphi_n\to\psi$；

则 $\varphi_n\to\varphi_0$，并且存在 $\lambda\neq0$，使 $A\varphi_0=\lambda\varphi_0$。

证 由条件(1)、(2)可知存在 $\lambda\neq0$，使$(A\varphi_n,\ \varphi_n)\to\lambda\rho^2$。又由$D$的定义可知

$$\lim_{n\to\infty}(A\varphi_n,\varphi_n)^2=\rho^2\lim_{n\to\infty}[(A\varphi_n,A\varphi_n)-(D\varphi_n,A\varphi_n)]$$

$$=\rho^2\|\psi\|^2.$$

所以$|\lambda|\rho=\|\psi\|$. 在等式

$$\varphi_n=\frac{\rho^2}{(A\varphi_n,\varphi_n)}A\varphi_n-\frac{\rho^2}{(A\varphi_n,\varphi_n)}D\varphi_n$$

中，令$n\to\infty$，则由条件(1)、(2)知，$\varphi_n\to\lambda^{-1}\psi$. 由于$\varphi_n\xrightarrow{弱}\varphi_0$，故$\varphi_0=\lambda^{-1}\psi$. 由$A$的连续性知，$A\varphi_0=\psi$，所以$A\varphi_0=\lambda\varphi_0$. 证完.

定理3.7 设Ω是H中的开集，$\theta\in\Omega$，A: $\Omega\to H$是全连续的梯度算子（即存在C^1泛函Φ: $\Omega\to R^1$，使$A=\mathrm{grad}\,\Phi$）. 又设Φ在θ的一个邻域中是一致可微的，$A\theta=\theta$，并且A在θ处有Fréchet导算子B. 最后设B是自共轭算子，则B的任何一个特征值都是A的歧点.

证 设λ_0是B的一个特征值，设$\varepsilon>0$和$\delta>0$是两个任意给定的正数. 不失一般性，可设$\lambda_0>0$. 设H_0是B相应于λ_0的特征向量空间，H_1是B的相应于不大于λ_0的正特征值的全体特征向量所生成的线性空间. 显然，$H_0\subset H_1$. 令$H_2=H\ominus H_1$，并且P_1: $H\to H_1$和P_2: $H\to H_2$是相应的投影算子. 设μ是B的最小正特征值. 不失一般性，可以假定$\mu<\lambda_0$（否则由定理3.2可知λ_0是A的歧点）. 令ν是B的大于λ_0的最小正特征值（若B没有大于λ_0的正特征值，则取$\nu>\lambda_0$）.

由B按就范正交特征向量系的展开表达式（参见第一章§4）

$$(B\varphi,\varphi)\begin{cases}\leqslant\mu^{-1}(\varphi,\varphi)，当\ \varphi\in H时,\\ \geqslant\lambda_0^{-1}(\varphi,\varphi)，当\ \varphi\in H_1时,\\ \leqslant\nu^{-1}(\varphi,\varphi)，当\ \varphi\in H_2时,\\ =\lambda_0^{-1}(\varphi,\varphi)，当\ \varphi\in H_0时.\end{cases}\qquad(3.32)$$

并且对 $\varphi\in H_1$，有 $\|B\varphi\|\geqslant\lambda_0^{-1}\|\varphi\|$. 令

$$R=\{\varphi\in H \mid \|P_1\varphi\|>0\}.$$

取 $\varepsilon_1>0$，$\varepsilon_2>0$，使

$$\varepsilon_1<\frac{\nu-\lambda_0}{4\lambda_0\nu}, \tag{3.33}$$

$$\varepsilon_2<\frac{1}{2\lambda_0}\left[\frac{(\nu-\lambda_0-4\varepsilon_1\lambda_0\nu)\mu}{\nu\lambda_0-\mu\lambda_0}\right]^{\frac{1}{2}} \tag{3.34}$$

$$4\varepsilon_1+\varepsilon_2<\varepsilon. \tag{3.35}$$

根据引理3.1，存在 $0<\rho_1<\delta$，使得只要 $\varphi\in H$，$0<\|\varphi\|\leqslant\rho_1$，就有（不失一般性，可以假定 $\Phi(\theta)=0$）

$$|\Phi(\varphi)-\frac{1}{2}(B\varphi,\varphi)|<\varepsilon_1\|\varphi\|^2. \tag{3.36}$$

又因为 $A\theta=\theta$，$A'_\theta=B$，故又存在 $0<\rho_2\leqslant\delta$，使得只要 $\varphi\in H$，$0<\|\varphi\|\leqslant\rho_2$，就有

$$\|A\varphi-B\varphi\|\leqslant\varepsilon_2\|\varphi\|. \tag{3.37}$$

取 $\rho=\min\{\rho_1,\rho_2\}$。令 $S=\{\varphi\in H \mid \|\varphi\|=\rho\}$，$S_1=\{\varphi\in H_1 \mid \|\varphi\|=\rho\}$. 又令

$$M=\{F \mid F\text{是}S\cap R\text{的相对紧集，}F\text{在}R\text{中不可缩}\}.$$

下面证明M非空. 首先回忆一下，R中的子集F称为在R中可缩，是指存在 $\varphi_0\in R$ 及连续映谢 $U(t,\varphi)$：$[0,1]\times F\to R$，使得 $U(0,\varphi)\equiv\varphi$，$U(1,\varphi)\equiv\varphi_0$。否则称 F 在 R_1 中不可缩. 为证M非空，只需证 $S_1\in M$ 即可. 由于H_1是有限维空间，故S_1是 S 中的紧集，从而是相对紧集. 若 S_1在 R 中可缩，则存在 $\varphi_0\in R$，及连续映射$U(t,\varphi)$：$[0,1]\times S_1\to R$，使得对任给$\varphi\in S_1$，有$U(0,\varphi)=\varphi$。$U(1,\varphi)=\varphi_0$.考察

$$U_1(t,\varphi)=\rho\frac{P_1U(t,\varphi)}{\|P_1U(t,\varphi)\|},\quad 0\leqslant t\leqslant 1,\ \varphi\in S_1.$$

显然，$U_1(t,\varphi)$：$[0,1]\times S_1\to S_1$连续，且对任给$\varphi\in S_1$，$U_1(0,\varphi)=\varphi$，$U_1(1,\varphi)=\rho\|P_1\varphi_0\|^{-1}P_1\varphi_0$。令$T_1=\{\varphi\in H_1 \mid \|\varphi\|\leqslant\rho\}$，定义$C$：$T_1\to T_1$如下：

$$C\varphi=\begin{cases}-U_1\left(1-\dfrac{\|\varphi\|}{\rho},\ \dfrac{\rho\varphi}{\|\varphi\|}\right), & \text{当 } \varphi\neq\theta \text{ 时,}\\ -\rho\|P_1\varphi_0\|^{-1}P_1\varphi_0, & \text{当 } \varphi=\theta \text{ 时.}\end{cases}$$

则C：$T_1\to T_1$是连续的，并且$C(T_1)\subset T_1$。根据Brouwer不动点定理，存在$\psi\in T_1$，使$C\psi=\psi$。显然$\|C\psi\|=\rho$，故$\psi\in S_1$。因此$\psi=C\psi=-U_1(0,\psi)=-\psi$。产生矛盾。所以$S_1$在$R$中不可缩。故$M$非空。对$F\in M$，令

$$\Phi^*(F)=\min_{\varphi\in F}\Phi(\varphi),$$

$$c=\sup_{F\in M}\Phi^*(F).$$

因为$\min\limits_{\varphi\in S_1}\dfrac{1}{2}(B\varphi,\varphi)=\dfrac{1}{2\lambda_0}\rho^2$，故由$S_1\in M$及(3.36)式可得

$$\begin{aligned}\Phi^*(S_1)&=\min_{\varphi\in S_1}\Phi(\varphi)\\ &\geqslant\min_{\varphi\in S_1}\frac{1}{2}(B\varphi,\varphi)-\max_{\varphi\in S_1}\left|\Phi(\varphi)-\frac{1}{2}(B\varphi,\varphi)\right|\\ &>\left(\frac{1}{2\lambda_0}-\varepsilon_1\right)\rho^2.\end{aligned}\tag{3.38}$$

所以

$$c-\frac{1}{2\lambda_0}\rho^2>-\varepsilon_1\rho^2.\tag{3.39}$$

任意取定$F\in M$，下证$P_1F\cap H_0\neq\phi$。若不然，任取$\varphi_0\in H_0$，使$\|\varphi_0\|=1$。对$\varphi\in F$，定义

$$U_2(t,\varphi)=\begin{cases}2t\varphi_0+\varphi-2t(\varphi,\varphi_0)\varphi_0, & \text{当 } 0\leqslant t\leqslant\frac{1}{2}\text{ 时},\\ \varphi_0+2(1-t)[\varphi-(\varphi,\varphi_0)\varphi_0], & \text{当 } \frac{1}{2}<t\leqslant 1\text{ 时}.\end{cases}$$

显然 $U_2(t,\varphi)$：$[0,1]\times F\to H$ 连续，对 $0\leqslant t\leqslant\frac{1}{2}$，$\varphi\in F$，有

$$P_1U_2(t,\varphi)=2t[1-(\varphi,\varphi_0)]\varphi_0+P_1\varphi\neq\theta,$$

对 $\frac{1}{2}<t\leqslant 1$，$\varphi\in F$，有

$$P_1U_2(t,\varphi)=2(1-t)P_1\varphi+[1-2(1-t)(\varphi,\varphi_0)]\varphi_0\neq\theta.$$

故 $U_2(t,\varphi)$：$[0,1]\times F\to R$。又因为对 $\varphi\in F$，有

$$U_2(0,\varphi)=\varphi,\quad U_2(1,\varphi)=\varphi_0.$$

故 F 在 R 中可缩。此与 $F\in M$ 矛盾。所以 $P_1F\cap H_0\neq\phi$。

取 $\varphi^*\in F$，使 $P_1\varphi^*\in H_0$。故存在 $\psi_1\in H_0$，$\psi_2\in H_2$，使 $\varphi^*=\psi_1+\psi_2$。由(3.36)式可得

$$\begin{aligned}\Phi(\varphi^*)&\leqslant\frac{1}{2}(B\varphi^*,\varphi^*)+\left|\Phi(\varphi^*)-\frac{1}{2}(B\varphi^*,\varphi^*)\right|\\ &\leqslant\frac{1}{2}(B\psi_1,\psi_1)+\frac{1}{2}(B\psi_2,\psi_2)+\varepsilon_1\rho^2\\ &\leqslant\frac{1}{2\lambda_0}\|\psi_1\|^2+\frac{1}{2\nu}\|\psi_2\|^2+\varepsilon_1\rho^2\leqslant\left(\frac{1}{2\lambda_0}+\varepsilon_1\right)\rho^2.\end{aligned}$$

所以

$$\Phi^*(F)=\min_{\varphi\in F}\Phi(\varphi)\leqslant\left(\frac{1}{2\lambda_0}+\varepsilon_1\right)\rho^2.$$

注意到 $F\in M$ 是任取的，故 $c\leqslant\left(\frac{1}{2\lambda_0}+\varepsilon_1\right)\rho^2$，即

$$c-\frac{1}{2\lambda_0}\rho^2\leqslant\varepsilon_1\rho^2. \tag{3.40}$$

令

$$N=\{F\in M\,|\,\Phi^*(F)>\Big(\frac{1}{2\lambda_0}-\varepsilon_1\Big)\rho^2\}. \tag{3.41}$$

由(3.38)式知N非空．令

$$S^*=\{\varphi\in S\,|\,\|P_1\varphi\|^2>\Big[\frac{(\nu-\lambda_0-4\varepsilon_1\lambda_0\nu)\mu}{\nu\lambda_0-\mu\lambda_0}\Big]\rho^2.$$

下证若 $F\in N$，则 $F\subset S^*$．事实上，若对某 $F\in N$，存在 $\varphi\in F$，使

$$\|P_1\varphi\|^2\leqslant\Big[\frac{(\nu-\lambda_0-4\varepsilon\lambda_0\nu)\mu}{\nu\lambda_0-\mu\lambda_0}\Big]\rho^2,$$

则由(3.36)式可知

$$\begin{aligned}\Phi(\varphi)&\leqslant\frac{1}{2}(B\varphi,\varphi)+\Big|\Phi(\varphi)-\frac{1}{2}(B\varphi,\varphi)\Big|\\ &\leqslant\frac{1}{2\nu}\|P_2\varphi\|^2+\frac{1}{2\mu}\|P_1\varphi\|^2+\varepsilon_1\rho^2\\ &=\frac{1}{2\nu}(\rho^2-\|P_1\varphi\|^2)+\frac{1}{2\mu}\|P_1\varphi\|^2+\varepsilon_1\rho^2\\ &\leqslant\Big(\frac{1}{2\nu}+\varepsilon_1\Big)\rho^2+\Big(\frac{1}{2\mu}-\frac{1}{2\nu}\Big)\Big[\frac{\nu-\lambda_0-4\varepsilon_1\lambda_0\nu)\mu}{\nu\lambda_0-\mu\lambda_0}\Big]\rho^2\\ &=\Big(\frac{1}{2\lambda_0}-\varepsilon_1\Big)\rho^2.\end{aligned}$$

于是

$$\Phi^*(F)=\min_{\varphi\in F}\Phi(\varphi)\leqslant\Big(\frac{1}{2\lambda_0}-\varepsilon_1\Big)\rho^2.$$

这表明 $F\overline{\in}N$．产生矛盾．故若 $F\in N$，则$F\subset S^*$．

用(3.18)式定义 $J(t,\varphi)$，其中各符号的含义见（3.18）式前的说明．令 $J\varphi=J(1,\varphi)$．任给 $F\in N$，由引理3.4可知

$$\Phi^*(J(F))=\min_{\varphi\in F}\Phi(J\varphi)\geqslant\min_{\varphi\in F}\Phi(\varphi)$$

$$=\Phi^*(F)>\left(\frac{1}{2\lambda_0}-\varepsilon_1\right)\rho^2.$$

这表明 $J(F)\in N$ 显然

$$c=\sup_{F\in M}\Phi^*(F)=\sup_{F\in N}\Phi^*(F). \tag{3.42}$$

根据引理3.5，存在$\{\varphi_n|n=1,2,\cdots\}\subset\bigcup_{F\in N}F$，使得

$$\lim_{n\to\infty}\Phi(\varphi_n)=c,$$

$$\lim_{n\to\infty}\|D\varphi_n\|=0,$$

其中 D 由(3.16)式定义．由于H是弱序列紧的，A是全连续算子，故不失一般性，可以假定 φ_n 弱收敛于H中的某元素φ_0，而$A\varphi_n$ 收敛于某元素ψ．由于A全连续，故Φ是弱连续的．因此，

$$\Phi(\varphi_0)=\lim_{n\to\infty}\Phi(\varphi_n)=c>\left(\frac{1}{2\lambda_0}-\varepsilon_1\right)\rho^2.$$

又因为 $\varphi_n\in\bigcup_{F\in N}F\subset S^*$，故对每一个 $n=1,2,\cdots$，有

$$\|P_1\varphi_n\|^2>\left[\frac{(\nu-\lambda_0-4\varepsilon_1\lambda_0\nu)\mu}{\nu\lambda_0-\mu\lambda_0}\right]\rho^2. \tag{3.43}$$

由(3.37)、(3.43)两式，可得

$$\begin{aligned}\|A\varphi_n\|&\geqslant\|B\varphi_n\|-\|A\varphi_n-B\varphi_n\|\geqslant\|BP_1\varphi_n\|-\varepsilon_2\rho\\&\geqslant\frac{1}{2\lambda_0}\|P_1\varphi_n\|-\varepsilon_2\rho>\left\{\frac{1}{2\lambda_0}\left[\frac{\nu-\lambda_0-4\varepsilon_1\lambda_0\nu)\mu}{\nu\lambda_0-\mu\lambda_0}\right]^{\frac{1}{2}}\right.\\&\qquad\left.-\varepsilon_2\right\}\rho.\end{aligned}$$

令 $n\to\infty$，得

$$\|\psi\|\geqslant\left\{\frac{1}{2\lambda_0}\left[\frac{(\nu-\lambda_0-4\varepsilon_1\lambda_0\nu)\mu}{\nu\lambda_0-\mu\lambda_0}\right]^{\frac{1}{2}}-\varepsilon_2\right\}\rho>0.$$

根据引理3.6，$\varphi_0\in S$，并存在实数 λ，使 $\varphi_0=\lambda A\varphi_0$，$\|\varphi_0\|=\rho<\delta$．

由(3.37)式可知

$$\|B\varphi_0-\lambda^{-1}\varphi_0\|=\|A\varphi_0-B\varphi_0\|\leqslant\varepsilon_2\rho,$$

$$|(B\varphi_0-\lambda^{-1}\varphi_0,\ \varphi_0)|\leqslant\|B\varphi_0-\lambda^{-1}\varphi_0\|\|\varphi_0\|\leqslant\varepsilon_2\rho^2. \tag{3.44}$$

由（3.39）、（3.40）两式知$\left|c-\frac{1}{2\lambda_0}\rho^2\right|\leqslant\varepsilon_1\rho^2$，故由（3.36）式可知

$$\begin{aligned}&|(B\varphi_0-\lambda_0^{-1}\varphi_0,\varphi_0)|\\ &\leqslant 2|\Phi(\varphi_0)-\frac{1}{2}(B\varphi_0,\varphi_0)|+2|\Phi(\varphi_0)-\frac{1}{2\lambda_0}(\varphi_0,\varphi_0)|\\ &\leqslant 2\varepsilon_1\rho^2+2|c-\frac{1}{2\lambda_0}\rho^2|\leqslant 4\varepsilon_1\rho^2.\end{aligned} \tag{3.45}$$

由（3.44）、（3.45）两式可知

$$|\lambda^{-1}-\lambda_0^{-1}|=\frac{1}{\rho^2}|(B\varphi_0-\lambda^{-1}\varphi_0,\varphi_0)-(B\varphi_0-\lambda_0^{-1}\varphi_0,\varphi_0)|\leqslant\varepsilon_2+4\varepsilon_1<\varepsilon.$$

这表明λ_0是A的歧点．证完．

注3.8 在第六章推论1.5中，利用拓扑度理论证明了：如果A全连续，$A\theta=\theta$，A'_θ存在，则A'_θ的奇代数重数特征值是A的歧点．而在本节的上述结论中，我们证明了，如果A还是梯度算子，则在某些附加条件下，A'_θ的一切特征值都是A的歧点．

下面的引理给出了泛函一致可微的一个充分条件．

引理3.9 设H是一个 Hilbert 空间（或更一般地，自反空间）．Ω是H中有界凸开集，$A:\overline{\Omega}\to H$是梯度算子，即存在泛函$\Phi:\overline{\Omega}\to R^1$：使$A=\mathrm{grad}\,\Phi$．又设$A$是强连续的．则$\Phi$在$\Omega$上是一致可微的．

证 先证A在$\overline{\Omega}$上一致连续．用反证法，设A在$\overline{\Omega}$上不

一致连续，则存在 $\varepsilon>0$，使得对每一个自然数 n，都存在 φ_n'，$\varphi_n''\in\overline{\Omega}$，使得

$$\|\varphi_n'-\varphi_n''\|<\frac{1}{n},\quad \|A\varphi_n'-A\varphi_n''\|\geqslant\varepsilon.$$

由于 H 是 Hilbert 空间，$\overline{\Omega}$ 有界凸，故不失一般性，可以假定 $\varphi_n'\xrightarrow{\text{弱}}\varphi_0$，$\varphi_n''\xrightarrow{\text{弱}}\varphi_0$。由于 A 强连续，故 $A\varphi_n'\to A\varphi_0$，$A\varphi_n''\to A\varphi_0$，即 $\|A\varphi_n'-A\varphi_n''\|\to 0$。产生矛盾。故 A 在 $\overline{\Omega}$ 上是一致连续的，即对任给 $\varepsilon>0$，都存在 $\delta>0$，使得当 $\|\varphi_1-\varphi_2\|<\delta$，$\varphi_1\in\overline{\Omega},\varphi_2\in\overline{\Omega}$ 时，有

$$\|A\varphi_1-A\varphi_2\|<\varepsilon. \tag{3.46}$$

下证 Φ 在 $\overline{\Omega}$ 上一致可微。任意给定 $\varepsilon>0$，由 A 的一致连续性，知存在 $\delta>0$，使当 $\varphi_1,\varphi_2\in\overline{\Omega}$，$\|\varphi_1-\varphi_2\|<\delta$ 时，必有 (3.46) 式成立。对任给 $\varphi\in\Omega$，取 h，使 $0<\|h\|<\delta$，$\varphi+h\in\Omega$。则

$$\begin{aligned}|\omega(\varphi,h)|&=|\Phi(\varphi+h)-\Phi(\varphi)-(A\varphi,h)|\\&=\left|\int_0^1 A(\varphi+th)\,hdt-\int_0^1(A\varphi)\,hdt\right|\\&\leqslant\int_0^1\|A(\varphi+th)-A\varphi\|\|h\|dt\leqslant\varepsilon\|h\|.\end{aligned}$$

即 Φ 在 Ω 中是一致可微的。证完。

考察 Hammerstein 型积分算子

$$A\varphi=\int_G k(x,y)f(y,\varphi(y))dy, \tag{3.47}$$

其中 G 是 R^N 中某有界闭集，$\text{mes}G<+\infty$。

定理3.10 设：(1) 线性积分算子

$$K\varphi=\int_G k(x,y)\varphi(y)dy \tag{3.48}$$

是映L_2入L_2的正定自共轭算子，并且映J_q入L_p全连续，其中$p>2$，$p^{-1}+q^{-1}=1$；

（2）$f(x,u)$ 对每个$u\in R^1$在G上可测，$f(x,0)\equiv 0$，$f'_u(x,u)$ 存在并且关于$u\in R^1$连续；

（3）存在$a(x)\in L_{\frac{p}{p-2}}$ 及常数$b>0$，使

$$|f'_u(x,u)|\leqslant a(x)+b|u|^{p-2},$$

则线性积分算子

$$B\psi=\int_G k(x,y)f'_u(y,0)\psi(y)dy \tag{3.49}$$

的每一个特征值都是A的歧点.

证 由条件（1）及第三章定理1.11可知，K的平方根$H=K^{\frac{1}{2}}$：$L_2\to L_p$是全连续算子，H^*：$L_q\to L_2$ 也是全连续算子. 由条件（3）可知

$$|f(x,u)|\leqslant\left|\int_0^u f'_u(x,u)\right|du$$

$$\leqslant a(x)|u|+\frac{b}{p-2}|u|^{p-1}. \tag{3.50}$$

由（3.50）式直接验证可知，$\mathrm{f}\varphi=f(x,\varphi(x))$映$L_p$入$L_q$. 故由第二章定理2.21可知，f：$L_p\to L_q$ 是连续有界算子.令

$$\Phi(\varphi)=\int_G dx\int_0^{H\varphi}f(x,u)du,$$

则 grad $\Phi=H^*\mathrm{f}H$. 由于$f(x,0)\equiv 0$，故$H^*\mathrm{f}H\theta=\theta$. 又易知$H^*\mathrm{f}H$：$L_2\to L_2$是强连续算子，故$\Phi$在$L_2$的任何有界集上都是一致可微的. 由条件（2）、（3）并根据M.M. Вайнберг〔1〕定理20.1，

$$\mathrm{f}'(\varphi)h=f'_u(x,\varphi(x))h(x).$$

因此，

$$\mathsf{f}(\varphi+h)-\mathsf{f}\varphi=f'_u(x,\varphi(x))h(x)+w(x,\varphi(x),h(x)),$$

其中 $\omega(x,\varphi(x),h(x))$满足

$$\lim_{\|h\|_p\to 0}\frac{\|\omega(x,\varphi(x),h(x))\|_q}{\|h\|_p}=0. \tag{3.51}$$

下证$H^*\mathsf{f}H$在任给 $\varphi\in L_2$处 Fréchet 可微. 事实上,

$$H^*\mathsf{f}H(\varphi+h)-H^*\mathsf{f}H\varphi=H^*[\mathsf{f}H(\varphi+h)-\mathsf{f}H\varphi]$$

$$=H^*[\mathsf{f}'(H\varphi)Hh]+H^*[\omega(x,H\varphi,Hh)]. \tag{3.52}$$

设$\|H^*\|$是H^*作为映 L_q到 L_2的算子时的算子范数，$\|H\|$是H作为映 L_2到L_p的算子时的算子范数,则,

$$\|H^*[\omega(x,H\varphi,Hh)]\|_2\leqslant\|H^*\|\|\omega(x,H\varphi,Hh)\|_q, \tag{3.53}$$

$$\|Hh\|_p\leqslant\|H\|\|h\|_2. \tag{3.54}$$

由（3.51)、(3.53)、(3.54）三式可知

$$\lim_{\|h\|_2\to 0}\frac{\|H^*[\omega(x,H\varphi,Hh)]\|_2}{\|h\|_2}=0$$

因此，$H^*\mathsf{f}H$在L_2上处处 Fréchet 可微，并且

$$(H^*\mathsf{f}H)'_\theta=H^*\mathsf{f}'(\theta)H.$$

对任给 $\varphi,\psi\in L_2$,

$$((H^*\mathsf{f}H)'_\theta\varphi,\psi)=(H^*\mathsf{f}'(\theta)H\varphi,\psi)$$

$$=(\mathsf{f}'(\theta)H\varphi,\ H\psi)=\int_G \mathsf{f}'_u(x,0)H\varphi H\psi dx$$

$$=(H\varphi,\mathsf{f}'(\theta)H\psi)=(\varphi,H^*\mathsf{f}'(\theta)H\psi).$$

因此$(H^*\mathsf{f}H)'_\theta$是自共轭算子.

根据定理3.7，$(H^*\mathsf{f}H)'_\theta$的一切特征值都是$H^*\mathsf{f}H$的歧点.

下证 $(H^*\mathrm{f}H)'_\theta$ 的特征值集合与 B 的特征值集合相同。一方面，设 $\lambda \neq 0$，$\varphi \neq \theta$ 满足

$$\lambda(H^*\mathrm{f}H)'_\theta\varphi=\varphi,$$

即 $\lambda H^*\mathrm{f}'(\theta)H\varphi=\varphi$，则显然 $H\varphi\neq\theta$。令 $\psi=H\varphi$，则

$$\lambda B\psi=\lambda HH^*\mathrm{f}'(\theta)\psi=\psi.$$

这表明 $(H^*\mathrm{f}H)'_\theta$ 的特征值一定是 B 的特征值，另一方面，设 $\lambda=\theta$，$\varphi\neq\theta$，使 $\lambda B\varphi=\varphi$，则

$$\lambda HH^*\mathrm{f}'(\theta)\varphi=\varphi.$$

显然$H^*\mathrm{f}'(\theta)\varphi\neq\theta$。令 $\psi=H^*\mathrm{f}(\theta)\varphi$，则

$$\begin{aligned}\lambda(H^*\mathrm{f}H)'_\theta\psi&=\lambda H^*\mathrm{f}'_\theta HH^*\mathrm{f}'(\theta)\varphi\\&=H^*\mathrm{f}'_\theta\varphi=\psi\end{aligned}$$

这表明B的特征值一定是$(H^*\mathrm{f}H)'_\theta$的特征值。

设 λ_0是B的特征值，并设 $\varepsilon>0$，$\delta>0$ 取定。因为 λ_0 是 $(H^*\mathrm{f}H)'_\theta$ 的特征值，故 λ_0是 $H^*\mathrm{f}H$ 的歧点。因此，存在实数λ及$\varphi\neq\theta$，使$\|\varphi\|<\|H\|^{-1}\delta$，$|\lambda-\lambda_0|<\varepsilon$，并且 $\varphi=\lambda H^*\mathrm{f}H\varphi$。显然$H\varphi\neq\theta$。令 $\psi=H\psi$，则 $0<\|\psi\|\leqslant\|H\|\|\varphi\|<\delta$，并且 $\psi=H\varphi=\lambda HH^*\mathrm{f}H\varphi=\lambda A\varphi$。这就证明了对任给 $\varepsilon>0$，$\delta>0$，都存在 λ 和 ψ，使$|\lambda-\lambda_0|<\varepsilon$，$0<\|\psi\|<\delta$，$\psi=\lambda A\psi$。即$\lambda_0$是$A$的歧点。因此，$B$ 的特征值一定是A的歧点。证完。

定理3.11 设：（1）$k(x,y)$是 $G\times G$ 上的对称连续正定核；

（2）存在 $a>0$，使 $f(x,u)$ 对几乎一切 $x\in G$，关于 $u\in[-a,a]$连续；

（3）$f(x,0)=0$，并存在 $b(x)\in L_q(q>1)$，使当 $x\in G$，$|u|\leqslant a$ 时，有

$$|f(x,u)|\leqslant b(x); \tag{3.55}$$

（4）$f'_u(x,0)$存在，并且

$$\lim_{\Delta u\to 0}\left[\frac{1}{\Delta u}f(x,\Delta u)-f'_u(x,0)\right]=0 \qquad (3.56)$$

关于$x\in G$一致成立；

则在L_∞空间中考虑时，由（3.49）式定义的线性积分算子B的一切特征值，都是A的歧点.

证 令K是由（3.49）式定义的线性积分算子. 由第三章（2.28）式的证明可知，K的主平方根$H=K^{\frac{1}{2}}$映L_2入L_∞，并且

$$\|H\varphi\|_\infty\leqslant\sqrt{M}\|\varphi\|_2. \qquad (3.57)$$

其中$M=\max\limits_{(x,y)\in G\times G}|k(x,y)|$. 令$\Omega=\{\varphi\in L_2\,|\,\|\varphi\|_2<aM^{-\frac{1}{2}}\}$，则由（3.57）式可知，当$\varphi\in\overline{\Omega}$时

$$\text{ess sup}|H\varphi(x)|\leqslant a.$$

因此，由条件（3）知，$\mathrm{f}(H\varphi)=f(x,H\varphi(x))\in L_q$.把$H$看成是映$L_2$入$L_p$（其中$p^{-1}+q^{-1}=1$）的线性算子（显然$H$全连续），把f看成是映

$$\{\varphi\in L_p\,|\,\text{ess sup}|\varphi(x)|\leqslant a\}$$

入L_q的算子（它是连续、有界算子），把H^*看成是映L_q入L_2的算子（它全连续），则$H^*\mathrm{f}H$映$\overline{\Omega}$入L_2强连续.对$\varphi\in\overline{\Omega}$，定义

$$\Phi(\varphi)=\int_G dx\int_0^{H\varphi}f(x,u)du,$$

则显然Φ: $\overline{\Omega}\to R^1$是一致可微的C^1泛函，并且有$\text{grad}\Phi=H^*\mathrm{f}H$. 下证$H^*\mathrm{f}H$在$\theta$处有Frechet导算子：

$$(H^*\mathrm{f}H)'_\theta=H^*[f'_u(x,0)H]. \qquad (3.58)$$

事实上，任给$\varepsilon>0$，由条件（4）知，存在$\delta>0$，使

当 $x\in G$，$|\varDelta u|\leqslant\delta$ 时，有

$$|f(x,\varDelta u)-\varDelta u f'_u(x,0)|\leqslant\varepsilon\,|\varDelta u|M^{-\frac{1}{2}}\|H^*\|^{-1}(\text{mes}G)^{-\frac{1}{q}}$$

其中$\|H^*\|$是把H^*看成映 L_q入L_2的线性算子时的算子范数．设 $h\in L_2$，$\|h\|_2\leqslant\delta M^{-\frac{1}{2}}$，则对几乎一切 $x\in G$，有

$$|Hh(x)|\leqslant\delta.$$

所以，对几乎一切 $x\in G$，有

$$\begin{aligned}&|f(x,Hh(x))-Hh(x)f'_u(x,0)|\\&\leqslant\varepsilon|Hh(x)|M^{-\frac{1}{2}}\|H^*\|^{-1}(\text{mes}G)^{-\frac{1}{q}}\\&\leqslant\varepsilon\|h\|_2\|H^*\|^{-1}(\text{mes}G)^{\frac{1}{q}}.\end{aligned}\tag{3.59}$$

由(3.59)式可得

$$\frac{\|H^*\mathrm{f}Hh(x)-H^*[f'_u(x,0)Hh(x)\|_2}{\|h\|_2}$$

$$\leqslant\frac{H^*\|\|\mathrm{f}Hh(x)-Hh(x)f'_u(x,0)\|_q}{\|h\|_2}\leqslant\varepsilon.$$

因此，（3.58）式成立．由定理3.10的证明知（$H^*\mathrm{f}H)'_\theta$是自共轭算子．根据定理3.7,$(H^*\mathrm{f}H)'_\theta$的一切特征值，都是$H^*\mathrm{f}H$的歧点．

显然，由(3.47)式定义的积分算子A映

$$\{\varphi\in L_\infty\,|\,\|\varphi\|_\infty\leqslant a\}$$

入 L_∞全连续．下证由(3.49)式定义的线性积分算子 B 映 L_∞入 L_∞．事实上，由条件（4）知，存在$L>0$，使得$L<a$,并且

$$|f(x,l)-lf'_u(x,0)|\leqslant l.$$

所以，

$$|f'_u(x,0)|\leqslant\frac{1}{l}|f(x,l)|+\frac{1}{l}|f(x,l)-lf'_u(x,0)|$$

$$\leqslant \frac{1}{l}|f(x,l)|+1.$$

由条件（3）知，$f'_u(x,0)\in L_q$. 若 $\varphi(x)\in L_\infty$,则$\varphi(x)\in L_p$ $(p^{-1}+q^{-1}=1)$.故

$$|B\varphi(x)|=\left|\int_G k(x,y)f'_u(y,0)\varphi(y)dy\right|$$

$$\leqslant M\int_G |f'_u(y,0)\varphi(y)|dy.$$

这表明 $B\varphi\in L_\infty$，即B映L_∞入L_∞.用与定理3.10相同的证明方法可知，在L_∞空间中，B 的一切特征值都是A的歧点.证完.

附注 M.A.Красноселский〔5〕(也见他的〔1〕)中，首先利用变分方法研究了非线性算子方程的分歧理论，并应用于非线性积分方程. 他的工作构成了本节的主要内容.

利用 Morse 理论，可以得出本节主要定理（定理3.7）的一个推广，关于这一点，可见M.S.Berger〔1〕.

§4 Люстерник-Шнирельман 理论的应用

设H是无穷维可分 Hilbert 空间，T 是H中的单位闭球，$S=\partial T$.设 $\Phi:H\to R^1$满足

1°Φ是弱连续的，并且在T上一致可微；

2°Φ在 S 上是偶泛函，即对任给 $\varphi\in S$，$\Phi(-\varphi)=\Phi(\varphi)$；

3°当$\varphi=\theta$ 时，$\Phi(\varphi)=0$；当 $\varphi\neq\theta$时，$\Phi(\varphi)>0$；

4°令$A=\mathrm{grad}\,\Phi$，则 $A\theta=\theta$，并且当 $\varphi\neq\theta$ 时$A\varphi\neq\theta$.

设 S^{k-1} 是 k 维 Euclidean 空间 R^k 中的单位球面，令

$$M_k=\{BS^{k-1}\mid B:S^{k-1}\to S \text{ 是奇的连续映射}\}.$$

对任给 $F\in M_k$，定义

$$\Phi^*(F)=\inf_{\varphi\in F}\Phi(\varphi); \tag{4.1}$$

令

$$c_k=\sup_{F\in M_k}\Phi^*(F). \tag{4.2}$$

引理4.1 设假设1°～4°成立，则

(i)对每一个自然数 k，都有

$$c_k\geqslant c_{k+1},\quad c_k>0; \tag{4.3}$$

(ii)$\lim\limits_{k\to\infty}c_k=0$.

证 先证(i)。$c_k>0$ 是显然的。我们仅需证 $c_k\geqslant c_{k+1}$ 任给 $\varepsilon>0$，由 c_{k+1} 的定义知存在 $F_1\in M_{k+1}$，使

$$\Phi^*(F_1)>c_{k+1}-\varepsilon.$$

设 $F_1=BS^k$，其中$B:S^k\to S$ 是某个连续的奇映射。显然 $F_0=BS^{k-1}\in M_k$，$F_0\subset F_1$。所以

$$\Phi^*(F_0)=\inf_{\varphi\in F_0}\Phi(\varphi)\geqslant\inf_{\varphi\in F_1}\Phi(\varphi)=\Phi^*(F_1)>c_{k+1}-\varepsilon.$$

故有

$$c_k=\sup_{F\in M_k}\Phi^*(F)\geqslant\Phi^*(F_0)>c_{k+1}-\varepsilon.$$

由于 $\varepsilon>0$ 是任取的，故 $c_k\geqslant c_{k+1}$.(i)获证。

再证(ii)。任给 $\varepsilon>0$。令 $E_n(n=1,2,\cdots)$ 是H的有限维子空间族，满足

$$E_1\subset E_2\subset\cdots\subset E_n\subset\cdots,\quad \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n}=H.$$

用P_n表示H到 E_n 的直交投影算子。下面首先证明：必存在自然数 k_0，满足

$$|\Phi(\varphi)-\Phi(P_{k_0}\varphi)|<\frac{\varepsilon}{2}\quad(\varphi\in T).\tag{4.4}$$

事实上，如果这样自然数 k_0 不存在，则必存在 $\varphi_n\in T$，使得

$$|\Phi(\varphi_n)-\Phi(P_n\varphi_n)|\geqslant\frac{\varepsilon}{2}\quad(n=1,2,\cdots).$$

不失一般性，可以假定 $\varphi_n\xrightarrow{\text{弱}}\varphi_0\in T$，$P_n\varphi_n\xrightarrow{\text{弱}}\psi_0\in T$。因此由$\Phi$的弱连续性可知，必有

$$|\Phi(\varphi_0)-\Phi(\psi_0)|\geqslant\frac{\varepsilon}{2}.$$

故

$$\varphi_0\neq\psi_0.\tag{4.5}$$

另一方面，又有

$$\begin{aligned}\|\varphi_0-\psi_0\|^2&=(\varphi_0-\psi_0,\varphi_0-\psi_0)\\&=\lim_{n\to\infty}(\varphi_n-P_n\varphi_n,\varphi_0-\psi_0)\\&=\lim_{n\to\infty}(\varphi_n,\ (I-P_n)(\varphi_0-\psi_0))\\&\leqslant\lim_{n\to\infty}\|\varphi_n\|\|(I-P_n)(\varphi_0-\psi_0)\|=0.\end{aligned}$$

故 $\varphi_0=\psi_0$。此与(4.5)式矛盾。因此(4.4)式成立。

由3°知存在$1>\rho>0$，使得当$\|\varphi\|\leqslant\rho$时，

$$\Phi(\varphi)<\frac{\varepsilon}{2}.$$

于是，当 $\varphi\in T$，$\|P_{k_0}\varphi\|\leqslant\rho$ 时，必有

$$\Phi(\varphi)\leqslant|\Phi(\varphi)-\Phi(P_{k_0}\varphi)|+\Phi(P_{k_0}\varphi)<\varepsilon.\tag{4.6}$$

令 $F=\{\varphi\in T\,|\,\Phi(\varphi)\geqslant\varepsilon\}$，则由(4.6)式易知

$$P_{k_0}F\subset\{\varphi\in E_{k_0}\,|\,\rho\leqslant\|\varphi\|\leqslant1\}.\tag{4.7}$$

因此，F 的《类》$\gamma(F)$（《类》的定义和性质见附录§3）满足

$$\gamma(F)\leqslant\gamma(P_{k_0}F)\leqslant k_0.$$

对任何 $k>k_0$，当$N\in M_k$时，必存在连续奇映射 $B:S^{k-1}\to S$，使$N=BS^{k-1}$．所以

$$\gamma(N)=\gamma(BS^{k-1})\geqslant\gamma(S^{k-1})=k>k_0.$$

由此易知，必存在$\varphi\in N$，使 $\Phi(\varphi)<\varepsilon$.于是$\Phi^*(N)<\varepsilon$，从而$c_k\leqslant\varepsilon$（当 $k>k_0$时）．(ii)获证．引理4.1证完．

定理4.2 设假设1°～4°成立．则对每一个自然数 k，都存在A的特征元 $\psi_k\in S$，使得

$$\Phi(\psi_k)=c_k. \tag{4.8}$$

从而A在 S 上有无穷多个特征元．

证 对 $\varphi\in S$，定义

$$D\varphi=A\varphi-(A\varphi,\varphi)\varphi,$$

$$J\varphi=\frac{\varphi+\alpha(\varphi)D\varphi}{\|\varphi+\alpha(\varphi)D\varphi\|}.$$

其中 $\alpha(\varphi)$由(3.19)式确定(取$\rho=1$)．因为 $\Phi(\varphi)$在S上是偶泛函，故D是S上的奇映射，从而 $J:S\to S$是奇映射．因此$JM_k\subset M_k$，即对任给$N\in M_k$，都有$JN\in M_k$.

根据引理3.5，存在 $\varphi_n\in S(n=1,2,\cdots)$，使得

$$\lim_{n\to\infty}\Phi(\varphi_n)=c_k, \tag{4.9}$$

$$\lim_{n\to\infty}\|D\varphi_n\|=0. \tag{4.10}$$

根据附录定理3.7(ii)，A在T上是强连续的．因为 T 是弱列紧的，故由(4.9)、(4.10)两式，可以不失一般性地假定

$$\varphi_n\xrightarrow{\text{弱}}\varphi_0\in T,$$

$$A\varphi_n\to A\varphi_0,$$

$$\Phi(\varphi_0)=c_k.$$

由 $c_k>0$ 及假设3°可知 $\varphi_0\neq\theta$，从而由假设 4°知 $A\varphi_0\neq\theta$。因此，根据引理3.6，$\varphi_n\to\varphi_0$，并且存在 $\lambda\neq 0$，使得

$$\lambda^{-1}A\varphi_0=\varphi_0,$$

因此，$\varphi_0\in S$是A的特征元，并且$\Phi(\varphi_0)=c_k$。

综上所述可知，对每一个自然数 k，都存在 A 的特征元 $\psi_k\in S$，使$\Phi(\psi_k)=c_k$。由引理4.1知诸 c_k 中有无穷个是两两互不相等的，从而A在S上有无穷多个特征元．证完．

注4.3 显然，如果把T换成任一个半径为$r(r>0)$的闭球，$S=\partial T$，定理4.2的结论仍然成立．

考虑 Hammerstein 型积分方程

$$\varphi(x)=\lambda\int_G k(x,y)f(y,\varphi(y))dy=\lambda A\varphi(x). \quad (4.11)$$

其中G是 R^n 中的可测集，$0<\text{mes}\,G\leqslant+\infty$。假设

1* $k(x,y)$是正定对称核，有无穷多个特征值，由$k(x,y)$确定的线性积分算子K映L_2入L_2全连续，并且映 L_q入L_p全连续，其中$p>2$，$p^{-1}+q^{-1}=1$；

2* 存在 $a(x)\in L_q$，$b>0$，使对任给 $x\in G$，$u\in R^1$，有

$$|f(x,u)|\leqslant a(x)+b|u|^{p-1}; \quad (4.12)$$

3* 对任给 $x\in G$，$u\in R^1$，有

$$f(x,-u)=-f(x,u); \quad (4.13)$$

4* 对任给 $x\in G$，$|u|>0$，有

$$f(x,u)u>0. \quad (4.14)$$

定理4.4 设假设1*～4* 成立．则对任给 $c>0$，方程(4.11)在集合

$$R_c=\{\varphi\in L_p\,|\,\|H^{-1}\varphi\|=c\}$$

上都有无穷多个特征函数，其中H是K的主平方根，$\|H^{-1}\varphi\|$

是$H^{-1}\varphi$在L_2中的范数.

证 显然H映L_2到L_p全连续. 令

$$\Phi(\varphi)=\int_G dx\int_0^{H\varphi} f(x,u)du,$$

则$\Phi: L_2\to R^1$是弱连续的，并且由定理3.10的证明知Φ在L_2的任一闭球上都是一致可微的. 令

$$H_0=\{\varphi\in L_2\,|\,K^{\frac{1}{2}}\varphi=\theta\},$$

则H_0是L_2的线性闭子空间，令H_1满足

$$H_0\oplus H_1=L_2,$$

则H_1也是一个可分的 Hilbert 空间. 显然K的一切特征函数都属于H_1，故由1*知H_1是无穷维空间. 把Φ看成是定义在H_1上的泛函，Φ显然也是弱连续的，并且在H_1中的任何一个闭球上都是一致可微的. 定理4.2的假设1°成立.

对任给$\varphi\in H_1$，$\varphi\neq\theta$，由H_1的定义知$H\varphi=K^{\frac{1}{2}}\varphi\neq\theta$，由4*易知$\Phi(\varphi)>0$. 又显然$\Phi(\theta)=0$. 故定理4.2的假设3°满足. 由3*可知定理4.2的假设2°满足. 最后，由H_1的定义及4*可知$H^*\mathrm{f}H\theta=\theta$，并且当$\varphi\neq\theta$时$H^*\mathrm{f}H\varphi\neq\theta$. 即定理4.2的假设4°也满足. 因此，根据定理4.2及其注4.3可知，对任给$c>0$，$H^*\mathrm{f}H$在$\{\varphi\in H_1\,|\,\|\varphi\|=c\}$上都有无穷多个特征函数. 设$\varphi_0\in H_1$是$H^*\mathrm{f}H$的一个特征函数，即存在$\lambda_0$，使$\varphi_0=\lambda_0H^*\mathrm{f}H\varphi_0$，则$H\varphi_0=\lambda_0HH^*\mathrm{f}H\varphi_0=\lambda_0K\mathrm{f}H\varphi_0=\lambda_0AH\varphi_0$；由$H_1$的定义知$H\varphi_0\neq\theta$，故$H\varphi_0$是$A$的特征函数. 显然，若$\|\varphi_0\|=c$，则$H\varphi_0\in\{\varphi\in L_2\,|\,H^{-1}\varphi=c\}$. 又，如果$\varphi_1\in H_1$及$\varphi_2\in H_1$都是$H^*\mathrm{f}H$的特征函数，$\varphi_1\neq\varphi_2$，则$\varphi_1-\varphi_2\in H_1$，从而$H(\varphi_1-\varphi_2)=K^{\frac{1}{2}}(\varphi_1-\varphi_2)\neq\theta$. 这表明$H^*\mathrm{f}H$的不同的特

征函数对应着A的不同的特征函数．综上所述可知，A在集合$\{\varphi\in L_2 \mid \|H^{-1}\varphi\|=c\}$上有无穷多个不同的特征函数．证完．

最后，我们利用附录定理3.9研究方程

$$\varphi(x)=\int_G k(x,y)f(y、\varphi(y)))=A\varphi(x) \qquad (4.15)$$

无穷多个解的存在性，其中G是R^n的可测集，$0<\mathrm{mes}\,G<+\infty$．

定理4.5 设$k(x,y)$是拟正定对称核，由$k(x,y)$确定的线性积分算子K映L_q入L_p全连续（$p>2$，$p^{-1}+q^{-1}=1$），并且K（作为映L_2入L_2的算子）有无穷多个特征值．设$f(x,u)$满足定理1.1的假设2°～4°，并且

$$f(x,-u)=-f(x,u)\quad (x\in G, u\in R^1), \qquad (4.16)$$

$$\lim_{u\to\infty}\frac{f(x,u)}{u}=+\infty \quad (\text{关于}x\in G\text{一致}). \qquad (4.17)$$

则方程(4.15)在L_p中有无穷多个非平凡解．

证 先设K是正定核．令$H_0=\{\varphi\in L_2 \mid K^{\frac{1}{2}}\varphi=\theta\}$，$H_2=L_2\ominus H_0$，则由定理4.4的证明知，$H_1$是无穷维的Hilbert空间．对任给$\psi\in H_1$，定义

$$\Psi(\psi)=\frac{1}{2}\|\psi\|^2-\int_G dx\int_0^{H\psi} f(x,v)dv,$$

则$\Psi: H_1\to R^1$，并且$\Psi'=I \quad H^*fH$．由(4.16)式可知Ψ是偶泛函．由定理1.1的证明可知（那里的证明在H_1中也成立），Ψ在H_1上满足$P.S$条件，$\Psi(\theta)=\theta$，并且存在$a>0$，$\rho>0$，使得

$$\Psi(\psi)\geqslant 0 \quad (\psi\in H_1,\ \|\psi\|\leqslant\rho), \qquad (4.18)$$

$$\Psi(\psi)\geqslant a \quad (\psi\in H_1,\ \|\psi\|=\rho). \qquad (4.19)$$

下面证明：对H_1的任何有限维子空间E_0，集合$E_0\cap\{\psi\in H_1|\Psi(\psi)\geqslant 0\}$都是有界的。用反证法，假定存在$H_1$的有限维子空间$E_0$，以及$h_n\in E_0$，$\|h_n\|\to+\infty$，使得

$$\Psi(h_n)\geqslant 0\quad (n=1,2,\cdots). \tag{4.20}$$

令$t_n=\|h_n\|$，$\psi_n=\frac{1}{t_n}h_n$，则$\psi_n\in E_0$，$\|\psi_n\|=1$，$h_n=t_n\psi_n$，并且$t_n\to+\infty$。因为E_0是有限维空间，故不失一般性，可以假定$\psi_n\to\psi_0\in E_0$。因此，$\|\psi_0\|=1$，

$$\lim_{n\to\infty}\|H\psi_n-H\psi_0\|_p=0. \tag{4.21}$$

由(4.21)式可知$\{H\psi_n\}$含有一个子列，不失一般可以假定就是$\{H\psi_n\}$本身，在G上几乎处处收敛于$H\psi_0$。因为$\psi_0\in E_0\subset H_1$，故$H\psi_0\neq\theta$。令$v_n=H\psi_n$ $(n=0,1,2,\cdots)$，$G_0=\{x\in G|v_0(x)\neq 0,\ v_n(x)\to v_0(x)\}$，$a_0=\left(\int_G[v_0(x)]^2dx\right)^{\frac{1}{2}}$，则$\operatorname{mes}G_0>0$，$a_0>0$。由(4.17)式知，存在$R>0$，使当$x\in G$，$|u|\geqslant R$时，有

$$\frac{f(x,u)}{u}\geqslant\frac{8}{a_0^2}. \tag{4.22}$$

利用与(1.15)式相同的证明方法可以证明

$$\int_G F(x,Hh_n)dx=\int_G F(x,t_nv_n)dx$$

$$\geqslant\frac{4}{a_0^2}t_n^2\int_{D_n}[v_n(x)]^2dx-M^*, \tag{4.23}$$

其中$D_n=\{x\in G\,\big|\,|t_nv_n(x)|\geqslant R\}$ $(n=1,2,\cdots)$，

$$M^*=\left(\frac{4R^2}{a_0^2}+2aR+\frac{2bR^p}{p}\right)\operatorname{mes}G$$

是一个常数。由(4.21)式并利用Hölder 不等式，有

$$\left|\left(\int_{D_n}[v_n(x)]^2dx\right)^{\frac{1}{2}}-\left(\int_{D_n}[v_0(x)]^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\right|$$

$$\leqslant\left(\int_{D_n}[v_n(x)-v_0(x)]^2dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant\left(\int_G|H\psi_n(x)-H\psi_0(x)|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant(\text{mes }G)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}\left(\int_G|H\psi_n(x)-H\psi_0(x)|^pdx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\to 0\ (n\to\infty),$$

所以存在$N_1>0$，使当$n>N_1$时

$$\left(\int_{D_n}[v_n(x)]^2dx\right)^{\frac{1}{2}}>\left(\int_{D_n}[v_0(x)]^2dx\right)^{\frac{1}{2}}-\frac{a_0}{4}. \quad (4.24)$$

令 $D_n^*=\bigcap\limits_{n=k}^{\infty}D_k$，$D^*=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}D_n^*$，则 $D_1^*\subset D_2^*\subset\cdots\subset D^*$，$D_n^*\subset D_n$，并且 $\lim\limits_{n\to\infty}\text{mes }D_n^*=\text{mes }D^*$。所以，存在$N_2>0$，使当$n>N_2$时，有

$$\left(\int_{D_n}[v_0(x)]^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\geqslant\left(\int_{D_n^*}[v_0(x)]^2dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$>\left(\int_{D^*}[v_0(x)]^2dx\right)^{\frac{1}{2}}-\frac{a_0}{4}. \quad (4.25)$$

由D_0的定义易知$G_0\subset D^*$，从而

$$\left(\int_{D^*}[v_0(x)]^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\geqslant\left(\int_{G_0}[v_0(x)]^2dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=a_0. \quad (4.26)$$

由(4.24)、(4.25)、(4.26)三式可知，当$n>\max\{N_1, N_2\}$时

$$\left(\int_{D_n}[v_n(x)]^2dx\right)^{\frac{1}{2}}>\frac{a_0}{2}. \tag{4.27}$$

由(4.23)、(4.27)两式，有

$$\Psi(h_n)\leqslant\frac{1}{2}\|h_n\|^2-(t_n^2-M^*)=-\frac{t_n^2}{2}+M^*$$

(当 $n>\max\{N_1,N_2\}$时)。令$n\to\infty$，可知 $\lim\limits_{n\to\infty}\Psi(h_n)=-\infty$。此与(4.20)式矛盾。因此，对$H_1$的任何有限维子空间$E_0$，集合 $E_0\cap\{\psi\in H_1|\Psi(\psi)\geqslant 0\}$ 都是有界的。

根据附录定理3.9，Ψ在H_1中有无穷多个非平凡临界点 ψ_n^* $(n=1,2,\cdots)$。仿定理4.4的证明可知 $H\psi_n^*\neq\theta$，并且 $\varphi_n^*=H\psi_n^*$是方程(4.15)的非平凡解。当 $\psi_n^*\neq\psi_m^*$ 时，由 $\psi_n^*-\psi_m^*\in H_1$，$\psi_n^*-\psi_m^*\neq\theta$知$H(\psi_n^*-\psi_m^*)\neq\theta$，从而 $\varphi_n^*\neq\varphi_m^*$。这表明方程(4.15) 有无穷多个非平凡解。当$K$是正定核时定理4.5获证。

设K是拟正定核。由定理1.4的证明可知，只需证明方程(1.29) 有无穷多个非平凡解即可。由(4.16)式知

$$\begin{aligned}f_1(x,u)&=-u+\frac{1}{\lambda}f(x,\ -u)=-u-\frac{1}{\lambda}f(x,u)\\&=-f_1(x,u).\end{aligned} \tag{4.28}$$

由(4.17)式可知，对 $x\in G$，一致有

$$\begin{aligned}\lim_{u\to\infty}\frac{f_1(x,u)}{u}&=\lim_{u\to\infty}\frac{1}{u}\left[u+\frac{1}{\lambda}f(x,u)\right]\\&=1+\frac{1}{\lambda}\lim_{u\to\infty}\frac{f(x,u)}{u}=+\infty.\end{aligned} \tag{4.29}$$

由定理1.4的证明知(1.30)、(1.33)、(1.34)式仍成立。注意到K_1是有无穷多个特征值的正定自共轭性算子，并且映L_q入λL_p全连续，故由前面已经证明的结论可知方程 (1.29)在 L_p中有

无穷多个非平凡解。由第三章引理3.8即知，方程(4.15)在L_p中有无穷多个非平凡解。证完。

附注 Люстерник–Шнирельман理论是Л.А. Дюстерник〔4〕和Л.А.Дюстерник，Л.Г.Шнирельман〔1〕首先建立起来的。这一理论经过许多数学家的努力，已有了非常广泛的发展(参见张恭庆〔1〕。

定理4.2和定理4.4选自М.А.Красносельский〔1〕。定理4.5是郭大钧〔30〕证明的。

第八章　Volterra型非线性积分方程

在本章中，讨论形如

$$x(t)=h(t)+\int_0^t k(t,s,x(s))ds$$

的非线性积分方程，其中$x(t)$是未知函数．这类方程称为是Volterra型非线性积分方程．

§1　Volterra型非线性积分方程的可解性与解的延拓

考察Volterra型非线性积分方程

$$x(t)=h(t)+\int_0^t k(t,s,x(s))ds=Ax(t),\ t\geqslant 0\ . \tag{1.1}$$

在本节中，使用下列假设：

1°$h(t)$是定义在$[0,+\infty)$上的连续函数；

2°对$0\leqslant s\leqslant t<+\infty, u\in R^1$，$k(t,s,u)$关于$(t,s,u)$可测；对任何固定的$(t,s)$，$k(t,s,u)$关于$u$连续，并且当$s>t$时$k(t,s,u)=0$；

3°对任给$b>0$，$c>0$，都存在可测函数$m(t,s)$，使得

$$|k(t,s,u)|\leqslant m(t,s),\quad 0\leqslant s\leqslant t\leqslant b, |u|\leqslant c, \tag{1.2}$$

$$\sup\left\{\int_0^t m(t,s)ds \mid 0\leqslant t\leqslant b\right\}<+\infty; \tag{1.3}$$

4°对$[0,+\infty)$中的任何一个有界闭区间J及任给$c_1>0$，$t_0\geqslant 0$，都有

$$\lim_{t\to t_0}\sup\left\{\int_J |k(t,s,\varphi(s))-k(t_0,s,\varphi(s))|ds \,\middle|\, \varphi\in C(J),\right.$$

$$\left.\|\varphi\|\leqslant c_1\right\}=0. \tag{1.4}$$

显然，如果当$0\leqslant s\leqslant t<+\infty, u\in R^1$时，$k(t,s,u)$连续，则$k(t,s,u)$满足上述假设$2^\circ\sim 4^\circ$.

定理1.1 设假设$1^\circ\sim 4^\circ$满足，则存在$\beta>0$及定义在$[0,\beta]$上的连续函数$x^*(t)$，使当$0\leqslant t\leqslant\beta$时，$x^*(t)$是方程(1.1)的解.

证 令$c_1=1+\max\limits_{t\in[0,1]}|h(t)|$，$J=[0,1]$，$t_0=0$.

$$R(T)=\sup\left\{\int_0^t |k(t,s,\varphi(s))|ds \,\middle|\, 0\leqslant t\leqslant T, \varphi\in C([0,1]),\right.$$

$$\left.\|\varphi\|\leqslant c_1\right\}$$

则由假设4°、2°可知，必有$\lim\limits_{T\to 0^+}R(T)=0$.取$\beta\in(0,1)$，使得当$0\leqslant T\leqslant\beta$时，$R(T)<1$. 令

$$D=\{\varphi\in C([0,\beta])\mid \|\varphi(t)-h(t)\|\leqslant 1\}$$

则D是Banach空间$C([0,\beta])$中的有界凸闭集. 任给$\varphi\in D$，定义

$$T\varphi(t)=h(t)+\int_0^t k(t,s,\varphi(s))ds \quad (0\leqslant t\leqslant\beta).$$

由c_1的定义可知当$\varphi\in D$时$\|\varphi\|\leqslant c_1$，因此

$$\|T\varphi(t)-h(t)\|\leqslant\max_{t\in[0,\beta]}\int_0^t |k(t,s,\varphi(s))|ds\leqslant R(\beta)<1,$$

于是T映D入D.

任给$\varphi\in D$，$t\in[0,\beta]$，$t+\delta\in[0,\beta]$，有

$$|T\varphi(t+\delta)-T\varphi(t)|\leqslant|h(t+\delta)-h(t)|$$

$$+\int_0^{\beta}|k(t+\delta,s,\varphi(s))-k(t,s,\varphi(s))|ds. \qquad (1.5)$$

由假设4°可知对$\varphi\in D$,一致有

$$\lim_{\delta\to 0}\int_0^{\beta}|k(t+\delta,s,\varphi(s))-k(t,s,\varphi(s))|ds=0.$$

注意到$\lim\limits_{\delta\to 0}|h(t+\delta)-h(t)|=0$,故由(1.5)式可知，对$\varphi\in D$,一致地有$\lim\limits_{\delta\to 0}|T\varphi(t+\delta)-T\varphi(t)|=0$. 注意到$T(D)\subset D$，故$T(D)$是〔0，$\beta$〕上的一致有界的等度连续的函数族．于是，$T:D\to D$是一个紧算子．

设$\varphi_n\in D,\varphi_0\in D,\|\varphi_n-\varphi_0\|\to 0$. 对固定的$t\in[0,\beta]$，由假设2°可知：对每一个$s\in[0,t]$,有

$$\lim_{n\to\infty}k(t,s,\varphi_n(s))=k(t,s,\varphi_0(s)).$$

由假设3°可知，存在可测函数$m(t,s)$，使

$$|k(t,s,\varphi_n(s))|\leqslant m(t,s),\quad 0\leqslant s\leqslant t\leqslant\beta,n=1,2,\cdots,$$

$$|k(t,s,\varphi_0(s))|\leqslant m(t,s),\quad 0\leqslant s\leqslant t\leqslant\beta.$$

由于$m(t,\cdot)\in L([0,t])$,故由Lebesgue控制收敛定理可知

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^t k(t,s,\varphi_n(s))ds=\int_0^t k(t,s,\varphi_0(s))ds.$$

因此，对每个固定的$t\in[0,\beta]$,

$$\lim_{n\to\infty}T\varphi_n(t)=T\varphi_0(t).$$

注意到$\{T\varphi_n|n=1,2,\cdots\}$是等度连续的,故易知在$C([0,\beta])$的范数下必有$\lim\limits_{n\to\infty}T\varphi_n=T\varphi_0$，即$T$：$D\to D$是连续算子．根据Schauder不动点定理，即可知必存在$x^*(t)\in D$,使得当$0\leqslant t\leqslant\beta$时，$x^*(t)$是方程(1.1)的解,证完．

为了研究方程(1.1)解的唯一性，使用下列假设：

5°对$[0,+\infty)$的任给有界闭集I，I上的任意连续函数φ及

任给$t_0\geqslant 0$，都有

$$\lim_{t\to t_0}\int_I [k(t,s,\varphi(s))-k(t_0,s,\varphi(s))]ds=0\,; \tag{1.6}$$

6°对任给$b_2>0$，$c_2>0$，都存在可测函数$m_1(t,s)$，使得对$0\leqslant s\leqslant t\leqslant b_2$及任给$|u_1|\leqslant c_2$，$|u_2|\leqslant c_2$，都有

$$|k(t,s,u_1)-k(t,s,u_2)|\leqslant m_1(t,s)|u_1-u_2|, \tag{1.7}$$

并且对每一个$t\in[0,b_2]$，$m_1(t,s)\in L([0,t])$，

$$\lim_{\delta\to 0}\int_t^{t+\delta} m_1(t+\delta,s)ds=0\,. \tag{1.8}$$

定理1.2 设假设1°、2°、3°、5°、6°满足．又设对每个由假设3°确定的$m(t,s)$，都有

$$\lim_{t\to 0^+}\int_0^t m(t,s)ds=0\,. \tag{1.9}$$

则存在$\beta>0$，使方程(1.1)在$[0,\beta]$上有唯一的连续解．

证 令$c=c_2=1+\max\limits_{t\in[0,1]}|h(t)|$，$b=b_2=1$，$m(t,s)$和$m_1(t,s)$分别由假设3°和假设6°确定，取$\beta\in(0,1)$，使得

$$\int_0^t m_1(t,s)ds\leqslant\frac{1}{2},\qquad \int_0^t m(t,s)\leqslant 1 \tag{1.10}$$

对任给$t\in[0,\beta]$成立．在Banach空间$C([0,\beta])$中考察算子

$$T\varphi(t)=h(t)+\int_0^t k(t,s,\varphi(s))ds,\ 0\leqslant t\leqslant\beta.$$

令$D=\{\varphi\in C([0,\beta])\,|\,\|\varphi(t)-h(t)\|\leqslant 1\}$，设$\varphi\in D$，则对$t\in[0,\beta]$，有

$$|T\varphi(t)-h(t)|\leqslant\int_0^t |k(t,s,\varphi(s))|ds\leqslant$$

$$\int_0^t m(t,s)ds\leqslant 1\,. \tag{1.11}$$

当$\varphi\in D$，$t\in[0,\beta]$，$t+\delta\in[0,\beta]$时，有

$$|T\varphi(t+\delta)-T\varphi(t)|\leqslant|h(t+\delta)-h(t)|$$
$$+\left|\int_0^{\beta}[k(t+\delta,s,\varphi(s))-k(t,s,\varphi(s))]ds\right|,$$

故由假设1°、5°可知，对任给$t\in[0,\beta]$，

$$\lim_{\delta\to 0}|T\varphi(t+\delta)-T\varphi(t)|=0.$$

即$T\varphi\in C([0,\beta])$。再由(1.11)式知$T\varphi\in D$,即$T:D\to D$.

设$\varphi_1\in D,\varphi_2\in D,t\in[0,t]$,则

$$|T\varphi_1(t)-T\varphi_2(t)|\leqslant\int_0^t|k(t,s,\varphi_1(s))-k(t,s,\varphi_2(s))|ds$$

$$\leqslant\int_0^t m_1(t,s)|\varphi_1(s)-\varphi_2(s)|ds\leqslant\|\varphi_1-\varphi_2\|\int_0^t m_1(t,s)ds$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\|\varphi_1-\varphi_2\|.$$

因此，$\|T\varphi_1-T\varphi_2\|\leqslant\frac{1}{2}\|\varphi_1-\varphi_2\|$。根据压缩映射原理可知，方程(1.1)在$[0,\beta]$上必有唯一的连续解,证完。

定理1.1和定理1.2都是局部性的存在定理，它们只断定了方程(1.1)在局部上有解.下面证明在定理1.1和定理1.2的条件下，方程(1.1)的解可以延拓成为饱和解.

定理1.3 设定理1.1的条件成立。设当$0\leqslant t<\alpha$时，定义在$[0,\alpha)$上的有界连续函数$x^*(t)$是方程(1.1)的解。则必存在$\alpha_0>\alpha$及定义在$[0,\alpha_0]$上的连续函数$x^{**}(t)$,使得

(i)当$0\leqslant t<\alpha$时,$x^{**}(t)=x^*(t)$;

(ii)当$0\leqslant t\leqslant\alpha_0$时，$x^{**}(t)$是方程(1.1)的解.

证 令$M=\max\limits_{0\leqslant t<\alpha}|x^*(t)|<+\infty$.取$\{t_n\}$使得

$$0<t_1<t_2<\cdots<t_n<\cdots<\alpha,$$

并且$\lim\limits_{n\to\infty}t_n=\alpha$.当$m>n$时，有

$$\left|\int_0^{t_m} k(t_m,s,\ x^*(s))ds-\int_0^{t_n} k(t_n,s,x^*(s))ds\right|$$

$$=\left|\int_0^{t_m}[k(t_m,s,x^*(s))-k(t_n,s,x^*(s))]ds\right|$$

$$\leqslant\sup\left\{\int_0^{t_m}|k(t_m,s,\varphi(s))-k(t_n,s,\varphi(s))|ds\ \middle|\ \varphi\in C([0,a]),\right.$$
$$\left.\|\varphi\|\leqslant M\right\}$$
$$\leqslant\sup\left\{\int_0^{a}|k(t_m,s,\varphi(s))-k(t_n,s,\ \varphi(s))|ds\ \middle|\ \varphi\in C([0,\ a]),\right.$$
$$\left.\|\varphi\|\leqslant M\right\}$$
$$\leqslant\sup\left\{\int_0^{a}|k(t_m,s,\varphi(s))-k(a,s,\varphi(s))|ds\ \middle|\ \varphi\in C([0,a]),\right.$$
$$\left.\|\varphi\|\leqslant M\right\}$$
$$+\sup\left\{\int_0^{a}|k(t_n,s,\varphi(s))-k(a,s,\ \varphi(s))|ds\ \middle|\ \varphi\in C([0,a]),\right.$$
$$\left.\|\varphi\|\leqslant M\right\}. \tag{1.12}$$

利用假设4°，由(1.12)式可知，必有

$$\lim_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}}\left|\int_0^{t_m} k(t_m,s,\ x^*(s))ds-\int_0^{t_n} k(t_n,s,x^*(s))ds\right|=0.$$

注意到$\lim\limits_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}}|h(t_m)-h(t_n)|=0$，故有

$$\lim_{\substack{m\to 0\\ n\to 0}}|x^*(t_m)-x^*(t_n)|=0.$$

根据Cauchy收敛原则，$\lim\limits_{t\to a-0}x^*(t)$存在.因此，下 面 我 们 认为 $x^*(t)$是定义在[0,a]上的连续函数（只需令$x^*(a)=\lim\limits_{t\to a-0}x^*(t)$ 即可）. 令

$$h_1(t)=h(t+a)+\int_0^a k(t+a,s,x^*(s))ds, \tag{1.13}$$

考察方程

$$y(t)=h_1(t)+\int_0^t k(t+\alpha,s+\alpha,y(s))ds. \qquad (1.14)$$

由假设4°可知$h_1(t)$在〔0，$+\infty$)上连续，显然，方程（1.14)满足定理1.1的全部条件，故由定理1.1可知存在$\beta>0$及〔0，β〕上的连续函数$y^*(t)$，使当$0\leqslant t\leqslant\beta$时，$y^*(t)$是方程（1.14)的解，令$\alpha_0=\alpha+\beta$，

$$x^{**}(t)=\begin{cases}x^*(t),\ 0\leqslant t<\alpha\text{时},\\ y^*(t-\alpha),\alpha\leqslant t\leqslant\alpha_0\text{时},\end{cases}$$

则显然$x^{**}(t)$是方程(1.1)的定义在〔0，α_0〕上的连续解，证完.

用完全类似的方法可以证明：

定理1.4 设假设1°、2°、3°、5°、6°满足，又设对每个由假设3°确定的$m(t,s)$，

$$\lim_{t\to 0^+}\int_T^{T+t} m(T+t,s)ds=0 \qquad (1.15)$$

关于T在〔0，$+\infty$)中的每一个有界闭集上一致成立。设当$0\leqslant t<\alpha$时，定义在〔0，α)上的有界连续函数$x^*(t)$是方程(1.1)的解，则必存在$\alpha_0>\alpha$及定义在〔0，α_0〕上的连续函数$x^{**}(t)$，使得

(i)当$0\leqslant t<\alpha$时，$x^{**}(t)=x^*(t)$；

(ii)当$0\leqslant t\leqslant\alpha_0$时，$x^{**}(t)$是方程(1.1)的解；

(iii)除了$x^{**}(t)$以外，方程(1.1)在〔0，α_0〕上没有其它的连续解.

定义1.5 设定义在〔0,α)上的连续函数$x^*(t)$是方程(1.1)的解，又设下列两种情况之一出现：

(i)$\alpha=+\infty$；

(ii) $\overline{\lim_{t\to\alpha^-}}|x(t)|=+\infty$，

则$x^*(t)$称为是方程(1.1)的饱和解,$[0,\alpha)$称为是饱和解$x^*(t)$的最大存在区间.

定理1.6 设定理1.3的条件成立，设定义在某一区间$[0,\alpha]$上的连续函数$x^*(t)$是方程(1.1)的解,则一定存在方程(1.1)的饱和解$x^{**}(t)$，其最大存在区间为$[0,\alpha_0)\supset[0,\alpha]$，并且当$0\leqslant t\leqslant\alpha$时，$x^{**}(t)=x^*(t)$.

证 令Σ表示具有下列性质的函数集合：$x(t)$是定义在某一$[0,\beta)\supset[0,\alpha]$上的连续函数，当$0\leqslant t<\beta$时，$x(t)$是方程(1.1)的解，并且当$0\leqslant t\leqslant\alpha$时，$x(t)=x^*(t)$. 根据定理1.3易知$\Sigma\neq\phi$.在$\Sigma$中定义半序关系如下：若$x_1(t)$定义在$[0,\beta_1)$上，$x_2(t)$定义在$[0,\beta_2)$上，$[0,\beta_1)\subset[0,\beta_2)$，并且当$t\in[0,\beta_1)$时，有$x_1(t)\equiv x_2(t)$，则记$x_1(t)<x_2(t)$. 显然在该半序"$<$"下，$\Sigma$形成一半序集合.设$\Delta=\{x_\gamma(t)\in\Sigma\mid\gamma\in\Gamma\}$是$\Sigma$中的全序子集，$x_\gamma(t)$的定义在区间为$[0,\beta_\gamma)$，令$[0,\alpha_\Delta)=\bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma}[0,\beta_\gamma)$，对任给$t\in[0,\alpha_\Delta)$，必存在某$\gamma_0\in\Gamma$，使$t\in[0,\beta_{\gamma_0})$，此时定义$x_\Delta(t)=x_{\gamma_0}(t)$.显然,$x_\Delta(t)$在$[0,\alpha_\Delta)$上有定义，并且$x_\Delta(t)\in\Sigma$.又显然$x_\Delta(t)$是$\Delta$的一个上界. 因此，$\Sigma$中的每一个全序子集都在$\Sigma$中有上界，根据Zorn引理，$\Sigma$必有极大元. 设$x^{**}(t)$是$\Sigma$的一个极大元,其最大定义区间为$[0,\alpha_0)$，则$x^{**}(t)$显然是方程(1.1)的饱和解，$[0,\alpha_0)\supset[0,\alpha]$，并且当$0\leqslant t\leqslant\alpha$时$x^{**}(t)=x(t)$,证完.

定理1.7 设定理1.4的条件成立，则方程(1.1)必有唯一的饱和解.

这一定理的证明与定理1.6的证明类似.

下面，在定理1.6的条件下，进一步研究方程(1.1)饱和解的性质.

对任给$t\geqslant 0$，定义

$$K(t)=\{x(t)\mid 当0\leqslant s\leqslant t时,x(s)是方程(1.1)的连续解\}. \tag{1.16}$$

对任意$T\geqslant 0$，定义

$$K^*(T)=\bigcup_{0\leqslant t\leqslant T}K(t). \tag{1.17}$$

为了研究$K^*(T)$的性质，先证明一条引理.

引理1.8 设$K(t,s,u)$满足假设2°、3°、4°.又设下列假设成立:

7°任给常数$b>0,c>0$,极限

$$\lim_{\delta\to 0}\int_t^{t+\delta}|K(t+\delta,s,\varphi(s))|ds=0$$

关于$0\leqslant t\leqslant b$和$\varphi(t)\in C([0,b+1],[-c,c])$一致成立;

则对任给$\alpha_0>0,\varepsilon_0>0$，必存在$0<\beta<1$，使得只要$0\leqslant\alpha\leqslant\alpha_0$, $\widetilde{h}(t)\in C[0,\beta]$, $|\widetilde{h}(t)|\leqslant\varepsilon_0$, $x(t,\alpha)$是方程

$$x(t,\alpha)=\widetilde{h}(t)+\int_0^t k(t+\alpha,s+\alpha,x(s,\alpha))ds \tag{1.18}$$

的定义在$[0,\beta]$上的连续解，就必有

$$|x(t,\alpha)|\leqslant 2\varepsilon_0,\forall\ 0\leqslant t\leqslant\beta. \tag{1.19}$$

证 取$c=2\varepsilon_0$，根据假设7°，存在$0<\beta<1$，使得只要$0\leqslant\alpha\leqslant\alpha_0$, $0\leqslant t\leqslant\beta,\varphi\in C([0,\beta],[-c,c])$，就有

$$\int_0^t|k(t+\alpha,s+\alpha,\varphi(s+\alpha))|ds$$

$$=\int_\alpha^{\alpha+t}|k(t+\alpha,s,\varphi(s))|ds<\varepsilon_0.$$

设$x(t,\alpha)$是方程(1.18)定义在$[0,r]\subset[0,\beta]$上的连续解. 因为$|x(0,\alpha)|=|\widetilde{h}(0)|<\varepsilon_0$，故存在$t_0>0$，使得当$t\in[0,t_0)$时,有$|x(t,\alpha)|<2\varepsilon_0$.如果$t_0<\beta$, $|x(t_0,\alpha)|=2\varepsilon_0$,

则

$$|x(t_0,\alpha)|\leqslant|\widetilde{h}(t_0)|+\int_0^{t_0}|k(t_0+\alpha,s+\alpha,x(s+\alpha))|ds$$

$$<\varepsilon_0+\varepsilon_0=2\varepsilon_0,$$

产生矛盾，这表明只要$x(t,\alpha)$有定义，并且$0\leqslant t\leqslant\beta$，就必有$|x(t,\alpha)|<2\varepsilon_0$.根据定理1.3，$x(t,\alpha)$必然在整个$[0,\beta]$上有定义，证完.

定理1.9 设假设1°～4°和假设7°成立，则存在常数$\alpha^*>0$，满足：

(i)对任给$0\leqslant\alpha<\alpha^*$，$K^*(\alpha)$是$R^1$中的紧集；

(ii)如果$\alpha^*<+\infty$，则必定存在方程(1.1)的饱和解$x^*(t)$，使得$x^*(t)$的最大定义区间恰好就是$[0,\alpha^*)$.

证 首先证明必存在$\beta>0$，使得$K^*(\beta)$是R^1中的紧集.事实上，$c_1=\max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}|h(t)|+1$. 在假设4°中，令$J=[0,1]$，$t_0=0$，则由假设4°知，必存在$\delta>0$，使得只要$0\leqslant t\leqslant\delta$，$\varphi\in C([0,1])$，$\|\varphi\|\leqslant c_1$，就有

$$\int_J|k(t,s,\varphi(s))|ds<1.$$

令$=\beta\min\{1,\delta\}$.设$x(t)$是方程(1.1)的饱和解，其最大存在区间为$[0,T)$. 令$t^*=\sup\{t_1\,|\,当t\in[0,t_1]时，有|x(t)|\leqslant c_1\}$，则显然$t^*>0$，$|x(t^*)|=c_1$.若$t^*<\beta$,则

$$|x(t^*)-h(t^*)|\leqslant\int_0^{t^*}|K(t^*,s,x(s))|ds<1.$$

此与$|x(t^*)|=c_1$矛盾.故$t^*\geqslant\beta$.这表明（利用定理1.6)$x(t)$必在$[0,\beta]$上有定义，并且对任给$0\leqslant t\leqslant\beta$，$|x(t)|\leqslant c_1$. 所以$K^*(\beta)$是$R^1$中的有界集，再证$K^*(\beta)$是$R^1$中的闭集. 设$x_n(t)$ $(n=1,2,\cdots)$是方程(1.1)的解，$t_n\in[0,\beta]$ $(n=1,2,\cdots)$，

使得$t_n\to t_0$，$x_n(t_n)\to x'$．因为$K^*(\beta)$有界，故由假设4°可知，$\{x_n(t)\}$是〔0，β〕上的一致有界的等度连续函数族（参见定理1.1的证明），因此，必存在$\{x_n(t)\}$的子列，不失一般性，假定就是$\{x_n(t)\}$本身，在〔0，β〕上一致收敛于某连续函数$x_0(t)$．显然$x_0(t)$也是方程(1.1)的定义在〔0，β〕上的解，由$\{x_n(t)\}$的等度连续性可知，$x'=\lim\limits_{n\to\infty}x_n(t_n)=x_0(t_0)$，即$x'\in K^*(\beta)$．于是$K^*(\beta)$是$R^1$中的闭集，从而是紧集．

令$\alpha^*=\sup\{\beta>0\mid K^*(\beta)$是$R^1$中的紧集$\}$．显然对该$\alpha^*$，结论(i)成立．下面证明结论(ii)．设$\alpha^*<+\infty$．于是存在方程(1.1)的解序列$x_m(t)(m=1,2,\cdots)$和$t_m\in[0,\alpha^*)(m=1,2,\cdots)$，使得$t_m\to\alpha^*$，$|x_m(t_m)|\to+\infty$．由$\alpha^*$的定义知对每一个$n$，$K^*(t_n)$是$R^1$中的紧集，利用假设4°可知，在每一个〔0，$t_n$〕上，$\{x_m(t)\}$是一致有界的等度连续函数族．利用“对角线方法”容易证明必存在〔0，α^*)上的连续函数$x_0(t)$及$\{x_m(t)\}$的一个子列，不失一般性，可以假定就是$\{x_m(t)\}$本身，使得在〔0，α^*)的任何一个闭子区间上，$x_m(t)$都一致收敛于$x_0(t)$．显然当$0\leqslant t<\alpha^*$时，$x_0(t)$是方程(1.1)的连续解．

下面证明

$$\overline{\lim_{t\to\alpha^*}}|x_0(t)|=+\infty. \tag{1.20}$$

事实上，如果(1.20)式不成立，则由定理1.3可知，必存在$\alpha_0^*>\alpha^*$及定义在〔0，α_0^*〕上的连续函数$x_0^*(t)$，使当$0\leqslant t<\alpha^*$时，$x_0^*(t)=x_0(t)$，并且当$0\leqslant t\leqslant\alpha_0^*$时，$x_0^*(t)$是方程(1.1)的解，取$\alpha_0=\alpha^*$，$\varepsilon_0=1$，令

$$\widetilde{K}(t,s,u)=k(t,s,u+x_0^*(s))-k(t,s,x_0^*(s))$$

则$\widetilde{k}(t,s,u)$也满足假设2°、3°、4°、7°．对$\widetilde{k}(t,s,u)$和$\alpha_0=\alpha^*$，$\varepsilon_0=1$，应用引理1.8，可知必存在$0<\beta<\min\{1,\alpha_0^*-\alpha^*\}$，

使得只要 $0\leqslant\alpha\leqslant\alpha_0$，$\widetilde{h}(t)\in C[0,\beta]$，$|\widetilde{h}(t)|\leqslant\varepsilon_0$，$x(t,\alpha)$是方程

$$x(t,\alpha)=\widetilde{h}(t)+\int_0^t\widetilde{k}(t+\alpha,s+\alpha,x(s,\alpha))ds \quad (1.21)$$

的定义在$[0,\beta]$上的连续解，就必有

$$|x(t,\alpha)|\leqslant 2\varepsilon_0=2,\forall\ 0\leqslant t\leqslant\beta. \quad (1.22)$$

任取 $0<\alpha<\alpha^*-\beta$.对每一个自然数m，令

$$y_m(t)=x_m(t+\alpha)-x_0^*(t+\alpha), \quad (1.23)$$

则有

$$y_m(t)=\widetilde{h}(t)+\int_0^t\widetilde{k}(t+\alpha,s+\alpha,y_m(s))ds,$$

其中

$$\widetilde{h}_m(t)=\int_0^\alpha[k(t+\alpha,s,x_m(s))-k(t+\alpha,s,x_0^*(s))]ds. \quad (1.24)$$

因为对$t\in[0,\alpha]$，当$m\to\infty$时，$x_m(t)$一致收敛于$x_0^*(t)$，并且$k(t,s,u)$关于u连续，故当 $0\leqslant s\leqslant\alpha$时

$$\lim_{m\to\infty}k(t+\alpha,s,x_m(s))=k(t+\alpha,s,x_0^*(s)). \quad (1.25)$$

当 $0\leqslant t\leqslant\alpha$时$\{x_m(t)|m=0,1,2,\cdots\}$是一致有界的，故由假设3°知，存在可测函数$m(t,s)$，使得对一切 $0\leqslant s\leqslant\alpha$，$0\leqslant t\leqslant\beta$及$m=0,1,2,\cdots$，都有

$$|k(t+\alpha,s,x_m(s))|\leqslant m(t+\alpha,s),$$

这里，$m(t+\alpha,\cdot)\in L(0,\alpha)$.根据Lebesgue控制收敛定理，由(1.24)、(1.25)两式可知，对 $0\leqslant t\leqslant\beta$，有$\lim\limits_{m\to\infty}\widetilde{h}_m(t)=0$. 由$\widetilde{h}_m(t)$的定义易知，$\{\widetilde{h}_m(t)\}$在$[0,\beta]$上是一致有界且等度连续的，故$\widetilde{h}_m(t)$在$[0,\beta]$上一致收敛于0.所以当$m$充分大时，有

$$|\widetilde{h}_m(t)|\leqslant\varepsilon_0=1,\forall t\in[0,\beta].$$

因此，根据(1.22)式可知，当m充分大时

$$|x_0^*(t)-x_m(t)|\leqslant 2\ ,\forall\alpha\leqslant t\leqslant\alpha+\beta.$$

所以，对充分大的m,

$$|x_m(t_m)|\leqslant 2+\sup\{|x_0{}^*(t)|\,\big|\,0\leqslant t\leqslant\alpha_0{}^*\}.$$

但另一方面，$\lim\limits_{m\to\infty}|x_m(t_m)|=+\infty$.这是一个矛盾，因此，(1.20)式成立，证完.

以上讨论都是对方程(1.1)进行的.事实上，本节的结论，对更广泛的Volterra型非线性积分方程组也是成立的.考察Volterra型非线性积分方程组

$$x_i(t)=h_i(t)+\int_0^t k_i(t,s,x_1(s),x_2(s),\cdots,x_n(s))ds,$$

$$i=1\ ,2\ ,\cdots,n. \qquad (1.26)$$

令$X(t)=(x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)),H(t)=(h_1(t),h_2(t),\cdots,h_n(t)),K(t,s,X)=(k_1(t,s,X),k_2(t,s,X),\cdots,k_n(t,s,X))$,则方程组(1.26)可以写为与方程(1.1)类似的形式

$$X(t)=H(t)+\int_0^t K(t,s,X(s))ds. \qquad (1.27)$$

不难看出，本节的全部结果，都可以对方程(1.27)，从而对方程组(1.26)建立起来. 同样地，本章以后各节的大多数结果，都可以平行推广到Volterra型非线性积分方程组上，对此，本书以后不再说明。

附注 数学、自然科学和工程技术领域中的许多问题，都可以归结为Volterra型非线性积分方程的研究. 例如，众所周知的常微分方程初值问题的研究，就可以归结为一个等价的Volterra型非线性积分方程.

关于Volterra型非线性积分方程解的存在性和唯一性，有着广泛的研究. 关于这一方面，可见C.Corduneanu〔4〕、〔5〕,

R.K.Miller〔1〕,R.K.Miller和G.R.Sell〔1〕、〔2〕, J.A.Nohel〔1〕、〔2〕, T.Sato〔1〕和D.Willet〔1〕. 此外，还可见P.M.Anselone〔1〕. 不利用压缩映射原理而获得的关于Volterra方程解的一个唯一性定理，可见J.H. Roberts和W.R.Mann〔1〕.

本节中关于Volterra非线性积分方程解的延拓和饱和解的几个结果(定理1.3，定理1.4，定理1.6，定理1.7)是常微分方程理论中相应结果的推广和一般化.

与定理1.9有关的讨论见R.K.Miller和G.R.Sell〔1〕以及T.Sato〔1〕.

§2 Tonelli方法

本节利用Tonelli方法研究Volterra型积分方程

$$x(t)=h(t)+\int_0^t k(t,s,x(s))ds=Ax(t),t\in[0,1] \quad (2.1)$$

解的存在性和唯一性，并给出求解的方法.

取$0<\alpha<1$，令

$$A_\alpha x(t)=\begin{cases}h(t), & t\in[0,\alpha]\\ h(t)+\int_0^{t-\alpha} k(t,s,x(s))ds, & t\in[\alpha,1].\end{cases} \quad (2.2)$$

首先直接作出方程

$$x(t)=A_\alpha x(t) \quad (2.3)$$

的解$x_\alpha^*(t)$，然后证明：在一定的条件下，当$\alpha\to 0$时，$x_\alpha^*(t)$一致收敛到方程(2.1)的一个解$x^*(t)$.

引理2.1 设$h\in C[0,1]$，$k(t,s,u)$当$t\in[0,1]$，$s\in[0,t]$，

$u\in R$时连续．则对任给$0<\alpha<1$，A_α映$C[0,1]$入$C[0,1]$全连续．

证 A_α映$C[0,1]$入$C[0,1]$是显然的．下面先证A_α是连续算子．设$x_n\in C[0,1]$，$x_0\in C[0,1]$，$x_n\to x_0$．取$\rho>0$，使$\|x_n\|\leqslant\rho$，$\|x_0\|\leqslant\rho$．由于$k(t,s,u)$在$t\in[0,1]$，$s\in[0,t]$，$|u|\leqslant\rho$上是一致连续的，故

$$\lim_{n\to\infty}\|A_\alpha x_n-A_\alpha x_0\|$$
$$\leqslant\lim_{n\to\infty}\max_{t\in[0,1],s\in[0,t]}|k(t,s,x_n(s))-k(t,s,x_0(s))|=0$$

即A_α是连续算子．再证A_α是紧算子．事实上，任意给定$r>0$，取$M_r=\max\limits_{\substack{t\in[0,1]\\ s\in[0,t]\\ |u|\leqslant r}}|k(t,s,u)|$，则$M_r<+\infty$．于是对任给$x(t)\in\{x\in C[0,1]\,|\,\|x\|\leqslant r\}$，有

$$\|A_\alpha x\|=\max_{t\in[0,1]}|A_\alpha x(t)|\leqslant\|h\|+M_r. \tag{2.4}$$

另一方面，对任给$x(t)\in\{x\in C[0,1]\,|\,\|x\|\leqslant r\}$及$0\leqslant t_1<t_2\leqslant 1$，有

$$|A_\alpha x(t_2)-A_\alpha x(t_1)|\leqslant$$
$$\leqslant\begin{cases}|h(t_2)-h(t_1)|, & \text{当 } 0\leqslant t_1<t_2\leqslant\alpha\text{ 时},\\ |h(t_2)-h(t_1)|+\displaystyle\int_0^{t_2-\alpha}|k(t_2,s,x(s))|ds, & \\ \qquad\qquad\text{当 } 0\leqslant t_1\leqslant\alpha\leqslant t_2\leqslant 1\text{ 时}, & \\ |h(t_2)-h(t_1)|+\displaystyle\int_{t_1-\alpha}^{t_2-\alpha}|k(t_2,s,x(s))|ds & \\ \quad+\displaystyle\int_0^{t_1-\alpha}|k(t_2,s,x(s))-k(t_1,s,x(s))|ds, & \\ \qquad\qquad\text{当 } \alpha\leqslant t_1\leqslant t_2\leqslant 1\text{ 时}. & \end{cases}$$

由于$k(t,s,u)$当$t\in[0,1]$，$s\in[0,t]$，$|u|\leqslant r$时的一致连续性及$h(t)$在$[0,1]$上的一致连续性，故知A_α把函数集合$\{x\in$

$C[0,1]\big|\|x\|\leqslant r\}$映为等度连续函数族.再注意到(2.4)式,即知$A_a$把$\{x\in C[0,1]\big|\|x\|\leqslant r\}$映为相对紧集.故$A$是紧算子.证完.

引理2.2 设$h\in C[0,1]$, $k(t,s,u)$当$t\in[0,1]$,$s\in[0,t]$, $u\in(-\infty,+\infty)$时是连续的，则对任给$r>0$，都有

$$\lim_{a\to 0}\sup_{\|x\|\leqslant r}\|Ax-A_a x\|=0. \tag{2.5}$$

证 令$M_r=\max\limits_{\substack{t\in[0,1]\\ s\in[0,t]\\ |u|\leqslant r}}|k(t,s,u)|$,则$M_r<+\infty$.于是,

$$|Ax(t)-A_a x(t)|=\begin{cases}\displaystyle\int_0^t|k(t,s,x(s))|ds & (t\in[0,a])\\ \displaystyle\int_{t-a}^t|k(t,s,x(s))|ds & (t\in[a,1]\end{cases}$$

$$\leqslant M_r a.$$

故(2.5)式成立,证完.

当$a=\frac{1}{n}$时，算子$A_{\frac{1}{n}}$的不动点$x_n^*(t)$可以用初等的方法作出.这个方法即所谓的Tonelli近似序列方法（亦称Caratheodory近似序列方法）.其作法如下：当$t\in[0,\frac{1}{n}]$时，定义

$$x_n^*(t)=h(t). \tag{2.6}$$

用归纳法，假定$x_n^*(t)$在$\left[0,\frac{1}{n}\right]$,$\left[\frac{1}{n},\frac{2}{n}\right]$,…,$\left[\frac{i-1}{n},\frac{i}{n}\right]$中的值已经确定，当$t\in\left[\frac{i}{n},\frac{i+1}{n}\right]$时，定义

$$x_n^*(t)=h(t)+\int_0^{t-\frac{1}{n}}k(t,s,x_n^*(s))ds. \tag{2.7}$$

显然，当$i=n-1$时,$x_n^*(t)$在$[0,1]$上就已经确定，并

且x_n^*是算子$A_{\frac{1}{n}}$的不动点．下面总假定x_n^*是由(2.6)、(2.7)式定义的．

定理2.3 设$h\in C[0,1]$，$k(t,s,u)$当$t\in[0,1]$，$s\in[0,t]$，$u\in(-\infty,+\infty)$时连续．又设存在$\rho>0$，使$\|x_n^*\|\leqslant\rho$（$n=1,2,\cdots$）．则

(i) $\lim\limits_{n\to\infty}\|Ax_n^*-x_n^*\|=0$；

(ii) $\{x_n^*\mid n=1,2,\cdots\}$在$C[0,1]$中相对紧，并且它的任何极限点都是$A$的不动点；

(iii) 若A在$\{x\in C[0,1]\mid \|x\|\leqslant\rho\}$中的不动点$x^*$唯一，则$x_n^*(t)$一致收敛到$x^*(t)$

证 因为$x_n^*=A_{\frac{1}{n}}x_n^*$，故由引理2.2可得

$$\lim_{n\to\infty}\|Ax_n^*-x_n^*\|=\lim_{n\to\infty}\|Ax_n^*-A_{\frac{1}{n}}x_n^*\|=0.$$

(i)获证．由于A全连续，故$\{Ax_n^*\mid n=1,2,\cdots\}$在$C[0,1]$中相对紧．故由结论(i)知$\{x_n^*\mid n=1,2,\cdots\}$在$C[0,1]$中相对紧．若$\{x_n^*\}$的某子列$\{x_{n_i}^*\}$收敛到$x^*$，则由结论(i)知$x^*$是$A$的不动点．(ii)、获证．由(i)、(ii)立即可得结论(iii)．证完．

由定理2.3可以知道，为了寻求方程(2.1)解的存在性条件，可以从寻求$\{\|x_n^*\|\mid n=1,2,\cdots\}$有界的条件入手，为此，首先考察方程(2.1)的一个特殊情况，即

$$x(t)=u_0+\int_0^t R(s)f(x(s))ds,\quad 0\leqslant t\leqslant 1. \tag{2.8}$$

引理2.4 设$R(t)$非负连续，$f(u):[u_0,+\infty)\to(0,+\infty)$连续．设下列条件成立：

$$\int_0^1 R(t)dt<\int_{u_0}^{\infty}\frac{1}{f(u)}du, \tag{2.9}$$

则方程(2.8)在$C[0,1]$中必有唯一解$\overline{x}(t)$，$\overline{x}(t)$连续可

微，并且

$$\overline{x}(t) \geqslant u_0 \quad (0 \leqslant t \leqslant 1). \tag{2.10}$$

证 设$\overline{x}(t)$是方程(2.8)的一个解，由(2.8)式知，$\overline{x}(t)$必连续可微，$\overline{x}(0)=u_0$，并且

$$\frac{d\overline{x}(t)}{dt}=R(t)f(\overline{x}(t)). \tag{2.11}$$

于是，

$$\int_0^t R(t)dt=\int_0^t \frac{1}{f(\overline{x}(t))}d\overline{x}(t)=\int_{u_0}^{\overline{x}(t)} \frac{1}{f(u)}du. \tag{2.12}$$

令$g(u)=\int_{u_0}^{t} \frac{1}{f(u)}du$.由于$f(u)$恒正连续，故$g(u)$严格单调上升且连续可微.由(2.9)式，必存在$u_1>u_0$，使

$$\int_0^1 R(t)dt=g(u_1)=\int_{u_0}^{u_1} \frac{1}{f(u)}du.$$

于是，$g(u)$单调地将$[u_0, u_1]$映成$\left[0, \int_0^1 R(t)dt\right]$，而(2.12)式变成

$$g(\overline{x}(t))=\int_0^t R(t)dt. \tag{2.13}$$

因为g的反函数g^{-1}将$\left[0, \int_0^1 R(t)dt\right]$映成$[u_0, u_1]$，故由(2.13)式可得

$$\overline{x}(t)=g^{-1}\left(\int_0^t R(t)dt\right), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1. \tag{2.14}$$

这表明若方程(2.8)有解，$\overline{x}(t)$，则该解必可以表成(2.14)式的

形式.因此，若方程(2.8)有解，则解必唯一存在.下证由(2.14)式所表达的$\overline{x}(t)$确是方程(2.8)的解.事实上，利用反函数微分公式，从(2.14)式可以得到

$$\frac{d\overline{x}(t)}{dt}=R(t)f(\overline{x}(t)).\tag{2.15}$$

再在(2.14)式中令$t=0$，得$\overline{x}(0)=g^{-1}(0)=u_0$，故$\overline{x}(t)$满足(2.8)式，即$\overline{x}(t)$是方程(2.8)的解. 由于(2.15)式右端非负，故$\overline{x}(t)$关于t不减. 注意到$\overline{x}(0)=u_0$，故(2.10)式成立.证完.

用完全类似的方法，可以证明

引理2.5 设$R(t)$在$[0,1]$上非正连续，$f(u)$：$(-\infty, u_0]\to(0,+\infty)$连续.设下列条件成立：

$$\int_0^1|R(t)|dt<\int_{-\infty}^{-u_0}\frac{1}{f(u)}du,\tag{2.16}$$

则方程(2.8)在$C[0,1]$中存在唯一的解$\underline{x}(t)$，$\underline{x}(t)$连续可微，并且

$$\underline{x}(t)\leqslant u_0\qquad(0\leqslant t\leqslant 1).\tag{2.17}$$

下面讨论方程(2.1)解的存在性.

定理2.6 设$h(t)\in C[0,1]$，$k(t,s,u)$当$t\in[0,1]$，$s\in[0,t]$，$u\in(-\infty,+\infty)$时连续，并满足

$$|k(t,s,u)|\leqslant R(s)f(|u|),\tag{2.18}$$

其中$R(s)$非负连续，$f(u)$：$[0,+\infty)\to(0,+\infty)$连续且单调上升，并满足（令$u_0=\|h\|$）

$$\int_0^1 R(s)ds<\int_{u_0}^{+\infty}\frac{1}{f(u)}du,\tag{2.19}$$

则方程(2.1)在$C[0,1]$中至少有一个解.

证 由(2.19)式及$R(s)$、$f(u)$的非负性，可得

$$\int_0^1 R(s)ds=\int_0^1|R(s)|ds<\int_{u_0}^{+\infty}\frac{1}{f(u)}du$$
$$=\int_{-\infty}^{-u_0}\frac{1}{f(|u|)}du.$$

因此，根据引理2.4和引理2.5，方程

$$x(t)=u_0+\int_0^t R(s)f(|x(s)|)ds \tag{2.20}$$

有唯一解$\overline{x}(t)\geqslant u_0$;方程

$$x(t)=-u_0+\int_0^t -R(s)f(|x(s)|)ds \tag{2.21}$$

有唯一解$\underline{x}(t)\leqslant -u_0$.因为$f(|u|)=f(|-u|)$，故

$$\overline{x}(t)=-\underline{x}(t). \tag{2.22}$$

设$x_n^*(t)$由(2.6)、(2.7)式确定.下证对任给$t\in[0,1]$，有

$$|x_n^*(t)|\leqslant\overline{x}(t). \tag{2.23}$$

当$t\in\left[0,\frac{1}{n}\right]$时，由

$$|h(t)|\leqslant u_0\leqslant\overline{x}(t)$$

知(2.23)式成立. 用归纳法，设对$t\in\left[0,\frac{1}{n}\right],\cdots,\left[\frac{i-1}{n},\frac{i}{n}\right]$,(2.23)式成立,下证当$t\in\left[\frac{i}{n},\frac{i+1}{n}\right]$时，(2.23)也成立.由于当$u\geqslant 0$时，$f(u)=f(|u|)$单调上升，故由(2.23)式当$t\in\left[0,\frac{i}{n}\right]$成立可知，当$t\in\left[0,\frac{i}{n}\right]$时

$$f(|x_n^*(t)|)\leqslant f(|\overline{x}(t)|)=f(|\underline{x}(t)|).$$

于是，当$t\in\left[\frac{i}{n},\frac{i+1}{n}\right]$时，

$$|x_n^*(t)|\leqslant|h(t)|+\int_0^{t-\frac{1}{n}}|k(t,s,x_n^*(s))|ds$$

$$\leqslant u_0+\int_0^{t-\frac{1}{n}}R(s)f(|x_n^*(s)|)ds$$

$$\leqslant u_0+\int_0^{t-\frac{1}{n}}R(s)f(|\overline{x}(s)|)ds=\overline{x}(t).$$

故(2.23)式对$t\in\left[0,\frac{i}{n}\right]$成立. 于是对任给$t\in[0,1]$,(2.23)式成立.根据定理2.3可知，方程(2.1)在$C[0,1]$中至少有一个解.证完.

下面考察方程(2.1)解的唯一性.

称$k(t,s,u)$满足局部Lipschtz条件，是指对任何$\rho>0$，都存在$N_\rho>0$,使得对任何$t\in[0,1]$,$s\in[0,t]$,$|u_1|\leqslant\rho$,$|u_2|\leqslant\rho$,都有

$$|k(t,s,u_1)-k(t,s,u_2)|\leqslant N_\rho|u_1-u_2|. \qquad (2.24)$$

定理2.7 设$k(t,s,u)$满足局部Lipschitz条件，则方程(2.1)在$C[0,1]$中至多有一个解.

证 设$x_1(t)$和$x_2(t)$是方程(2.1)在$C[0,1]$中的两个解.令$\rho=\max\{\|x_1\|,\|x_2\|\}$.取

$$d=\sup\{t^*|当0\leqslant t\leqslant t^*时,x_1(t)=x_2(t)\},$$

t_0满足$0<N_\rho(t_0-d)<1$.则当$t\in[d,t_0]$时,

$$|x_1(t)-x_2(t)|=\left|\int_d^t[k(t,s,x_1(t))-k(t,s,x_2(t))]dt\right|$$

$$\leqslant N_\rho\int_d^t|x_1(t)-x_2(t)|dt\leqslant N_\rho(t_0-d)\max_{d\leqslant t\leqslant t_0}|x_1(t)-x_2(t)|.$$

于是

$$\max_{d\leqslant t\leqslant t_0}|x(t_1)-x(t_2)|\leqslant N_\rho(t_0-d)\max_{d\leqslant t\leqslant t_0}|x_1(t)-x_2(t)|.$$

注意到$N_\rho(t_0-d)<1$，故上式是矛盾的.证完.

定理2.8 在定理2.6和定理2.7的条件下，方程(2.11)的解在$C[0,1]$中存在唯一，并且按(2.6)、(2.7)式做出的$x_n^*(t)$在$[0,1]$上一致收敛到方程(2.1)的解$x_n^*(t)$.

证 由定理2.6、定理2.7和定理2.3即可推出.证完.

注2.9 定理2.6中的条件(2.19)式是一个相当一般的条件，它不但包括了所有近似线性的情况，而且也适用于$k(t,s,u)$对u增长很快的方程.例如，它可以应用于下列方程

$$x(t)=\int_0^t\frac{\sin(t+s)}{2}e^{x(s)}ds,\quad 0\leqslant t\leqslant 1. \qquad (2.25)$$

我们还注意到，条件(2.19)式中的不等号不能换成等号.例如，对方程

$$x(t)=\int_0^t\frac{\pi}{2}[(x(s))^2+1]ds,\quad 0\leqslant t\leqslant 1, \qquad (2.26)$$

令$R(s)=\dfrac{\pi}{2}$, $u_0=0$, $f(u)=u^2+1$，则

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{f(u)}du=\operatorname{arctg}u\Big|_0^\infty=\frac{\pi}{2}=\int_0^1R(s)ds;$$

但方程(2.26)在$C[0,1]$中无解

注2.10 在定理2.8中，近似解$x_n^*(t)$的作法与通常的逐次迭代程序不同：在求$x_n^*(t)$时，并不需要事先求出$x_1^*(t)$, $x_2^*(t)$, …, $x_{n-1}^*(t)$. 因此，这种近似方法有它一定的优点.

附注 Tonelli类型的迭代程序，是L.Tonelli在[1]中提出的. 利用Tonelli方法研究非线性Volterra型方程的工作见

J.A.Noher〔1〕和陈文嵊〔4〕.定理2.3、定理2.7和定 理2.8是属于陈文嵊〔4〕的.

§3 连续相依性定理

本节我们讨论方程(1.1)的解对$h(t)$和$k(t, s, u)$的依赖关系.

用X表示所有的满足§1中的假设2°、3°、4°、7°的$k(t,s,u)$组成的集合.对任给$b>0$,$c>0$,令

$$p(k;b,c)=\sup\left\{\left|\int_0^t |k(t,s,\varphi(s))|ds\right| \right.$$

$$\left. 0\leqslant t\leqslant b,\varphi\in C([0,b],[-c,c])\right\}, \qquad (3.1)$$

则$\{p(k;b,c)|b>0,c>0\}$构成了X上的一个半范数族,X在该半范数族下构成局部凸线性拓扑空间.用$C(R^+,R)$表示一切映R^+入R的连续函数组成的集合.任给$0\leqslant b<c<+\infty$,令$p_1(\varphi;b,c)=\max\limits_{b\leqslant t\leqslant c}|\varphi(t)|$,则$C(R^+,R)$在半范数族$\{p_1(\varphi;b,c)|0\leqslant b<c<+\infty\}$下也构成一局部凸线性拓扑空间.

定理3.1 设在$C(R^+,R)$中,$h_n(t)$收敛于$h(t)$,在X中,$k_n(t,s,u)$收敛于$k(t, s, u)$设$x_n^*(t)$是方程

$$x_n(t)=h_n(t)+\int_0^t k_n(t,s,x(s))ds \qquad (3.2)$$

的饱和解,其最大定义区间为$[0,\alpha_n]$.令

$$\alpha^*=\sup\{\alpha|\text{当}\ 0\leqslant T<\alpha\text{时},K^*(T)\text{是}R^1\text{中的紧集}\}, \qquad (3.3)$$

其中$K^*(T)$由(1.17)式定义,设$0<\beta<\alpha^*$.则下列结论成立:

(i)当n充分大时,$\beta<\alpha_n$;

(ii)在$[0,\beta]$上$\{x_n^*(t)|n=1,2,\cdots\}$是一致有界的等度

连续函数族；

(iii)若$\{x_n^*(t)\}$的某一子列在$[0, \beta]$上一致收敛于$x^*(t)$，则当$0\leqslant t\leqslant\beta$时，$x^*(t)$是方程(1.1)的解.

证 证明共分三步. 先证第一步. 由α^*的定义知$K^*(\beta)$是R^1中的紧集. 取$c>0$，使$K^*(\beta)\subset(-c,c)$. 因为在X中$k_n(t,s,u)$收敛于$k(t,s,u)$，所以

$$\lim_{n\to\infty}\varepsilon_n=0, \tag{3.4}$$

其中ε_n由下式定义：

$$\varepsilon_n=\sup\left\{\left|\int_0^t k_n(t,s,\varphi(s))-k(t,s,\varphi(s))ds\right| \;\middle|\; 0\leqslant t\leqslant\beta, \varphi\in C([0,\beta],[-c,c])\right\}. \tag{3.5}$$

任给$\sigma\in[0,\beta]$，定义

$$M(\sigma)=\sup\left\{\int_0^t|k(t,s,\varphi(s))|ds \;\middle|\; 0\leqslant t\leqslant\sigma, \varphi\in C([0,\beta],[-c,c])\right\}. \tag{3.6}$$

由§1假设3°和4°知，当$\sigma\in[0,\beta]$时，$M(\sigma)<+\infty$，并且

$$\lim_{\sigma\to 0}M(\sigma)=0. \tag{3.7}$$

因此，对任意的$t\in[0,\sigma]$及$\varphi\in C([0,\beta],[-c,c])$，有

$$\begin{aligned}\int_0^t|k_n(t,s,\varphi(s))|ds&\leqslant\int_0^t|k(t,s,\varphi(s))|ds\\&\quad+\int_0^t|k_n(t,s,\varphi(s))-k(t,s,\varphi(s))|ds\\&\leqslant\varepsilon_n+M(\sigma).\end{aligned} \tag{3.8}$$

由c的选取知，必存在$\varepsilon>0$，使得如果$x(t)$是方程(1.1)的饱和解，$0\leqslant t\leqslant\beta$，$|y-x(t)|\leqslant\varepsilon$，就有$|y|\leqslant c$. 取$\delta<\frac{\varepsilon}{2}$，取$n_0$充分大，使得当$n\geqslant n_0$时，$\varepsilon_n<\delta$，并且$\sup\{|h_n(t)-h(t)| \big| 0\leqslant t\leqslant$

$\beta\} < \delta$.取σ，使$0 < \sigma \leqslant \beta$，并且$2M(\sigma) = \varepsilon - 2\delta$（如果不存在这样的$\sigma$，则取$\sigma = \beta$）.下面证明当$n \geqslant n_0$时，必有

$$\alpha_n \geqslant \sigma, \tag{3.9}$$

并且当$0 \leqslant t \leqslant \sigma$时，有$|x_n^*(t)| \leqslant c$. 事实上，设$x(t)$是方程(1.1)的任意饱和解，因为$0 < \sigma \leqslant \beta < \alpha^*$，故$x(t)$在$[0, \sigma]$上有定义. 当$t = 0$，$n \geqslant n_0$时

$$|x_n^*(0) - x(0)| = |h_n(0) - h(0)| < \delta < \varepsilon$$

令$t_n^* = \sup\{\bar{t}_n | 当t \in [0, \bar{t}_n]时，|x_n^*(t) - x(t)| < \varepsilon\}$，则$t_n^* > 0$. 如果$t_n^* < \sigma$，则显然$|x_n^*(t_n^*) - x(t_n^*)| = \varepsilon$.但另一方面，

$$\begin{aligned} |x_n^*(t_n^*) - x(t_n^*)| &\leqslant |h_n(t_n^*) - h(t_n^*)| \\ &\quad + \int_0^{t_n^*} |k_n(t_n^*, s, x_n(s))| ds + \int_0^{t_n^*} |k(t_n^*, s, x(s))| ds \\ &\leqslant \delta + [\varepsilon_n + M(\sigma)] + M(\sigma) \\ &\leqslant \delta + \varepsilon_n + \varepsilon - 2\delta < \varepsilon. \end{aligned} \tag{3.10}$$

产生矛盾. 故$t_n^* \geqslant \sigma$. 故由定理1.3知，当$n \geqslant n_0$时，$\alpha_n \geqslant \sigma$. 由(3.10)式的证明可知，当$n \geqslant n_0$，$0 \leqslant t \leqslant \sigma$时，必有

$$|x_n^*(t) - x(t)| < \varepsilon.$$

所以，当$n \geqslant n_0$，$0 \leqslant t \leqslant \sigma$时，有$|x_n^*(t)| \leqslant c$.

令$S = \{x_n^*(t) | n = 1, 2, \cdots\}$.由上面可知$S$是在$[0, \sigma]$上一致有界的.令

$$T\varphi(t) = h(t) + \int_0^t k(t, s, \varphi(s)) ds \quad (0 \leqslant t \leqslant \sigma),$$

仿定理1.1可证得$T(S)$在$[0, \sigma]$上是等度连续的. 因为$x_n^*(t) = Tx_n^*(t) + R_n(t)$，其中

$$R_n(t) = [h_n(t) - h(t)] + \int_0^t [k_n(t, s, x_n(s)) - k(t, s, x_n(s))] ds$$

满足对$t\in[0,\sigma]$一致有$\lim\limits_{n\to\infty}R_n(t)=0$，所以$S$是$[0,\sigma]$上的等度连续函数族。

设$\{x_n^*\}$的某一子列$\{x_{n_i}^*\}$在$[0,\sigma]$上一致收敛于$x^*(t)$。注意到$R_n(t)$在$[0,\sigma]$上一致收敛于零，故在$[0,\sigma]$上，一致成立

$$x^*(t)=\lim_{i\to\infty}x_{n_i}^*(t)=\lim_{i\to\infty}(Tx_{n_i}^*(t)+R_{n_i}(t))=Tx^*(t).$$

所以在$[0,\sigma]$上，$x^*(t)$是方程(1.1)的解。

第二步，若$\sigma=\beta$，则定理获证。若$\sigma<\beta$，则考察方程

$$X(t)=H(t)+\int_0^t k(t+\sigma,s+\sigma,X(s),ds, \quad (3.11)$$

$$X_n(t)=H_n(t)+\int_0^t k_n(t+\sigma,s+\sigma,X_n(s))ds, \quad (3.12)$$

其中，

$$H(t)=h(t+\sigma)+\int_0^\sigma k(t+\sigma,s,x^*(s))ds, \quad (3.13)$$

$$H_n(t)=h_n(t+\sigma)+\int_0^\sigma k_n(t+\sigma,s,x_n^*(s))ds. \quad (3.14)$$

取σ_1，使$0<\sigma_1\leqslant\beta-\sigma$，并满足

$$\sup\left\{\int_0^t|k(t+\sigma,s+\sigma,\varphi(s))|ds\middle|\ 0\leqslant t\leqslant\sigma_1,\right.$$

$$\left.\varphi\in C([0,b],[-c,+c])\right\}=\frac{1}{2}(\varepsilon-2\delta) \quad (3.15)$$

（如果满足(3.15)式的σ_1不存在，则取$\sigma_1=\beta-\sigma$）．下面证明必存在$n_1\geqslant n_0$，使当$n\geqslant n_1$时

$$\sigma_1\leqslant\alpha_n-\sigma. \quad (3.16)$$

事实上，若(3.16)式不成立，则存在$\{n\}$的子列$\{n(i)\}$，使得$n(i)\geqslant n_0$，并且

$$\sigma_1>\alpha_{n(i)}-\sigma. \quad (3.17)$$

由第一步的证明可知，对该子列$\{n(i)\}$，必存在其子列$\{n(i,j)\}$，使得方程

$$x_{n(i,j)}(t)=h_{n(i,j)}(t)+\int_0^t k_{n(i,j)}(t,s,x_{n(i,j)}(s))ds \quad (3.18)$$

的饱和解$x^*_{n(i,j)}(t)$在$[0,\sigma]$上有定义，且一致收敛于方程(1.1)的解$x^*(t)$。因为在$[0,\sigma]$上$x^*_{n(i,j)}(t)$一致收敛于$x^*(t)$，所以由(3.13)、(3.14)两式可知，$H_{n(i,j)}(t)$在$[0,+\infty)$的任意有界闭集上一致收敛于$H(t)$。利用第一步的证明方法可知：存在$n_1 \geqslant n_0$，使得当$n(i,j)\geqslant n_1$时，方程

$$X_{n(i,j)}(t)=H_{n(i,j)}(t)+\int_0^t k_{n(i,j)}(t+\sigma,s+\sigma,X_{n(i,j)}(s))ds \quad (3.19)$$

的任意饱和解$x^*_{n(i,j)}(t)$都在$[0,\sigma_1]$上有定义。这等价于方程(3.18)的饱和解$x^*_{n(i,l)}(t)$（当$n(i,j)\geqslant n_1$时）在$[0,\sigma+\sigma_1]$上有定义。这表明$\sigma+\sigma_1<\alpha_{n(i,j)}$。此与(3.17)式矛盾。因此，当$n\geqslant n_1$时(3.16)式成立。

下面证明在$[0,\sigma+\sigma_1]$上，$\{x^*_n(t)\}$是一致有界的等度连续函数族，事实上，由第一步证明知，存在$\{n\}$的子列$n(m)$，使$\{x^*_{n(m)}(t)\}$在$[0,\sigma]$上一致收敛于方程(1.1)的某一饱和解$x^*(t)$。由(3.13)、(3.14)两式知，$H_{n(m)}(t)$在$[0,+\infty)$的任意有界闭集上一致收敛于$H(t)$。利用第一段的证明方法，并注意到(3.16)式，可以证明必存在$\{n(m)\}$的子例$\{n(m,p)\}$，使得方程

$$X_{n(m,p)}(t)=H_{n(m,p)}(t)+\int_0^t k_{n(m,p)}(t+\sigma,s+\sigma,X_{n(m,p)}(s))ds$$

的满足$X^*_{n(m,p)}(t)=x^*_{n(m,p)}(t+\sigma)\ (0\leqslant t\leqslant\sigma_1)$的解$X^*_{n(m,p)}(t)$

在$[0, \sigma_1]$一致收敛于方程（3.11）的一个饱和解。这表明，$x^*_{n(m,p)}(t)$在$[0, \sigma+\sigma_1]$上一致收敛于方程（1.1）的一个饱和解，因此，$\{x^*_n(t)\}$在$[0, \sigma+\sigma_1]$上是一致有界的等度连续函数族。

第三步，若$\sigma+\sigma_1=\beta$，则定理获证。若$\sigma+\sigma_1\leqslant\beta$，上述过程可以继续进行下去，一般地可以证明：若$\sigma+\sigma_1+\cdots+\sigma_i<\beta$，则可以取$\sigma_{j+1}$，使$0<\sigma_{j+1}\leqslant\beta-(\sigma+\sigma_1+\cdots+\sigma_j)$。

$$\sup\left\{\int_0^t|k(t+(\sigma+\sigma_1+\cdots+\sigma_j),s+(\sigma+\sigma_1+\cdots+\sigma_j),\varphi(s)|ds|\ 0\leqslant t\leqslant\sigma_{j+1},\varphi\in C[0,b],[-c,c])\right\}$$

$$=\frac{1}{2}(\varepsilon-2\delta) \tag{3.20}$$

（如果这样的σ_{j+1}不存在，则取$\sigma_{j+1}=\beta-(\sigma+\sigma_1+\cdots+\sigma_j)$），并且存在$n_{j+1}\geqslant n_j$，使当$n\geqslant n_{j+1}$时$\sigma+\sigma_1+\cdots+\sigma_{j+1}<\alpha_n$，在$[0, \sigma+\sigma_1+\cdots+\sigma_{j+1}]$上$\{x^*_n(t)|n=1,2,\cdots\}$是一个一致有界的等度连续函数族，并且若$\{x^*_n(t)\}$的某一子列在$[0, \sigma+\sigma_1+\cdots+\sigma_{j+1}]$上一致收敛于$x^*(t)$，则当$0\leqslant t\leqslant\sigma+\sigma_1+\cdots+\sigma_{j+1}$时，$x^*(t)$是方程(1.1)的解。

假设对一切j，都有$\sigma+\sigma_1+\cdots\sigma_j<\beta$。由假设7°知，存在$\sigma^*>0$，使得当$0\leqslant\sigma<\sigma^*$时，对一切$0\leqslant t\leqslant\beta$和$\varphi\in([0,\beta],[-c,c])$，都有

$$\int_0^\sigma|k(t+\sigma,s+\sigma,\varphi(s))|ds<\frac{\varepsilon-2\delta}{2}. \tag{3.21}$$

由σ和$\sigma_i(1\leqslant i\leqslant j)$的定义可知，必有$\sigma\geqslant\sigma^*$，$\sigma_i\geqslant\sigma^*$，因此，$\sigma+\sigma_1+\cdots+\sigma_j\geqslant(j+1)\sigma^*$.取$j$，使得$j+1>\frac{\beta}{\sigma^*}$，即得$\sigma+$

$\sigma_1+\cdots+\sigma_j>\beta$，产生矛盾，因此，必存在$j$，使$\sigma+\sigma_1+\cdots+\sigma_j=\beta$，定理获证，证完。

推论3.2 设定理3.1的全部条件满足，则下列结论成立：

(i)$\alpha^*\leqslant\varliminf_{n\to\infty}\alpha_n$；

(ii)存在$\{x_n^*(t)\}$的子列$\{x_{n_i}^*(t)\}$及方程(1.1)的定义在$[0,\alpha)$上的连续解$x^*(t)$，使得对$[0,\alpha^*)$中的每一个紧子集中的t，一致有$\lim_{i\to\infty}x_{n_i}^*(t)=x^*(t)$。

证 由定理3.1的结论(i)即知，$\alpha^*\leqslant\varliminf_{n\to\infty}\alpha_n$.取$\beta_m\in[0,\alpha)$，$\beta_m\to\alpha$，并满足$\beta_1<\beta_2<\cdots<\beta_m<\cdots$.根据定理3.1，存在$\{x_n^*(t)\}$的子列$\{x_{n,1}^*(t)\}$及方程(1.1)的定义在$[0,\beta_1]$上的解$x_{(1)}(t)$，使得在$[0,\beta_1]$上，$x_{n,1}^*(t)$一致收敛于$x_{(1)}(t)$，同样，根据定理3.1，又可知必存在$\{x_{n,1}^*(t)\}$的子列$\{x_{n,2}^*(t)\}$及方程(1.1)的定义在$[0,\beta_2]$上的解$x_{(2)}(t)$，使得在$[0,\beta_2]$上，$x_{n,2}^*(t)$一致收敛于$x_{(2)}(t)$，显然当$t\in[0,\beta_1]$时，$x_2(t)=x_1(t)$.依次类推，可知对每一个$m$，都存在$\{x_{n,m-1}^*(t)\}$的子列$\{x_{n,m}^*(t)\}$及方程(1.1)的定义在$[0,\beta_m]$上的解$x_{(m)}(t)$，使在$[0,\beta_m]$上，$x_{n,m}^*(t)$一致收敛于$x_{(m)}(t)$，并且当$t\in[0,\beta_{m-1}]$时，$x_{(m)}(t)=x_{(m-1)}(t)$。

定义$x^*(t)$如下：当$t\in[0,\beta_m]$时，$x^*(t)=x_{(m)}(t)$。则显然$x^*(t)$在$[0,\alpha)$上连续，并且是方程(1.1)的解，显然$\{x_{n,n}^*(t)\}$是$\{x_n^*(t)\}$的子列，并且在$[0,\alpha^*)$的每一个紧子集上一致收敛于$x^*(t)$.证完。

推论3.3 设定理3.1的全部条件满足，设方程(1.1)存在唯一的饱和解$x^*(t)$.则$x^*(t)$在$[0,\alpha^*)$上有定义，并且在$[0,\alpha^*)$的每一个紧子集上，$x_n^*(t)$一致收敛于$x^*(t)$。

证 用反证法，若推论的结论不成立，则存在$\varepsilon>0$，$\beta\in$

$(0,\alpha^*)$，$\{t_m\}\subset[0,\beta]$及$\{x_n^*(t)\}$的子列$\{x_{n,m}^*(t)\}$，使得

$$|x_{n,m}^*(t_m)-x^*(t_m)|\geqslant\varepsilon, m=1,2,\cdots.$$

由推论3.1及$x^*(t)$的唯一性，必然存在$\{x_{n,m}^*(t)\}$的子列，不失一般性，可以假设就是$\{x_{n,m}^*(t)\}$本身，在$[0,\beta]$上一致收敛于$x^*(t)$。于是

$$\varepsilon\leqslant|x_{n,m}^*(t_m)-x^*(t_m)|\leqslant\sup_{0\leqslant t\leqslant\beta}|x_{n,m}^*(t)-x^*(t)|\rightarrow 0.$$

产生矛盾。证完。

附注 本节的结果本质上是常微分方程理论中相应结果的推广和一般化，在J.J.Levin和J.A.Nohel〔2〕以及R.K.Miller和G.R.Sell〔1〕中，对Volterra型非线性积分方程的连续相依性定理进行了研究，这些研究在R.K.Miller〔1〕中得到了推广。

定理3.1属于R.K.Miller〔1〕。但他的证明是不严密的，本书对他的证明作了改善。

§4 最大解、最小解与比较定理

考察Volterra型非线性积分方程

$$x(t)=h(t)+\int_0^t k(t,s,x(s))ds,\quad t\geqslant 0. \qquad (4.1)$$

定义4.1 设定义在$[0,\beta]$上的函数$x^*(t)$是方程(4.1)的解。如果对方程(4.1)的定义在$[0,\beta]$上的任意解$x(t)$，都有$x(t)\leqslant x^*(t)$，则称$x^*(t)$是方程(4.1)在$[0,\beta]$上的最大解。类似地，可以定义方程(4.1)在$[0,\beta]$上的最小解。

首先讨论方程(4.1)的最大解的存在性。

定理4.2 设§1中的假设1°～4°以及假设7°成立，设

$$h(t)\geqslant 0 \quad (t\geqslant 0), \tag{4.2}$$

$$k(t,s,u)\geqslant 0 \quad (0\leqslant s\leqslant t<+\infty, u\geqslant 0) \tag{4.3}$$

并且

$$k(t,s,u_1)\leqslant k(t,s,u_2) \quad (0\leqslant s\leqslant t<+\infty, 0\leqslant u_1\leqslant u_2<+\infty). \tag{4.4}$$

令

$$\alpha^*=\sup\{\alpha \mid 当\ 0\leqslant T<\alpha 时, K^*(T)是R'中的紧集\}, \tag{4.5}$$

其中$K^*(T)$由(1.17)式定义，对任给$\varepsilon>0$，令$x(t;\varepsilon)$是方程

$$x(t;\varepsilon)=h(t)+\varepsilon+\int_0^t k(t,s,x(s;\varepsilon))ds \tag{4.6}$$

的任意饱和解，其最大定义区间为$[0, \alpha(\varepsilon))$，则下列结论成立：

(i)如果$0\leqslant\varepsilon_1<\varepsilon_2$，则对任给$0\leqslant t<\min\{\alpha(\varepsilon_1),\alpha(\varepsilon_2)\}$，有

$$0\leqslant x(t;\varepsilon_1)<x(t;\varepsilon_2);$$

(ii)对任给$\beta\in(0,\alpha^*)$，存在$\varepsilon_0>0$，使得只要$0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$，就有$\beta<\alpha(\varepsilon)$，并且对$t\in[0,\beta]$，一致地有

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} x(t,\varepsilon)=x^*(t); \tag{4.7}$$

(iii)$x^*(t)$是方程(4.1)在$[0,\beta]$上的最大解；

(iv)方程(4.1)的最大解的最大定义区间为$[0,\alpha^*)$.

证 由(4.2)、(4.3)两式可知，对任给$\varepsilon\geqslant 0$，都有$x(t;\varepsilon)\geqslant 0$，并且当$\varepsilon>0$时，$x(t;\varepsilon)>0$.设$0\leqslant\varepsilon_1<\varepsilon_2$，并设$x(t;,\varepsilon_1)$和$x(t,\varepsilon_2)$在$[0,\beta_1]$上有定义.于是

$$x(0;\varepsilon_1)=h(0)+\varepsilon_1<h(0)+\varepsilon_2=x(0;\varepsilon_2). \tag{4.8}$$

令$t^*=\sup\{0\leqslant t\leqslant\beta \mid x(t;\varepsilon_1)<x(t;\varepsilon_2)\}$.显然$0<t^*\leqslant\beta$.若$t^*<\beta$，则必有$x(t^*;\varepsilon_1)=x(t^*;\varepsilon_2)$.由(4.4)式可知

$$
\begin{aligned}
0 &= x(t^*;\varepsilon_2) - x(t^*,\varepsilon_1) \\
&= (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) + \int_0^{t^*} [k(t^*,s,x(s;\varepsilon_2)) - k(t^*,s,x(s;\varepsilon_1))] ds \\
&\geqslant \varepsilon_2 - \varepsilon_1 > 0 .
\end{aligned}
$$

产生矛盾，故必有$t^* = \beta$.结论(i)获证.

任取$\beta \in (0, \alpha^*)$.因为$\lim\limits_{\varepsilon \to 0}(h(t)+\varepsilon) = h(t)$，故根据定理3.1，存在$\varepsilon_i \to 0^+$，使得$x(t;\varepsilon_i)$在$[0,\beta]$上都有定义，并且在$[0,\beta]$上一致收敛于方程(4.1)的一个解$x^*(t)$.由定理1.9知，必存在$\varepsilon_0 > 0$，使得只要$0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$，就有$\beta < \alpha(\varepsilon)$，利用结论(i)即知，在$[0,\beta]$上.$x(t;\varepsilon)$一致收敛于$x^*(t)$($\varepsilon \to 0^+$时).结论(ii)获证.

设$x(t)$是方程(4.1)在$[0,\beta]$上的任意一个解，由结论(i)、(ii)知，当$0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$时，有

$$
x(t) < x(t;\varepsilon) \quad (0 \leqslant t \leqslant \beta).
$$

因此，$x^*(t) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0^+} x(t;\varepsilon) \geqslant x(t)$.(iii)获证.

显然，方程(4.1)的最大解$x^*(t)$在$[0, \alpha^*)$上有定义. 若$\alpha^* < +\infty$，则由定理1.9可知，必存在方程(4.1)的一个解$x(t)$，以及$0 < t_i < \alpha^*, t_i \to \alpha^*$，使得$|x(t_i)| \to +\infty$.因为$x(t_i) \leqslant x^*(t_i)$，故必有$x^*(t_i) \to +\infty$.结论(iv)获证，定理证完.

下面讨论Volterra型非线性积分方程的比较定理. 在考察方程(4.1)的同时，考察

$$
x(t) = h_1(t) + \int_0^t k_1(t,s,x(s)) ds. \tag{4.9}
$$

定理4.3 设$h(t), k(t,s,u)$满足定理4.2的全部条件，α^*由(4.5)式定义，$x^*(t)$是方程(4.1)的最大解(根据定理4.2，$x^*(t)$的最大定义区间为$[0, \alpha^*)$)，设$h_1(t), k_1(t, s, u)$满足§1中的假设1°～4°及假设7°，并且

$$|h_1(t)|\leqslant h(t)\quad (t\geqslant 0), \tag{4.10}$$

$$|k_1(t,s,u)|\leqslant k(t,s,|u|)\ (0\leqslant s\leqslant t<+\infty, u\in R^1). \tag{4.11}$$

设$x(t)$是方程(4.9)的任一饱和解，其最大定义区间为$[0,\alpha)$。则必有$\alpha\geqslant\alpha^*$，并且

$$|x(t)|\leqslant x^*(t)\quad (0\leqslant t<\alpha^*). \tag{4.12}$$

证 设$x(t)$在$[0,\beta)$上有定义，$\beta<\alpha^*$. 取$\varepsilon>0$，使当$0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$时，方程(4.6)的解$x(t;\varepsilon)$在$[0,\beta]$上有定义，显然，

$$x(0)=h_1(0)\leqslant h(0)<h(0)+\varepsilon=x(0;\varepsilon).$$

令$t^*=\sup\{0\leqslant t\leqslant\beta \mid |x(t)|<x(t;\varepsilon)\}$.显然$t^*>0$.若$t^*<\beta$，则必有$|x(t^*)|=x(t^*;\varepsilon)$.于是，当$0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$时，

$$\begin{aligned}0&=x(t^*;\varepsilon)-|x(t^*)|\\&=h(t^*)+\varepsilon+\int_0^{t^*}k(t^*,s,x(s;\varepsilon))ds\\&\qquad-|h_1(t^*)+\int_0^{t^*}k_1(t^*,s,x(s))ds|\\&\geqslant\varepsilon+[h(t^*)-|h_1(t^*)|]+\int_0^{t^*}[k(t^*,s,x(s;\varepsilon))\\&\qquad-|k_1(t^*,s,x(s))|]ds\\&\geqslant\varepsilon>0.\end{aligned}$$

这是一个矛盾．这一矛盾表明$t^*=\beta$，并且对任给$0\leqslant t<\beta$，都有$|x(t)|<x(t;\varepsilon)$.根据定理4.2结论(ii)，

$$x^*(t)=\lim_{\varepsilon\to 0^+}x(t;\varepsilon)\geqslant|x(t)|\quad (0\leqslant t<\beta). \tag{4.13}$$

由(4.13)式及定理1.3可知$\beta<\alpha$．由此易知必有$\alpha^*\leqslant\alpha$，并且(4.12)式成立，证完．

推论4.4 设定理4.3的全部条件成立.又设由(4.5)式确定的$\alpha^*=+\infty$.则

(i)方程（4.9）的任何一个饱和解都在〔0，$+\infty$)上有定义；

(ii)若存在$b>0$，使对任何$t\geqslant 0$，都有$x^*(t)\leqslant b$，其中$x^*(t)$是方程(4.1)的最大饱和解，则方程（4.9）的任何一个饱和解$x(t)$也都满足$|x(t)|\leqslant b(\forall t\geqslant 0)$；

(iii)若$\lim\limits_{t\to\infty}x^*(t)=0$，则对方程(4.9)的任何一个饱和解$x(t)$，也都有$\lim\limits_{t\to 0}|x(t)|=0$.

附注 J.A.Nohel在〔1〕、〔2〕中研究了Volterra积分方程的最大解的存在性与比较定理。但是他关于最大解存在性的证明是错误的（见H.E.Gollwitzer和R.A.Hager〔1〕）。和比较定理有关的其它讨论见T.Sato〔1〕,W.Walter〔1〕以及V.Lakshmikantham和S.Leela〔1〕.

§5 卷积型方程与Fourier变换方法

形如

$$x(t)=h(t)+\int_0^t k(t-s)f(x(s))ds,t\geqslant 0 \qquad (5.1)$$

的Volterra型非线性积分方程称为是卷积型Volterra方程。

在卷积型Volterra方程的研究中，Fourier 变换是一个主要的工具。为了本书的需要，这里我们简述 Fourier 变换的定义和有关性质*.关于Fourier变换的详细讨论，可见 R. K. Miller〔1〕.

设$x(t)\in L(R^+)$，则

$$\tilde{x}(s)=\int_0^\infty x(t)e^{ist}\,dt$$

*我们只叙述本书所需要的表达形式。

称为是$x(t)$的Fourier变换， 对$x(t)\in L(R^+)$，$y(t)\in L(R^+)$，定义x和y的卷积$x*y$如下：

$$(x*y)(t)=\int_0^t x(t-s)y(s)ds.$$

关于卷积的Fourier变换，有下列公式：

$$\widetilde{x*y}=\tilde{x}\,\tilde{y}. \tag{5.2}$$

如果$x,y\in L(R^+)\cap L_2(R^+)$，则下列的Parseval 公式成立（注意，此处我们已假定x和y都是实值函数）：

$$\int_0^\infty xy\,dt=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \tilde{x}\,\overline{\tilde{y}}\,ds. \tag{5.3}$$

此外，我们还需要下列结论：若$x\in L(R^+)$，$y\in L_2(R^+)$，则$x*y\in L_2(R^+)$。

本节中，BC表示R^+上的有界连续函数集合在范数$\|\varphi\|=\max\limits_{t\in R^+}|\varphi(t)|$下构成的Banach空间。$BC_0$是$BC$中满足$\lim\limits_{t\to+\infty}\varphi(t)=0$的函数组成的子空间。$C(R^+,R)$含义同本章§3所述。

定理5.1 设$h(t)\in BC, k(t)\in L(R^+), f(u): R\to R$是有界连续函数。则方程（5.1）在$BC$中至少有一个解。

证 定义

$$Ax(t)=h(t)+\int_0^t k(t-s)f(x(s))ds,$$

则显然A映$C(R^+,R)$入$C(R^+,R)$取$b>0$，使对任给$u\in R$，有$|f(u)|\leqslant b$，令$r=\|h\|_C+b\|k\|_L$，其中$\|h\|_C$表$h(t)$在BC中的范数，$\|k\|_L$表$k(t)$在$L(R^+)$中的范数。令

$$D=\{x(t)\,|\,x\in BC,\|x\|\leqslant r\},$$

则对任给$x(t)\in C(R^+,R)$，有

$$|Ax(t)\leqslant\|h\|_C+b\|k\|_L,\quad \forall t\geqslant 0.$$

故A映D入D。另一方面，很容易证明A是映D入D的全连续算

子. 根据Schauder不动点定理，方程(5.1)在D中至少有一个解.证完.

注5.2 用完全同样的方法，可以证明类似的结论对方程

$$x(t)=h(t)+\int_0^{\infty}k(t-s)f(x(s))ds$$

也成立.

定理5.3 假设（1）$h(t)\in L(R^+),h'(t)\in L(R^+)$;

（2）$k(t)\in L(R^+),k'(t)\in L(R^+)$;

（3）$f(u):R\to R$是有界连续函数，并且当$u\neq 0$时有

$$uf(u)>0; \tag{5.4}$$

（4）存在$q\geqslant 0$，使得

$$\mathrm{Re}\{(1-isq)\widetilde{k}(s)\}\leqslant 0, \quad s\in R, \tag{5.5}$$

这里$\widetilde{k}(s)$是$k(t)$的Fourier变换;

则(i)方程（5.1）至少有一个解$x^*(t)\in BC_0$;

(ii)若$x^*(t)\in C(R^+,R)$是方程(5.1)的解，就一定有$x^*(t)\in BC_0$.

证 因为$h(t)\in L(R^+),h'(t)\in L(R^+)$，根据实变函数论的理论容易证明，必有$h(t)\in BC$. 所以根据定理5.1，方程(5.1)在$BC$中必有一个解. 由定理5.1的证明还可以知道，如果$x^*(t)\in C(R^+,R)$是方程(5.1)的解，就必有$x^*(t)\in BC$. 因此，为了证明定理的结论成立，只需证明：若$x^*(t)\in BC$. 是方程(5.1)的解，就必有$x^*(t)\in BC_0$.

设$x^*(t)\in BC$是方程(5.1)的解.令

$$f_t(\tau)=\begin{cases}f(x^*(\tau)), & \text{当 } 0\leqslant\tau\leqslant t\text{时},\\ 0, & \text{当}\tau>t\text{时}.\end{cases} \tag{5.6}$$

$$\lambda_t(\tau)=\int_0^\tau [k(\tau-u)+qk'(\tau-u)]f_t(u)du+qk(0)f_t(\tau). \tag{5.7}$$

由于$x^*(t)$是方程(5.1)的解，所以，对几乎所有的$t\in R^+$，有

$$\frac{dx^*(t)}{dt}=h'(t)+k(0)f(x^*(t))+\int_0^t k'(t-s)f(x^*(s))ds. \tag{5.8}$$

注意到

$$\int_0^\tau k(\tau-u)f(x^*(u))du=x^*(\tau)-h(\tau),$$

$$\int_0^\tau k'(\tau-u)f(x^*(u))du=\frac{dx^*(\tau)}{d\tau}-h'(\tau)-k(0)f(x^*(\tau)),$$

故利用(5.8)式，可以把$\lambda_t(\tau)$改写为

$$\lambda_t(\tau)=\begin{cases} x^*(\tau)+q\dfrac{dx^*(\tau)}{d\tau}-[h(\tau)+qh'(\tau)], 0\leqslant\tau\leqslant t\text{时}, \\ \displaystyle\int_0^t [k(\tau-u)+qk'(\tau-u)]f(x^*(u))du, \tau>t\text{时}. \end{cases} \tag{5.9}$$

由(5.7)式易知，$\lambda_t\in L(R^+)\cap L_2(R^+)$.

分别用$\widetilde{f}_t(s)$和$\widetilde{\lambda}_t(s)$表示$f_t(\tau)$和$\lambda_t(\tau)$的 Fourier变换，下证

$$\widetilde{\lambda}_t(s)=(1-isq)\widetilde{k}(s)\widetilde{f}_t(s). \tag{5.10}$$

事实上，由(5.7)式可知(利用(5.2)式)

$$\begin{aligned}\widetilde{\lambda}_t&=\widetilde{k*f_t}+q\widetilde{k'*f_t}+qk(0)\widetilde{f}_t \\ &=\widetilde{k}\,\widetilde{f}_t+q\widetilde{k'}\,\widetilde{f}_t+qk(0)\widetilde{f}_t.\end{aligned} \tag{5.11}$$

由$k\in L(R^+)$及$k'\in L(R^+)$可知$k(\infty)=0$，故

$$\widetilde{k'}(s)=\int_0^\infty k'(t)e^{ist}dt=\int_0^\infty e^{ist}dk(t)$$

$$=e^{ist}k(t)\Big|_0^\infty-is\int_0^\infty k(t)e^{ist}dt$$

$$= -k(0) - is\widetilde{k}(s). \quad (5.12)$$

由(5.11)、(5.12)两式即可知道(5.10)式成立。

定义

$$\rho(t) = \int_0^t \lambda_t(\tau) f(x^*(\tau)) d\tau = \int_0^\infty \lambda_t(\tau) f_t(\tau) d\tau. \quad (5.13)$$

根据Parseval等式(见(5.3)式)

$$\rho(t) = \frac{1}{2\pi} \int_R \widetilde{\lambda}_t(s) \overline{\widetilde{f}_t(s) ds}, \quad (5.14)$$

再利用(5.10)式，可得

$$\rho(t) = \frac{1}{2\pi} \int_R (1 - isq) \widetilde{k}(s) | \widetilde{f}_t(s) |^2 ds. \quad (5.15)$$

由(5.13)式可知$\rho(t)$是一个实值函数，所以必有

$$\rho(t) = \frac{1}{2\pi} \int_R Re\{(1 - isq) \widetilde{k}(s)\} | \widetilde{f}_t(s) |^2 ds. \quad (5.16)$$

根据假设(4)，可知当$t \in R^+$时，必有$\rho(t) \leqslant 0$，于是由(5.6)、(5.9)两式，可得

$$\int_0^t f(x^*(\tau)) x^*(\tau) d\tau + q \int_0^t f(x^*(\tau)) \frac{dx^*(\tau)}{d\tau} d\tau$$

$$- \int_0^t [h(\tau) + qh'(\tau)] f(x^*(\tau)) d\tau \leqslant 0, \forall t \geqslant 0.$$

$$(5.17)$$

取$b > 0$，使对任给$u \in R$，$|f(u)| \leqslant b$，则由(5.17)式可得

$$\int_0^t f(x^*(\tau)) x^*(\tau) d\tau + q \int_{x^*(0)}^{x^*(t)} f(x^*(t)) dx^*(t)$$

$$\leqslant b \int_0^\infty [|h(\tau)| + q|h'(\tau)|] d\tau. \quad (5.18)$$

由假设(3)可知,必有$q\int_{x^*(0)}^{x^*(t)} f(x^*(t)) dx^*(t) \geqslant 0$，故必存在常数$b_1$，使对一切$t \in R^+$，都有

$$\int_0^t f(x^*(\tau))x^*(\tau)d\tau \leqslant b_1. \tag{5.19}$$

由（5.8）式容易证明，$x^*(\tau)$ 在R^+上是一致连续的，因此$f(x^*(\tau))x^*(\tau)$在R^+上一致连续，下面证明

$$\lim_{\tau\to+\infty} f(x^*(\tau))x^*(\tau) = 0. \tag{5.20}$$

若不然，存在$\{\tau_n\}\subset R^+$，$\tau_n\to+\infty$及$\alpha>0$，使

$$f(x^*(\tau_n))x^*(\tau_n)>\alpha$$

（注意假设（3））。由$f(x^*(\tau))x^*(\tau)$在R^+上的一致连续性，可知必存在$\beta>0$，使只要$|\tau-\tau_n|\leqslant\beta$（$n=1,2,\cdots$），就有$f(x^*(\tau))x^*(\tau)\geqslant\frac{1}{2}\alpha$。不失一般性，可以假定诸（$\tau_n-\beta,\tau_n+\beta$）（$n=1,2,\cdots$）两两互不相交。于是

$$\int_0^\infty f(x^*(\tau))x^*(\tau)d\tau \geqslant \sum_{n=1}^\infty \int_{\tau_n-\beta}^{\tau_n+\beta} f(x^*(\tau))x^*(\tau)d\tau$$

$$\geqslant \sum_{n=1}^\infty [(\tau_n+\beta)-(\tau_n-\beta)]\cdot\frac{1}{2}\alpha = \lim_{n\to 0} n\alpha\beta.$$

此显然与(5.19)式矛盾，故(5.20)式成立，再由假设（3）即知，必有$\lim\limits_{\tau\to+\infty} x^*(\tau)=0$。证完。

在定理5.3中，假定了$k(t)\in L(R^+)$。在实际应用中，常常出现$k(t)\overline{\in} L(R^+)$的情况。下面将讨论$k(t)\overline{\in} L(R^+)$的情况。

定理5.4 设（1）$h'(t)\in L(R^+)$，$h''(t)\in L(R^+)$；

（2）$k'(t)\in L(R^+)$，并且存在常数$\rho>0$，使得

$$k_0(t)=k(t)+\rho\in L(R^+); \tag{5.21}$$

（3）$f(u)\in C(R^+,R)$，并且对任给$u\neq 0$，

$$uf(u)>0; \tag{5.22}$$

（4）存在$q\geqslant 0$，使得对$s\neq 0$，有

$$\mathrm{Re}\{(1-isq)G(s)\}\leqslant 0; \tag{5.23}$$

这里，$G(s)=\widetilde{k}_0(s)+\rho(is)^{-1}(s\neq 0)$；则

(i)方程(5.1)至少有一个解$x^*(t)\in BC_0$；

(ii)如果$x^*(t)\in C(R^+,R)$是方程(5.1)的解，就必有$x^*(t)\in BC_0$.

证 下面分两步证明这一定理.

第一步证明：如果$x^*(t)\in C(R^+,R)$是方程(5.1)的解，则必有$x^*(t)\in BC_0$.设$x^*(t)\in C(R^+,R)$是方程(5.1)的一个解.令

$$f_t(\tau)=\begin{cases} f(x^*(\tau)), & 0\leqslant\tau\leqslant t, \\ 0, & \tau>t; \end{cases} \tag{5.24}$$

$$\lambda_t(\tau)=\int_0^\tau [k_0(\tau-u)+qk_0'(\tau-u)]f_t(u)du+qk(0)f_t(\tau). \tag{5.25}$$

仿(5.9)式的证明可得

$$\lambda_t(\tau)=\begin{cases} x^*(\tau)+q\dfrac{dx^*(\tau)}{d\tau}-[h(\tau)+qh'(\tau)] \\ \qquad +\rho\displaystyle\int_0^\tau f(x^*(u))du, & 0\leqslant\tau\leqslant t, \\ \displaystyle\int_0^t [k_0(\tau-u)+qk_0'(\tau-u)]f(x^*(u))du, & \tau>t. \end{cases} \tag{5.26}$$

根据(5.26)式易知，$\lambda_t(\tau)\in L(R^+)\cap L_2(R^+)$.分别用$\widetilde{f}_t(s)$和$\widetilde{\lambda}_t(s)$表示$f_t(\tau)$和$\lambda_t(\tau)$的Fourier变换，则仿(5.10)式的证明可得

$$\widetilde{\lambda}_t(s)=[(1-isq)\widetilde{k}_0(s)-q\rho]\widetilde{f}_t(s). \tag{5.27}$$

用(5.13)式定义$\rho(t)$，并仿(5.16)式的证明可知

$$\rho(t)=\frac{1}{2\pi}\int_R \mathrm{Re}\{(1-isq)\widetilde{k}_0(s)-q\rho\}\,|\widetilde{f}_t(s)|^2 ds. \tag{5.28}$$

由$G(s)$的定义可知

$$\mathrm{Re}\{(1-isq)\widetilde{k}_0(s)-q\rho\}=\mathrm{Re}\{(1-isq)G(s)\}. \quad (5.29)$$

由(5.28)、(5.29)两式及假设(4)可知，对任给$t>0$，有

$$\rho(t)\leqslant 0. \quad (5.30)$$

因此，由(5.24)、(5.26)两式可知

$$\int_0^t f(x^*(\tau))x^*(\tau)d\tau+q\int_0^t f(x^*(\tau))\frac{dx^*(\tau)}{d\tau}d\tau$$

$$+\rho\int_0^t\left[\int_0^\tau f(x^*(u))du\right]f(x^*(\tau))d\tau$$

$$-\int_0^t[h(\tau)+qh'(\tau)]f(x^*(\tau))d\tau\leqslant 0. \quad (5.31)$$

令$\varphi(t)=\int_0^t f(x^*(\tau))d\tau\ (t\in R^+), F(x)=\int_0^x f(u)du\quad (x\in R)$，则(5.31)式可以写成

$$\int_0^t f(x^*(\tau))x^*(\tau)d\tau+qF(x^*(t))+\frac{1}{2}\rho[\varphi(t)]^2$$

$$-\int_0^t[h(\tau)+qh'(\tau)]f(x^*(\tau))d\tau-qF(x^*(0))\leqslant 0. \quad (5.32)$$

根据分部积分公式，有

$$\int_0^t[h(\tau)+qh'(\tau)]f(x^*(\tau))d\tau$$

$$=[h(t)+qh'(t)]\varphi(t)-\int_0^t[h'(\tau)+qh''(\tau)]\phi(\tau)d\tau,$$

所以，

$$\left|\int_0^t[h(\tau)+qh'(\tau)]f(x^*(\tau))d\tau\right|\leqslant K\sup_{0\leqslant\tau\leqslant t}|\varphi(\tau)|, \quad (5.33)$$

其中

$$K=\sup_{t\in R^+}\{|h(t)|+q|h'(t)|\}+\int_0^\infty[|h'(\tau)|+q|h''(\tau)|]d\tau,$$

由假设（1）可知，$K<+\infty$是一个有限数.注意到$x^*(0)=h(0)$，故由(5.33)式，可以把(5.32)式改写为

$$\int_0^t f(x^*(\tau))x^*(\tau)d\tau+qF(x^*(t))+\frac{1}{2}\rho[\varphi(t)]^2$$
$$-K\sup_{0\leqslant\tau\leqslant t}|\varphi(\tau)|-qF(h(0))\leqslant 0. \tag{5.34}$$

由假设（3）易知，$\int_0^t f(x^*(\tau))x^*(\tau)d\tau\geqslant 0$，$F(x^*(t))\geqslant 0$，故根据(5.34)式，可以知道对任给$t>0$，有

$$[\varphi(t)]^2-2K\rho^{-1}\sup_{0\leqslant\tau\leqslant t}|\varphi(t)|-2q\rho^{-1}F(h(0))\leqslant 0. \tag{5.35}$$

令$T(t)=\max\{\tau^*\in[0,t]\,\big|\,|\varphi(\tau^*)|=\sup_{\tau\in[0,t]}|\varphi(\tau)|\}$，则由(5.35)式可知必有

$$|\varphi(T(t))|\leqslant K\rho^{-1}+[K^2\rho^{-2}+2q\rho^{-1}F(h(0))]^{\frac{1}{2}}. \tag{5.36}$$

若令$\alpha(u)=K\rho^{-1}+[K^2\rho^{-2}-2q\rho^{-1}u]^{\frac{1}{2}}$，则由(5.36)式并注意$T(t)$的定义，可知对任给$t\in R^+$，都有

$$|\varphi(t)|\leqslant|\varphi(T(t))|\leqslant\alpha(F(h(0))). \tag{5.37}$$

即$\varphi(t)$在R^+上是有界的.于是，由(5.34)式可得

$$\int_0^t f(x^*(t))x^*(t)d\tau\leqslant K\alpha(F(h(0)))+qF(h(0)),t\in R^+. \tag{5.38}$$

由于$x^*(t)$是方程(5.1)的解，利用分部积分公式可得

$$x^*(t)=h(t)+k(0)\varphi(t)-\int_0^t k_0'(t-s)\varphi(s)ds. \tag{5.39}$$

由于$h'(t)\in L(R^+)$，故$M=\sup_{t\geqslant 0}|h(t)|<+\infty$.令

$$\beta(u)=M+[|k(0)|+\int_0^\infty|k_0'(t)|dt]\alpha(u), \tag{5.40}$$

则由(5.37)式可知，对任给$t\geqslant 0$，都有

$$|x^*(t)| \leqslant \beta(F(h(0)))。\tag{5.41}$$

(5.41)式表明$x^*(t)$在R^+上是有界的. 又因为

$$\frac{dx^*(t)}{dt}=h'(t)+k(0)\,f(x^*(t))+\int_0^t k_0'(t-s)f(x^*(t))ds,$$

故$\frac{dx^*(t)}{dt}$在R^+上也是有界的. 因此$x^*(t)$在R^+上一致连续，故$f(x^*(t))x^*(t)$也在R^+上一致连续. 由(5.38)式并仿(5.20)式的证明，必有$\lim\limits_{t\to+\infty}f(x^*(t))x^*(t)=0$. 再利用假设(3)，即知$\lim\limits_{t\to+\infty}x^*(t)=0$. 第一步证完.

第二步证明，在定理的假设下，方程在$C(R^+, R)$中至少有一个解. 设$\beta(u)$由(5.40)式定义. 任意给定$T>\beta(F(h(0)))$. 显然很容易构造出定义在R上的连续函数序列$\{f_n\}$，使f_n在R上满足Lipchitz条件，并且在$[-T,T]$上，f_n一致逼近于f. 令$F_n(x)=\int_0^x f_n(u)du$，则显然对充分大的n，有$T>\beta(F_n(h(0)))$. 不失一般性，可设对一切n，都有$T>\beta(F_n(h(0)))$. 考察积分方程

$$x(t)=h(t)+\int_0^t k(t-s)f_n(x(s))ds。\tag{5.42}$$

因为f_n在R上满足Lipschitz条件，故利用逐次迭代的方法很容易证明（这一证明留给读者），方程(5.42)必存在定义在R^+上的唯一连续解$x_n(t)$. 由第一步中的证明（参见(5.41)式的有关证明）可知

$$|x_n(t)| \leqslant \beta(F_n(h(0))) \leqslant T, \quad \forall t \geqslant 0。\tag{5.43}$$

由于$x_n(t)$是方程(5.42)的解，故通过对(5.42)式微分，易知存在常数T，使对一切n，都有

$$\left|\frac{dx_n(t)}{dt}\right| \leqslant T_1, \quad \forall t \geqslant 0.$$

因此，$\{x_n(t)\}$在R^+上一致有界且等度连续．故不失一般性，可以假定$\{x_n(t)\}$本身在任何有界闭集上一致收敛于某$x^*(t)$．显然$x^*(t)$是方程(5.1)的一个解．定理全部证完．

定理5.5 设（1）$h(t)$可以表为

$$h(t)=h_0(t)+\lambda\cos\omega t+\mu\sin\omega t \tag{5.44}$$

的形式，其中$h_0(t)$满足$h_0(t)\in L(R^+)$，$h_0'(t)\in L(R^+)$，$\omega\neq 0$；

（2）$k(t)$可以表为

$$k(t)=k_0(t)+\alpha\cos\omega t+\beta\sin\omega t \tag{5.45}$$

的形式，其中$k_0(t)\in L(R^+)$，$k_0'(t)\in L(R^+)$，$\alpha<0$，$\beta\leqslant 0$；

（3）$f(u): R\to R$有界连续，并且对$u\neq 0$有

$$0<uf(u)<\gamma u^2, \tag{5.46}$$

其中$\gamma>0$是一个常数；

（4）对一切$s\in R$，有

$$-\gamma^{-1}+\frac{\beta}{\omega}+\mathrm{Re}\left\{\left(1-\frac{is\beta}{\omega\alpha}\right)\widetilde{k_0}(s)\right\}\leqslant 0. \tag{5.47}$$

则若$x^*(t)$是方程(5.1)的解，就必有$\lim\limits_{t\to+\infty}x^*(t)=0$．

证 令$k_1(t)=\alpha\cos\omega t+\beta\sin t$，

$$u(t)=\lambda\cos\omega t+\mu\sin\omega t+\int_0^t k_1(t-s)f(x(s))ds, \tag{5.48}$$

则方程(5.1)可以写成

$$x(t)=h_0(t)+\int_0^t k_0(t-s)f(x(s))ds+u(t) \tag{5.49}$$

任意取定θ是一个固定的实数，则$u(t)$可以表成

$$u(t)=\eta(t)\cos\theta+\xi(t)\sin\theta \tag{5.50}$$

形式，其中$\eta(t)$和$\xi(t)$由

$$\left.\begin{aligned}&\eta'(t)=\omega\xi(t)+\alpha_1 f(x(t)),\ \eta(0)=\eta_0\\&\xi'(t)=-\omega\eta(t)+\alpha_2 f(x(t)),\ \xi(0)=\xi_0\end{aligned}\right\} \tag{5.51}$$

确定，这里

$$\left.\begin{aligned}&\alpha_1=\alpha\cos\theta-\beta\sin\theta,\quad \alpha_2=\alpha\sin\theta+\beta\cos\theta,\\&\eta_0=\lambda\cos\theta-\mu\sin\theta,\quad \xi_0=\lambda\sin\theta+\mu\cos\theta.\end{aligned}\right\}\tag{5.52}$$

事实上，由(5.51)式可得

$$\begin{aligned}\eta(t)=&\eta_0\cos\omega t+\xi_0\sin\omega t\\&+\int_0^t[\alpha_1\cos\omega(t-s)+\alpha_2\sin\omega(t-s)]f(x(s))ds,\\\xi(t)=&\xi_0\cos\omega t-\eta_0\sin\omega t\\&+\int_0^t[\alpha_2\cos\omega(t-s)-\alpha_1\sin\omega(t-s)]f(x(s))ds.\end{aligned}$$

再利用(5.48)、(5.51)、(5.52)三式，即知(5.50)式成立.

设$x^*(t)$是方程(5.1)的解. 令$f_t(\tau)$如(5.24)式所定义. 考察辅助函数

$$\rho(t)=\int_0^\infty[x^*(\tau)f_t(\tau)-\gamma^{-1}[f_t(\tau)]^2]d\tau.\tag{5.53}$$

若令

$$x_1(\tau)=\int_0^\tau k_0(\tau-u)f_t(u)du,\tag{5.54}$$

则由(5.49)式可知，当$0\leqslant\tau\leqslant t$时，有

$$x^*(\tau)=h_0(\tau)+x_1(\tau)+u(\tau).\tag{5.55}$$

于是，(5.53)式可以写成

$$\begin{aligned}\rho(t)=&\int_0^\infty h_0(\tau)f_t(\tau)d\tau+\int_0^\infty[x_1(\tau)f_t(\tau)-\gamma^{-1}[f_t(\tau)]^2]d\tau\\&+\int_0^\infty u(\tau)f_t(\tau)d\tau.\end{aligned}\tag{5.56}$$

由(5.50)、(5.52)式知

$$\begin{aligned}u(\tau)f_t(\tau)&=(\eta(\tau)\cos\theta+\xi(\tau)\sin\theta)f_t(\tau)\\&=\alpha^{-1}(\alpha_1\eta(\tau)+\alpha_2\xi(\tau))f_t(\tau)\end{aligned}$$

$$-\frac{\beta}{\alpha}(\xi(\tau)\cos\theta-\eta(\tau)\sin\theta)f_t(\tau) \qquad (5.57)$$

如果 $0\leqslant\tau\leqslant t$,则由(5.51)式可得

$$(\alpha_1\eta(\tau)+\alpha_2\xi(\tau))f_t(\tau)=\frac{d}{2\,d\tau}\{[\eta(\tau)]^2+[\xi(\eta)]^2\}. \qquad (5.58)$$

由(5.55)式微分，并注意到(5.51)式，可知当 $0\leqslant\tau\leqslant t$时，有

$$\frac{dx^*(\tau)}{d\tau}=h_0'(\tau)+x_1'(\tau)+\omega(\xi(\tau)\cos\theta-\eta(\tau)\sin\theta)+\alpha f_t(\tau). \qquad (5.59)$$

令

$$I=\int_0^\infty\{[x_1(\tau)+\frac{\beta}{\omega\alpha}x_1'(\tau)]f_t(\tau)+(-\gamma^{-1}+\frac{\beta}{\omega})(f_t(\tau))^2\}d\tau,$$

则由(5.56)~(5.59)式可得

$$\rho(t)=\int_0^t[h_0(\tau)+\frac{\beta}{\omega\alpha}h_0'(\tau)]f(x^*(\tau))d\tau$$

$$+\frac{1}{2\alpha}\{[\eta(\tau)]^2+[\xi(\tau)]^2\}\Big|_0^t$$

$$-\frac{\beta}{\omega\alpha}\int_0^t f(x^*(\tau))\frac{dx^*(\tau)}{d\tau}d\tau+I. \qquad (5.60)$$

由假设可知，$x_1(t)\in L(R^+)\cap L_2(R^+)$，$x_1'(t)\in L(R^+)\cap L_2(R^+)$,故利用Parseval等式可知

$$I=\frac{1}{2\pi}\int_R\left\{-\gamma^{-1}+\frac{\beta}{\omega}+\mathrm{Re}\left[\left(1-\frac{is\beta}{\omega\alpha}\right)\tilde{k}_0(s)\right]\right\}|\tilde{f}_t(s)|^2ds.$$

根据假设（4）,$I\leqslant 0$.所以从(5.60)式可以得到

$$\rho(t)-\frac{1}{2\alpha}[(\eta(t))^2+(\xi(t))^2]+\frac{\beta}{\omega\alpha}F(x^*(t))$$

$$\leqslant-\frac{1}{2\alpha}(\eta_0^2+\xi_0^2)+\frac{\beta}{\omega\alpha}F(x^*(0))$$

$$+\int_0^t [h_0(\tau)+\frac{\beta}{\omega\alpha}h'(\tau)]f(x^*(\tau))d\tau,$$

其中$F(x)=\int_0^x f(u)du$.注意到(5.53)式，有

$$\int_0^t f(x^*(\tau))[x^*(\tau)-\gamma^{-1}f(x^*(\tau))]d\tau$$

$$-\frac{1}{2\alpha}\{[\eta(t)]^2+[\xi(t)]^2\}+\frac{\beta}{\omega\alpha}F(x^*(t))$$

$$\leqslant-\frac{1}{2\alpha}(\eta_0^2+\xi_0^2)+\frac{\beta}{\omega\alpha}F(x^*(0))$$

$$+\int_0^t [h_0(\tau)+\frac{\beta}{\omega\alpha}h_0'(\tau)]f(x^*(\tau))d\tau. \tag{5.61}$$

取$b>0$，使对任给$u\in R$，$|f(u)|\leqslant b$,则由假设（1）知

$$\left|\int_0^t\left[h_0(\tau)+\frac{\beta}{\omega\alpha}h_0'(\tau)\right]f(x^*(\tau))d\tau\right|$$

$$\leqslant b\int_0^\infty\left[|h_0(\tau)|+\frac{\beta}{\omega\alpha}|h_0'(\tau)|\right]d\tau<+\infty. \tag{5.62}$$

由(5.46)式及$\alpha<0$，$\beta\leqslant 0$知$\frac{\beta}{\omega\alpha}F(x^*(t))\geqslant 0$．因此，由(5.61)式知，存在常数$M>0$，使

$$\int_0^t f(x^*(\tau))[x^*(\tau)-\gamma^{-1}f(x^*(\tau))]d\tau\leqslant M,\forall t\geqslant 0. \tag{5.63}$$

由(5.46)式可知

$$\int_0^t f(x^*(\tau))[x^*(\tau)-\gamma^{-1}f(x^*(\tau))]d\tau\geqslant 0. \tag{5.64}$$

于是，再利用(5.61)～(5.64)式可知在R^+上，$\xi(t)$和$\eta(t)$都是有界的，从而由(5.59)式可知，$x^*(\tau)$在R^+上是一致连续的.

于是$f(x^*(\tau))$在R^+上也是一致连续的．仿(5.20)式的证明，知$\lim\limits_{\tau\to+\infty}f(x^*(\tau))x^*(\tau)=0$．从而由(5.46)式可知，必有$\lim\limits_{\tau\to+\infty}x^*(\tau)=0$证完．

附注 利用本节所叙述的方法研究卷积型Volterra方程的工作，是由V.M.Popov在其文献〔1〕、〔2〕、〔3〕中开始的．本节定理5.3和定理5.4是由C.Corduneanu在〔2〕、〔3〕中获得的．与定理5.4密切相关的进一步讨论，可见G. Lellouche〔1〕．定理5.5是属于A.Kh.Geleg〔1〕的．利用Fourier变换的方法，还可以研究卷积型Volterra方程L_2解的存在性及性质，见C.Corduneanu〔1〕．关于卷积型Volterra积分方程组的讨论，见V.Dolezal〔1〕，V.A.Yakubovitch〔1〕．

利用Fourier变换的方法，可以研究积分微分方程和泛函积分方程．这一方面的工作见J.Moser〔1〕，C. Corduneanu〔7〕．

与本节内容有关的更详细的参考文献目录可见C. Corduneanu〔1〕．

§6 相容性与算子方法

设F是一个Fréchet空间，X和Y都是F的线性子空间．设

1° X在范数$\|\cdot\|_X$下构成一Banach空间，并且$\|\cdot\|_X$比F中的拓扑强（即若$\{x_n\}\subset X$，$\|x_n-x_0\|_X\to0$，则在F中的拓扑下也有$x_n\to x_0$）；Y在范数$\|\cdot\|_Y$下构成一Banach空间，并且$\|\cdot\|_Y$比F中的拓扑强．

定义6.1 设$T:F\to F$是一个连续的线性算子，X和Y都是F的线性子空间．如果$TX\subset Y$，则称T与(X,Y)相容．

下列定理说明了相容性的重要性：

定理6.2 设F是Frechet空间，$T: F\to F$是连续的线性算子，X和Y是F的线性子空间，满足假设1*.又设T与(X,Y)相容.则T是映X入Y的有界线性算子.

证 设$\{x_n\}\subset X$，$x_0\in X$，$\|x_n-x_0\|_X\to 0$. 设$y\in Y$满足$\|Tx_n-y\|_Y\to 0$.由假设1*可知在F的拓扑下有

$$x_n\to x_0,\quad Tx_n\to y.$$

因为$T: F\to F$是连续的，故在F的拓扑下有$Tx_n\to Tx_0$。因此，$Tx_0=y$.这表明$T: X\to Y$是一个闭映射．根据闭图象定理，T: $X\to Y$是有界线性算子.证完.

考察下列两个抽象的算子方程

$$x=f+T(x+g(x)),\tag{6.1}$$

$$y=f+Ty.\tag{6.2}$$

假设

2*$T: F\to F$是连续的线性算子，使得$I-T$映F到F是1—1且为满射的；

3*$f\in F$,并且g映F入F.

引理6.3 设假设2*和3*成立，则方程(6.1)等价于

$$x=y-Rg(x),\tag{6.3}$$

其中$R=I-(I-T)^{-1}$: $F\to F$是连续的，$y=f-Rf$是方程(6.2)的解.

证 根据逆算子定理，$(I-T)^{-1}: F\to F$存在并且连续，从而R: $F\to F$是连续的．显然，$y=(I-R)f=(I-T)^{-1}f$是方程(6.2)的解．若x是方程(6.1)的解,则$x-Tx=f+Tg(x)$，从而

$$x=(I-T)^{-1}f+(I-T)^{-1}Tg(x)$$

$$=(I-R)f+(I-T)^{-1}T\mathrm{g}(x)$$
$$=y+(I-T)^{-1}T\mathrm{g}(x). \tag{6.4}$$

由恒等式 $(I-T)(I-T)^{-1}T=I-(I-T)$ 可知，$(I-T)^{-1}T=(I-T)^{-1}-I=-R$. 故由(6.4)式可知，$x$ 是方程(6.3)的解. 由于上述推导过程是可逆的，故若 x 是方程(6.3)的解，则x也是方程(6.1)的解. 证完.

定理6.4 设假设1*～3*成立. 又设

4* $y\in Y$，$\mathrm{g}: Y\to X$，并且R与(X,Y)相容，其中$R=I-(I-T)^{-1}$；

5* 存在$\alpha>0$，$0<r\leqslant+\infty$，使得如果$z,w\in Y$，$\|z\|_Y\leqslant r$，$\|w\|_Y\leqslant r$，就有

$$\|\mathrm{g}(z)-\mathrm{g}(w)\|_X\leqslant\alpha\|z-w\|_Y. \tag{6.5}$$

如果$\alpha\|R\|<1$，$\|y\|_Y+\|R\|\|\mathrm{g}(\theta)\|_X\leqslant r(1-\alpha\|R\|)$，则方程(6.1)有唯一解$x^*\in Y$，使得$\|x^*\|_Y\leqslant r$，其中$\|R\|$是映$X$入$Y$的线性算子$R$的算子范数.

证 由4*及定理6.2知$R: X\to Y$是有界线性算子，故$\|R\|<+\infty$. 令 $D=\{\varphi\in Y \mid \|\varphi\|_Y\leqslant r\}$，

$$A\varphi=y-R\mathrm{g}(\varphi),\ \forall\varphi\in D. \tag{6.6}$$

由4*知$A: D\to Y$. 由5*知当$\varphi\in D$时

$$\|A\varphi\|_Y\leqslant\|y\|_Y+\|R\mathrm{g}(\varphi)-R\mathrm{g}(\theta)\|_Y+\|R\mathrm{g}(\theta)\|_Y$$
$$\leqslant\|y\|_Y+\|R\|(ar+\|\mathrm{g}(\theta)\|_Y)\leqslant r,$$

故A映D入D. 又对任给$z\in D$，$w\in D$，有

$$\|Az-Aw\|=\|R\mathrm{g}(z)-R\mathrm{g}(w)\|\leqslant\|R\|\alpha\|z-w\|.$$

注意到$\alpha\|R\|<1$，故$A: D\to D$是一个压缩映射. 从而A在D中有唯一的不动点x^*. 由引理6.3知x^*是方程(6.1)的在D中的唯一解. 证完.

定理6.5 设假设1*～4*成立．又设

6*对任给$\varepsilon>0$，都存在$\delta>0$，使得如果$\|z\|_Y\leqslant\delta$，$\|w\|_Y\leqslant\delta$，就有$\|g(z)-g(w)\|_X\leqslant\varepsilon\|z-w\|_Y$；

如果$g(\theta)=\theta$，则对任给充分小的$r>0$，都存在$\eta>0$，使得只要$y\in y$，$\|y\|_Y\leqslant\eta$，则方程(6.1)在$\{x\in Y \mid \|x\|\leqslant r\}$中有唯一解．

证 取$\varepsilon_1>0$，使$\varepsilon_1\|R\|<1$；取$\delta_1>0$，使当$\|z\|_Y\leqslant\delta_1$，$\|w\|_Y\leqslant\delta_1$时，有$\|g(z)-g(w)\|\leqslant\varepsilon_1\|z-w\|_Y$．取$0<r\leqslant\delta_1$，$\eta=r(1-\varepsilon_1\|R\|)$，则$\varepsilon_1\|R\|<1$，$\|y\|\leqslant r(1-\varepsilon_1\|R\|)$．根据定理6.4(取$\alpha=\varepsilon_1$)，即知定理6.5的结论成立．证完．

定理6.6 设F是局部凸的 Frechet 空间，假设1*～4*成立，$R:F\to F$是紧算子（其中$R=I-(I-T)^{-1}$）．设存在$r>0$，$s>0$使得g映$\overline{B}(r;Y)$入$B(s;X)$，并且在F的拓扑下g是连续的，其中$\overline{B}(r;Y)$是$\{y\in Y \mid \|y\|_Y\leqslant r\}$在$F$拓扑下的闭包，$B(s;X)=\{x\in X \mid \|x\|_X\leqslant s\}$．如果$y\in Y$，并且$\|y\|_Y+s\|R\|\leqslant r$，则方程(6.1)在$B(r;Y)=\{y\in Y \mid \|y\|_Y\leqslant r\}$中至少有一个解．

证 对$\varphi\in\overline{B}(r;Y)$，定义

$$A\varphi=y-Rg(\varphi). \tag{6.7}$$

则易知A映$\overline{B}(r;Y)$入$B(r;Y)\subset\overline{B}(r;Y)$，并且$A$在$F$的拓扑下是连续的．下面证明$A(\overline{B}(r;Y))$在$F$的拓扑下是相对紧的．令

$$W=\{g(\varphi)\mid\varphi\in\overline{B}(r;Y)\}$$

则$W\subset B(s;X)$．任取$\theta\in F$在F的拓扑下的一个开邻域U．因为$\|\cdot\|_X$比F中的拓扑强，所以必存在$\delta>0$，使得只要$\varphi\in X$，$\|\varphi\|_X\leqslant\delta$，就有$\varphi\in U$．令$\varepsilon=\delta s^{-1}$，显然可知若$\varphi\in B(s;X)$，$|\alpha|\leqslant\varepsilon$，则必有$\alpha\varphi\in U$．因此，$B(s;X)$在$F$的拓扑下是有界的，从而$W$在$F$的拓扑下是有界的．注意到$R$在$F$的拓扑下是紧算子，故$A$在$F$的拓扑下是全连续算子．根据Schauder-Тихонов 不动点定

理，A 在$\overline{B}(r;Y)$中至少有一个不动点。因为A 映$\overline{B}(r;Y)$ 入$B(r;Y)$，故该不动点属于$B(r;Y)$。根据引理6.3，该不动点即为方程(6.1)的解。证完。

为了用上述结论研究Volterra型积分方程解的性质，需要研究线性Volterra积分算子与空间对(X,Y)的相容性问题。

设$g\in C(R^+,R^+)$，$g(t)>0$ ($\forall t\geqslant 0$)。令

$$C_g=\left\{\varphi\in C(R^+,R)\left|\sup\left\{\frac{|\varphi(t)|}{g(t)}\right|t\geqslant 0\right\}<+\infty\right\}. \quad (6.8)$$

很容易知道，C_g在范数

$$\|\varphi\|_g=\sup\left\{\frac{|\varphi(t)|}{g(t)}\right|t\geqslant 0\Bigg\} \quad (6.9)$$

下构成一Banach空间，C_g是Frechet空间$C(R^+,R)$的线性子空间，并且$\|\cdot\|_g$比$C(R^+,R)$中的拓扑强。

考察算子

$$T\varphi(t)=\int_0^t k(t,s)\varphi(s)ds \quad (t\geqslant 0). \quad (6.10)$$

定理6.7 设$k(t,s)$是局部Lebesgue可积函数，$T: C(R^+,R)\to C(R^+,R)$是连续的。设$g\in C(R^+,R^+)$，$G\in C(R^+,R^+)$，并且$g(t)>0$ ($\forall t\geqslant 0$)，$G(t)>0$ ($\forall t\geqslant 0$)。则T与(C_g,C_G)相容的充分必要条件是存在常数$\alpha>0$，使得

$$\int_0^t |k(t,s)|g(s)ds\leqslant \alpha G(t) \quad (0\leqslant t<+\infty). \quad (6.11)$$

证 充分性。设(6.11)式成立，则对任给$\varphi\in C_g$，有

$$\left|\int_0^t k(t,s)\varphi(s)ds\right|\leqslant\int_0^t|k(t,s)|\,\|\varphi\|_g g(s)ds$$

$$\leqslant\alpha\|\varphi\|_g G(t) \quad (0\leqslant t<+\infty).$$

这表明$T\varphi\in C_G$。

必要性。设对任给$\alpha>0$，(6.11)都不成立。则对任何自然

数n，都存在t_n，$t_n\to+\infty$，使得

$$\int_0^{t_n}|k(t_n,s)|g(s)ds>nG(t_n).$$

定义

$$\varphi_n(t)=\begin{cases}g(t)\operatorname{sgn}k(t_n,t), & 0\leqslant t\leqslant t_n,\\ 0, & t>t_n.\end{cases}$$

则$\varphi_n\in L_\infty[0,t_n]$，在$[0,t_n]$上有$|\varphi_n(t)|\leqslant g(t)$，并且

$$\int_0^{t_n}k(t_n,s)\varphi_n(s)ds>nG(t_n).$$

设$\varphi_{n,i}(t)$是R^+上的连续函数序列，并且几乎处处有

$$\lim_{i\to\infty}\varphi_{n,i}(t)=\varphi_n(t),\quad |\varphi_{n,i}(t)|\leqslant g(t).$$

根据Lebesgue控制收敛定理

$$\lim_{i\to\infty}\int_0^{t_n}k(t_n,s)\varphi_{n,i}(s)ds$$

$$=\int_0^{t_n}k(t_n,s)\varphi_n(s)ds>nG(t_n).$$

因此，存在$i(n)$，使得

$$\int_0^{t_n}k(t_n,s)\varphi_{n,i(n)}(s)ds>nG(t_n).$$

显然，$\varphi_{n,i(n)}\in C_g$，$\|\varphi_{n,i(n)}\|_g\leqslant 1$，并且$\|T\varphi_{n,i(n)}\|_G\geqslant n$。因此，$\|T\|=\sup\{\|T\varphi\|_G\big|\,\|\varphi\|_g\leqslant 1\}=+\infty$。根据定理6.2，$T$不能把$C_g$映入$C_G$。证完。

令$M(R^+,R)=\{\varphi(t)|$对R^+中任一紧集J，有$\varphi(t)|_{t\in J}\in L_\infty(J)\}$。任给$R^+$中的紧集$J$，令$p(\varphi;J)=\operatorname*{ess\,sup}_{t\in J}|\varphi(t)|$，则$M(R^+,R)$在半范数族$\{p(\varphi;J)|J$是$R^+$中的紧集$\}$下构成一局部凸线性拓扑空间。

设$g\in M(R^+,R)$，并且对几乎一切$t\geqslant 0$，有$g(t)>0$。令

$$M_g=\left\{\varphi\in M(R^+,R)\,\middle|\,\operatorname{esssup}\left\{\frac{|\varphi(t)|}{g(t)}\,\middle|\,t\geqslant 0\right\}<+\infty\right\}.$$

(6.12)

很容易知道，M_g在范数

$$\|\varphi\|_g=\operatorname{esssup}\left\{\frac{|\varphi(t)|}{g(t)}\,\middle|\,t\geqslant 0\right\} \tag{6.13}$$

下构成一Banach空间，并且$\|\cdot\|_g$比$M(R^+,R)$中的拓扑强，

重新考察由(6.10)式定义的算子T.

定理6.8 设$k(t,s)$是局部Lebesgue可积函数T：$M(R^+,R)\to M(R^+,R)$是连续的.设$g\in M(R^+,R^+)$，$G\in M(R^+,R^+)$，并且几乎对一切$t\geqslant 0$，都有$g(t)>0$，$G(t)>0$. 如果存在常数$\alpha>0$，使得对几乎一切$t\geqslant 0$，都有

$$\int_0^t |k(t,s)|g(s)ds\leqslant \alpha G(t), \tag{6.14}$$

则T与(M_g,M_G)相容.

这一定理的证明与定理6.7证明的充分性部分类似，故从略.

引理6.9 设$k(t,s)$是局部Lebesgue可积函数.设

$$\lim_{h\to 0}\left[\int_0^t |k(t+h,s)-k(t,s)|ds + \int_0^{t+h}|k(t+h,s)|ds\right]=0, \tag{6.15}$$

则T映$M(R^+,R)$入$C(R^+,R)$.若进一步假设

$$\sup\left[\int_0^t |k(t,s)|ds\,\middle|\,0\leqslant t\leqslant b\right\}<+\infty\quad(\forall b>0),$$

(6.16)

则T映$M(R^+,R)$入$C(R^+,R)$全连续.

证 任给$\varphi\in M(R^+,R)$，$t\geqslant 0$，$t+h\geqslant 0$，$|h|<1$，有

$$|T\varphi(t+h)-T\varphi(t)|\leqslant\left|\int_0^t[k(t+h,s)-k(t,s)]\varphi(s)ds\right.$$

$$\left.+\int_t^{t+h}k(t+h,s)\varphi(s)ds\right|$$

$$\leqslant\left\{\int_0^t|k(t+h,s)-k(t,s)|ds\right.$$

$$\left.+\int_t^{t+h}|k(t+h,s)|ds\right\}\cdot\operatorname{esssup}\{\varphi(s)|0\leqslant s\leqslant t+1\}. \tag{6.17}$$

所以$\lim\limits_{t\to 0}T\varphi(t+h)=T\varphi(t)$，即$T\varphi\in C(R^+,R)$.

如果(6.16)式成立，设$\varphi_n\in M(R^+,R)$，在$M(R^+,R)$的拓扑下$\varphi_n\to\theta$，下证对任给$b>0$，有

$$\lim_{n\to\infty}\max_{0\leqslant t\leqslant b}|T\varphi_n(t)|=0. \tag{6.18}$$

事实上，当$0\leqslant t\leqslant b$时

$$|T\varphi_n(t)|=\left|\int_0^t k(t,s)\varphi_n(s)ds\right|$$

$$\leqslant\int_0^t|k(t,s)|ds\cdot\operatorname*{esssup}_{0\leqslant t\leqslant b}|\varphi_n(t)|,$$

所以

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant b}|T\varphi_n(t)|\leqslant\sup_{0\leqslant t\leqslant b}\int_0^t|k(t,s)|ds\cdot\operatorname*{esssup}_{0\leqslant t\leqslant b}|\varphi_n(t)|. \tag{6.19}$$

故(6.18)式成立，亦即$T:M(R^+,R)\to C(R^+,R)$连续。

设B是$M(R^+,R)$中的有界集，仿(6.19)式的证明，可知对任给$b>0$，TB在$[0,b]$上一致有界. 由(6.17)式可知，对任给$b>0$，TB在$[0,b]$上是等度连续的函数族. 从而TB在$C(R^+,R)$中相对紧. 证完.

若$g(t)\equiv 1$，则记$M_g=BM$，$C_g=BC$.

引理6.10 设$k(t,s)$是局部Lebesgue可积函数.

(i)若(6.16)式成立，则T映$M(R^+,R)$入自身且连续；

(ii)若下式成立：

$$\sup\left\{\int_0^t |k(t,\ s)|ds \mid 0 \leqslant t < +\infty\right\} < +\infty \qquad (6.20)$$

则T与(BM, BM)相容.

证 仿(6.19)式的证明，可知T映$M(R^+,\ R)$入自身，由(6.19)式可知$T: M(R^+,R) \to M(R^+,R)$是连续的.当(6.20)式成立时，由定理6.8(其中取$g(t) \equiv G(t) \equiv 1$)即可知$T$映$BM$入$BM$.证完.

令$BC_0 = \{\varphi \in BC \mid \lim\limits_{t\to\infty}\varphi(t) = 0\}$，则易知$BC_0$是$BC$的闭线性子空间；令$BM_0 = \{\varphi \in BM \mid \lim\limits_{t\to 0}\varphi(t) = 0\}$，则$BM_0$是$BM$的闭线性子空间.

引理6.11 设$k(t,\ s)$是局部Lebesgue可积函数，(6.20)式成立.则有

(i)如果对任给$b > 0$，有

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^b |k(t,s)|ds = 0, \qquad (6.21)$$

则T与(BM_0, BM_0)相容；

(ii)若进一步假定(6.15)式成立，则T与(BC_0, BC_0)相容.

证 由引理6.10可知T映BM_0入BM.给定$\varphi \in BM_0$，并任给$\varepsilon > 0$，则存在$b > 0$，使对$t \geqslant b$,几乎处处有$|\varphi(t)| < \dfrac{\varepsilon}{2\alpha}$，

其中$\alpha = \sup\left\{\int_0^t |k(t,s)|ds \mid 0 \leqslant t < +\infty\right\} < +\infty$. 由(6.21)式知，存在$b_1 \geqslant b$，使当$t \geqslant b_1$时

$$\int_0^b |k(t,\ s)|ds \leqslant \frac{\varepsilon}{2\|\varphi\|},$$

其中$\|\varphi\|$是φ在BM中的范数.因此，当$t \geqslant b_1$时

$$|T\varphi(t)|\leqslant\int_0^b|k(t,s)\varphi(s)|ds+\int_b^t|k(t,s)\varphi(s)|ds$$

$$\leqslant\|\varphi\|\int_0^b|k(t,s)|ds+\frac{\varepsilon}{2\alpha}\int_b^t|k(t,s)|ds$$

$$\leqslant\|\varphi\|\cdot\frac{\varepsilon}{2\|\varphi\|}+\frac{\varepsilon}{2\alpha}\cdot\alpha=\varepsilon.$$

故$\varphi\in BM_0$.(i)获证．若又设(6.15)式成立，则由引理6.9知，T映$C(R^+,R)$入$C(R^+,R)$，从而T映BC_0入$BM_0\cap C(R^+, R)=BC_0$.(ii)获证.证完.

设T由(6.10)式定义．为了应用定理6.4～定理6.6研究Volterra型非线性积分方程，需要对算子$R=I-(I-T)^{-1}$做某些讨论.

设$b>0$是一个常数，$k(t,s)$:〔0,b〕×〔0, b〕→R^1. 设$1<p<+\infty$, $p^{-1}+q^{-1}$.如果

1°$k(t,s)$是〔0,b〕×〔0,b〕上的可测函数，并且当$s>t$时，$k(t,s)\equiv 0$；

2°对几乎一切$t\in$〔0,b〕,$k(t,\cdot)\in L_q$〔0,b〕;

3°对几乎一切$s\in$〔0,b〕,$k(\cdot,s)\in L_p$〔0,b〕;

4°下列两式成立:

$$\int_0^b\left[\int_0^b|k(t,s)|^p dt\right]^{\frac{q}{p}}ds<+\infty,$$

$$\int_0^b\left[\int_0^b|k(t,s)|^q ds\right]^{\frac{p}{q}}dt<+\infty;$$

则记$k(t,s)\in(L_p,b)$.

设$k(t,s)\in(L_p,b)$，定义$k_1(t,s)=k(t,s)$,

$$k_{n+1}(t,s)=\begin{cases}\int_s^t k(t,u)k_n(u,s)du, & \text{当 } 0\leqslant s\leqslant t\leqslant b \text{ 时},\\ 0, & \text{当 } 0\leqslant t<s\leqslant T \text{ 时}\end{cases}$$

$(n=1,2,3,\cdots)$.令

$$r(t,s)=\begin{cases}-\sum_{n=1}^{\infty}k_n(t,s), & \text{当 } 0\leqslant s\leqslant t\leqslant b \text{ 时},\\ 0, & \text{当 } 0\leqslant t<s<b \text{ 时}.\end{cases} \tag{6.22}$$

引理6.12 设对任给$b>0$，$k(t,s)\in(L_p,b)$. 则由(6.22)式定义的$r(t,s)$满足:

(i)对任给$b>0$，$r(t,s)\in(L_p,T)$；

(ii)由$r(t,s)$生成的线性积分算子:

$$R\varphi(t)=\int_0^t r(t,s)\varphi(s)ds \tag{6.23}$$

满足$R=I-(I-T)^{-1}$.

引理6.13 设对任给$b>0$，$k(t,s)$在$0\leqslant s\leqslant t\leqslant b$上连续. 则由(6.22)式定义的$r(t,s)$，满足:

(i)对任给$b>0$，$r(t,s)$在$0\leqslant s\leqslant t\leqslant b$上连续；

(ii)由(6.23)式定义的算子R满足$R=I-(I-T)^{-1}$.

引理6.12和引理6.13的证明可见R.K.Miller[1].

由(6.22)式定义的$r(t,s)$称为是$k(t,s)$的预解式.

下面研究Volterra型非线性积分方程

$$x(t)=h(t)+\int_0^t k(t,s)[x(s)+g(x(s))]ds,\quad t\geqslant 0. \tag{6.24}$$

设T由(6.10)式定义，$r(t,s)$是$k(t,s)$的预解式，R由(6.23)式定义. 在考察方程(6.24)的同时，考察

$$y(t)=h(t)+\int_0^t k(t,s)y(s)ds. \tag{6.25}$$

我们使用下列假设：

（1）$k(t,s)$是局部Lebesgue可积函数，并且对任给$b>0$，都有

$$\sup\left\{\int_0^t |k(t,s)|ds \,\middle|\, 0\leqslant t\leqslant b\right\}<+\infty;$$

（2）$k(t,s)$的预解式$r(t,s)$存在，$r(t,s)$是局部Lebesgue可积函数，并且

$$\sup\left\{\int_0^t |r(t,s)|ds \,\middle|\, 0\leqslant t<+\infty\right\}<+\infty; \tag{6.26}$$

（3）$g: R\to R$连续，$g(0)=0$，并且对任给$\varepsilon>0$，都存在$\delta>0$，使得当$|x|\leqslant\delta$，$|y|\leqslant\delta$时有

$$|g(x)-g(y)|\leqslant\varepsilon|x-y|. \tag{6.27}$$

定理6.14 如果假设（1）、（2）、（3）满足，且$h(t)\in M(R^+,R)$，方程(6.25)的解$y(t)\in BM$. 则对任意充分小的$r>0$，都存在$\eta>0$，使得只要$\|y\|\leqslant\eta$，方程（6.24）在$\{x\in BM \mid \|x\|\leqslant r\}$中就有唯一解.

证 在定理6.5中，令$F=M(R^+,R)$，$X=Y=BM$. 我们验证定理6.5的全部条件满足. 由假设（1）及引理6.10结论(i)知，T映$M(R^+,R)$入$M(R^+,R)$并且连续. 由假设（2）知R: $M(R^+,R)\to M(R^+,R)$连续. 因此，

$$y(t)=h(t)-\int_0^t r(t,s)h(s)ds$$

在$M(R^+,R)$中有唯一解. 注意到$I-R$具有

$$I-R=(I-T)^{-1}$$

的形式. 这表明$I-T$: $M(R^+,R)\to M(R^+,R)$是1—1且满的. 由(6.26)式及引理6.10结论(ii)知，R与(BM,BM)相容再由假设（3）易知，定理6.5的其它条件都满足. 根据定理6.5，

本定理的结论成立.证完.

推论6.15 设假设(1)、(2)、(3)成立.设$r(t, s)$满足

$$\lim_{h\to 0}\left[\int_0^t |r(t+h,s)-r(t,s)|ds + \int_t^{t+h}|r(t+h,s)|ds\right]=0. \tag{6.28}$$

设$h(t)\in(R^+,R)$，并且方程(6.25)的解$y(t)\in BC$.则对任意充分小的$r>0$，都存在$\eta>0$，使得只要$\|y\|\leqslant\eta$，方程(6.24)在$\{x\in BC \mid \|x\|\leqslant r\}$中就有唯一解.

证 由(6.28)式并根据引理6.9知，R映$M(R^+, R)$入$C(R^+,R)$，由(6.26)式及引理6.10结论(ii)知，R映BM入BM，从而R映BC入BC.在定理6.5中，令$F=M(R^+, R)$，$X=Y=BC$，并应用定理6.14的证明方法，即知本定理的结论成立.证完.

推论6.16 如果假设（1）、（2）、（3）成立，且$r(t,s)$满足：对任给$b>0$，

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^b |r(t,s)|ds=0. \tag{6.29}$$

设$h(t)\in BM_0$，并且方程(6.25)的解$y(t)\in BM_0$.则对任意充分小的$r>0$，都存在η，使得只要$\|y\|\leqslant\eta$，方程（6.24）在$\{x\in BM_0 \mid \|x\|\leqslant r\}$中就有唯一解.

证 由引理6.11可知，R映BM_0入BM_0.然后仿定理6.14的证明即可.证完.

定理6.17 如果假设(1)、(2)成立，且(6.28)式满足.又设$g: R\to R$是连续的，并且对任给$\varepsilon>0$，都存在$\delta>0$，使得当$|x|\leqslant\delta$时，有

$$|g(x)|\leqslant\varepsilon|x|. \tag{6.30}$$

则对于任意充分小的$h\in BC$，方程(6.24)在BC中至少有一个解．

证 设$F=C(R^+,R)$，$X=Y=BC$．我们验证定理6.6的全部条件满足．仿定理6.14的证明，可知定理6.6的条件1*～4*满足．更进一步，若$h\in BC$，则$y=(I-R)h\in BC$，并且

$$\|y\|\leqslant(1+\|R\|)\|h\|.$$

由引理6.9可知，$R:C(R^+,R)\to C(R^+,R)$是全连续算子．取$\varepsilon_1>0$，使$\varepsilon_1\|R\|<1$．取$\varepsilon>0$，使$\varepsilon\leqslant\varepsilon_1$．于是存在$\delta>0$，使当$|x|\leqslant\delta$时，(6.30)式成立．令$r=\delta$，$s=\varepsilon\delta$，则当$\|\varphi\|\leqslant r$时，有$|g(\varphi(t))|\leqslant\varepsilon|\varphi(t)|\leqslant\varepsilon\delta=s$．因此，$g$映$B(r;BC)$入$B(s;BC)$．显然$g$映$B(r;BC)$入$B(s,BC)$在$C(R^+,R)$的拓扑下是连续的，并且$B(r;BC)$在$C(R^+,R)$的拓扑下的闭包$\overline{B}(r;BC)=B(r;BC)$．取$h\in BC$，满足

$$(1+\|R\|)\|h\|\leqslant\delta(1-\varepsilon_1\|R\|)$$

则有

$$\|y\|+\|R\|s\leqslant(1+\|R\|)\|h\|+\|R\|\varepsilon\delta$$
$$\leqslant\delta(1-\varepsilon_1\|R\|)+\delta\varepsilon_1\|R\|=\delta=r.$$

因此，定理6.6的全部条件满足．根据定理6.6，方程(6.24)在$B(r;BC)$中至少有一个解．证完．

附注 相容性概念由J.L.Massera和J.J.Schäffer〔1〕引入．本节方法的特点在于把方程(6.1)转化成为一个与之等价的算子方程(6.3)．这一方法通常被称为算子方法．本节的基本结果分别由C.Corduneanu〔4〕、〔5〕，R.K.Miller〔2〕，R.K.Miller，J.A.Nohel和J.S.W.Wong〔1〕获得．某些进一步的结果可见H.A.Antosiewicz〔1〕，A.Strauss〔1〕，S.I.Grossmann和R.K.Miller〔1〕，N.Levinson〔1〕，A.Friedmann〔1〕、〔2〕．

第九章　Banach空间中的积分方程

§1　Banach空间中的Fredholm非线性积分方程

设E是某实Banach空间，$I=[a,b]$. 考察如下的Fredholm型非线性积分方程

$$x(t)=\int_I H(t,s,x(s))ds, \tag{1.1}$$

其中$H\in C[I\times I\times E,E]$. 设$P$是$E$中的一个锥，从而$P$确定$E$中的一个半序. 令

$$P_I=\{x\in C[I,E]\mid x(t)\geq\theta, t\in I\},$$

这里$C[I,E]$表由所有的映I入E的连续映象x: $I\to E$在范数$\|x\|_C=\max_{t\in I}\|x(t)\|$下所构成的Banach空间，$\theta$表$E$中的零元. 显然$P_I$是$C[I,E]$中的一个锥，从而确定$C[I,E]$中的一个半序. 很明显，如果$P$是正规的，则$P_I$也是正规的.

引理1.1　若P是体锥（即P的内点集$\mathrm{int}P\neq\phi$），则P_I也是一个体锥，并且

$$\mathrm{int}P_I=\{x\in C[I,E]\mid x(t)\in\mathrm{int}P, t\in I\}.$$

证　令$Q=\{x\in C[I,E]\mid x(t)\in\mathrm{int}P, t\in I\}$，下面证明$\mathrm{int}P_I=Q$. 设$x_0\in\mathrm{int}P_I$，则存在$r>0$，使得

$$x\in C[I,E],\ \|x-x_0\|_C<r\Rightarrow x(t)\geq\theta, t\in I. \tag{1.2}$$

对于满足$\|z-x_0(s)\|<r$的任何$s\in I$和$z\in E$，在(1.2)式中，令

$x(t)=x_0(t)-x_0(s)+z$，则得 $x(t)=x_0(t)-x_0(s)+z\geqslant\theta$，$t\in I$；特别地，$z=x(s)\geqslant\theta$，从而$x_0(s)\in\mathrm{int}P$.由$s\in I$的任意性，即得$x_0\in Q$.故$\mathrm{int}P_I\subset Q$.

反之，设$y_0\in Q$.取定某$u_0\in\mathrm{int}P$．于是，对任给$t'\in I$，必存在$\varepsilon'=\varepsilon'(t')>0$，使

$$y_0(t')\geqslant 2\varepsilon' u_0. \tag{1.3}$$

由于$y_0(t)$在I上连续，故存在开区间$J(t',\delta')=(t'-\delta',t'+\delta')(\delta'>0)$，使得

$$\varepsilon' u_0+[y_0(t)-y_0(t')]\geqslant\theta, t\in J(t',\delta'). \tag{1.4}$$

于是，由(1.3)式与(1.4)式可知

$$y_0(t)\geqslant\varepsilon' u_0,\ \forall t\in J(t',\delta').$$

根据有限覆盖定理，可知必存在有限个开区间$\{J(t_i,\delta_i)\}(i=1,2,\cdots,m)$，使得它们已覆盖$I$，并且

$$y_0(t)\geqslant\varepsilon_i u_0,\ \forall t\in J(t_i,\varepsilon_i), i=1,2,\cdots,m,$$

其中$\varepsilon_i(i=1,2,\cdots,m)$是正的常数.取$\varepsilon_0=\min\{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_m\}>0$，则有

$$y_0(t)\geqslant\varepsilon_0 u_0,\ \forall t\in I. \tag{1.5}$$

由$u_0\in\mathrm{int}P$知，存在$\eta>0$，使当$y\in C[I,E]$，$\|y-y_0\|_C=\max\limits_{t\in I}\|y(t)-y_0(t)\|<\eta$时，恒有

$$\frac{\varepsilon_0}{2}u_0+y(t)-y_0(t)\geqslant\theta,\ \forall t\in I. \tag{1.6}$$

由(1.5)式和(1.6)式可知，当$\|y-y_0\|_C<\eta$时，有

$$y(t)\geqslant\frac{\varepsilon_0}{2}u_0\in\mathrm{int}P,\ \forall t\in I;$$

从而$y\in P_I$．这表明$y_0\in\mathrm{int}P_I$．因此$Q\subset\mathrm{int}P_I$．综上所述可知$\mathrm{int}P_I=Q$.

令$z(t)\equiv u_0(t\in I)$，则$z\in Q=\mathrm{int}P_I$，从而$\mathrm{int}P_I\neq\phi$。所以P_I是体锥.证完.

考察由下式定义的积分算子A:

$$Ax(t)=\int_I H(t,s,x(s))ds. \tag{1.7}$$

引理1.2 设$H\in C[I\times I\times E,E]$，并且对任给$R>0$，$H$在$I\times I\times\overline{B}_R$上一致连续，这里，$B_R=\{x\in E\mid \|x\|<R\}$。又设存在$L>0$，$L(b-a)<\frac{1}{2}$，使得对$E$中的任何有界集$B$及$t\in I,s\in I$，都有

$$\alpha(H(t,s,B))\leqslant L\alpha(B), \tag{1.8}$$

其中α表Kuratowski非紧性测度.则$A:C[I,E]\to C[I,E]$是严格集压缩算子.

证 由H的一致连续性及(1.8)式，很容易证明对任给有界集$B\subset E$，有

$$\alpha(H(I\times I\times B))=\max_{t,s\in I}\alpha(H(t,s,B))\leqslant L\alpha(B). \tag{1.9}$$

根据H在$I\times I\times\overline{B}_R(\forall R>0)$上的一致连续性易知$H$是有界的，从而显然$A$: $C[I,E]\to C[I,E]$是连续、有界算子. 任给$C[I,E]$中的有界集S.取$R>0$,使$S\subset\{x\in C[I,E]\mid \|x\|_C\leqslant R\}$.由$H$在$I\times I\times\overline{B}_R$上的一致连续性(它蕴含着$H$在$I\times I\times\overline{B}_R$上的有界性)易知函数族$\{Ax\mid x\in S\}$是一致有界且等度连续的，从而

$$\alpha(A(S))=\sup_{t\in I}\alpha(A(S(t))), \tag{1.10}$$

其中$A(S(t))=\{Ax(t)\mid x\in S\}$（参见V. Lakshmikantham和S. Leela[2]引理1.4.1）.利用

$$\frac{1}{b-a}\int_I x(t)dt\in\overline{co}\{x(t)\mid t\in I\},\ \forall x\in C[I,E]$$

并注意到(1.9)式，可得

$$\alpha(A(S(t)))=\alpha\left(\left\{\int_I H(t,s,x(s))ds \mid x\in S\right\}\right)$$

$$\leqslant(b-a)\alpha(\overline{co}\{H(t,s,x(s))\mid t,s\in I,x\in S\})$$

$$=(b-a)\alpha(\{H(t,s,x(s))\mid t,s\in I,x\in S\})$$

$$\leqslant(b-a)\alpha(H(I\times I\times B))\leqslant(b-a)L\alpha(B), \qquad (1.11)$$

其中$B=\{x(s)\mid s\in I,\ x\in S\}\subset\overline{B}_R$.对任给$\varepsilon>0$，存在$S$的一个分解 $S=\bigcup_{j=1}^{n}S_j$，使得

$$\mathrm{diam}(S_j)<\alpha(S)+\varepsilon, j=1,2,\cdots,n. \qquad (1.12)$$

取$x_j\in S_j(j=1,2,\cdots,n)$及

$$a=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_{i-1}<t_i<\cdots<t_m=b,$$

使得对任给$1\leqslant j\leqslant n,t,s\in I_i=[t_{i-1},t_i]$，$1\leqslant i\leqslant m$，都有

$$\|x_j(t)-x_j(s)\|<\varepsilon. \qquad (1.13)$$

令$B_{ij}=\{x(s)\mid s\in I_i,x\in S_j\}$，则显然$B=\bigcup_{i=1}^{m}\bigcup_{j=1}^{n}B_{ij}$. 对于任何$u\in B_{ij}$，$v\in B_{ij}$,存在$t,s\in I_i,x,y\in S_j$，使得$u=x(t),v=y(s)$.于是，由(1.12)及(1.13)两式，有

$$\|u-v\|\leqslant\|x(t)-x_j(t)\|+\|x_j(t)-x_j(s)\|+\|x_j(s)-y(s)\|$$

$$\leqslant\|x-x_j\|_C+\varepsilon+\|x_j-y\|_C$$

$$\leqslant 2\mathrm{diam}(S_j)+\varepsilon<2\alpha(S)+3\varepsilon.$$

从而

$$\mathrm{diam}(B_{ij})\leqslant 2\alpha(S)+3\varepsilon, 1\leqslant i\leqslant m,\ 1\leqslant j\leqslant n.$$

所以，$\alpha(B)\leqslant 2\alpha(S)+3\varepsilon$.由于$\varepsilon$的任意性，有

$$\alpha(B)\leqslant 2\alpha(S). \qquad (1.14)$$

由(1.10)、(1.11)、(1.14)诸式，可知$\alpha(A(S))\leqslant k\alpha(S)$，其中$k=2(b-a)L<1$.所以$A$是严格集压缩算子.证完.

定理1.3 设P是实Banach空间E中的一个正规体锥.设

（1）$H\in C[I\times I\times E,E]$，并且对任给$R>0$，$H$在$I\times I\times\overline{B}_R$上都是一致连续的；

（2）存在常数$L>0$，满足$L(b-a)<\frac{1}{2}$，并且对任给E中的有界集B和$t,s\in I$，都有

$$\alpha(H(t,s,B))\leqslant L\alpha(B);\tag{1.15}$$

（3）对$(t,s)\in I\times I$一致地有

$$\lim_{\|x\|\to 0}\frac{\|H(t,s,x)\|}{\|x\|}=0;\tag{1.16}$$

（4）对$(t,s)\in I\times I$一致地有

$$\lim_{\|x\|\to\infty}\frac{\|H(t,s,x)\|}{\|x\|}=0;\tag{1.17}$$

（5）存在$x_0\in\mathrm{int}P$及$k\in C[I\times I,R^1]$，使得

$$H(t,s,x)\geqslant k(t,s)x_0,\quad\forall x\geqslant x_0,\tag{1.18}$$

$$\int_I k(t,s)ds>1,\ \forall t\in I.\tag{1.19}$$

则方程(1.1)在$C[I,E]$中至少有三个不同的解$x_i(t)(i=1,2,3)$，其中$x_1(t)\equiv\theta$；$x_2(t)\gg x_0(\forall t\in I)$；$x_3(t)\neq\theta$并且对某$t\in I$，有$x_3(t)\not\geqslant x_0$。

证 根据引理1.2，A是映$C[I,E]$入$C[I,E]$的严格集压缩算子。由(1.16)式及H的连续性知，$H(t,s,\theta)\equiv\theta(t,s\in I)$，从而$x_1(t)\equiv\theta$是方程(1.1)的平凡解。

由(1.16)、(1.17)两式可知，存在正数r及R_0，使

$$0<r<\frac{\|x_0\|}{N}<R_0,\tag{1.20}$$

并且

$$\|H(t,s,x)\|\leqslant\frac{\|x\|}{2(b-a)},\ \forall t,s\in I,\|x\|\leqslant r\text{或}\|x\|\geqslant R_0,\tag{1.21}$$

其中(1.20)式中的N是锥P的正规常数（即从$\theta\leqslant x\leqslant y$可以推出$\|x\|\leqslant N\|y\|$）.于是

$$\|H(t,s,x)\|\leqslant\frac{\|x\|}{2(b-a)}+M,\quad\forall t,s\in I,x\in E,\tag{1.22}$$

其中

$$M=\sup\{\|H(t,s,x)\|\,\big|\,t,\ s\in I,\ x\in\overline{B}_{R_0}\}.$$

取

$$R>\max\{2M(b-a),R_0\},\tag{1.23}$$

并令

$$G_1=\{x\in C[I,\ E]\,\big|\,\|x\|_C<r\},$$
$$G_2=\{x\in C[I,\ E]\,\big|\,\|x\|_C<R\},$$
$$G_3=\{x\in C[I,E]\,\big|\,\|x\|_C<R\text{且}x(t)\gg x_0,\forall t\in I\}.$$

显然，G_1和G_2是$C[I,\ E]$中开集．由引理1.1易知，G_3也是$C[I,E]$中的开集.由(1.20)式知

$$G_1\subset G_2,G_3\subset G_2,G_1\cap G_3=\phi.\tag{1.24}$$

由(1.21)式知，当$x\in\overline{G}_1$时，有

$$\|Ax\|_C\leqslant\max_{t\in I}\int_I[2(b-a)]^{-1}\|x(s)\|ds\leqslant\frac{1}{2}\|x\|_C<r;$$

由(1.22)、(1.23)两式知，当$x\in\overline{G}_2$时，有

$$\|Ax\|_C\leqslant\frac{1}{2}\|x\|_C+M(b-a)\leqslant\frac{1}{2}R+M(b-a)<R,$$

从而

$$A(\overline{G}_1)\subset G_1,A(\overline{G}_2)\subset G_2.\tag{1.25}$$

当$x\in\overline{G}_3$时，有$\|x\|_C\leqslant R$，且$x(t)\geqslant x_0$（$\forall t\in I$），因此，$\|Ax\|_C<R$.由(1.18)、(1.19)两式可得

$$Ax(t)\geqslant\int_I k(t,s)x_0ds\geqslant\gamma x_0,$$

其中 $\gamma=\min_{t\in I}\int_I k(t,s)ds>1$. 于是

$$Ax(t)\gg x_0, \forall t\in I.$$

从而

$$A(\overline{G_3})\subset G_3. \tag{1.26}$$

由(1.25)、(1.26)两式可知

$$\deg(I-A,G_i,\theta)=1, i=1,2,3. \tag{1.27}$$

于是，A在G_3中有不动点x_2，满足$x_2(t)\gg x_0(\forall t\in I)$. 又由(1.27)式及拓扑度的可加性知

$$\deg(I-A,\ G_2\setminus(\overline{G}_1\cup\overline{G}_3),\ \theta)=-1,$$

从而A在$G_2\setminus(\overline{G}_1\cup\overline{G}_3)$中有不动点$x_3(t)$. 证完.

注1.4 当E是有限维空间时，任何$H\in C[I\times I\times E,E]$都满足定理1.3的条件(1)与(2).

例1.5 考察非线性积分方程组

$$\begin{cases} x_1(t)=\int_0^1 H_1(t,s,x_1(s),x_2(s))ds, \\ x_2(t)=\int_0^1 H_2(t,s,x_1(s),x_2(s))ds, \end{cases} \tag{1.28}$$

其中

$$H_1(t,s,x_1,x_2)=(2+ts)\sqrt[3]{x_1+x_2}\ln(1+x_1^2+x_2^2),$$

$$H_2(t,s,x_1,x_2)=\frac{(2-ts)\sqrt[3]{x_1x_2}\operatorname{arctg}(x_1^2+x_2^2)}{1+\operatorname{arctg}(x_1^2+x_2^2)}.$$

在定理1.3中，令$I=[0,1]$，$E=R^2$，$P=\{x=(x_1,x_2)\in R^2\,|\,x_1\geqslant 0, x_2\geqslant 0\}$，$H(t,s,x)=(H_1(t,s,x_1,x_2),H_2(t,s,x_1,x_2))$. 不难验证定理1.3的全部条件都满足. 例如条件(5)验证如下：取$x_0=(1,\varepsilon_0)$，$\varepsilon_0=\left[\frac{\pi}{2\ln 2(\pi+4)}\right]^{-\frac{3}{2}}$，则当$x\geqslant x_0$

(即$x_1 \geqslant 1$, $x_2 \geqslant \varepsilon_0$)时，对$t$，$s \in [0, 1]$，有

$$H_1(t,s,x_1,x_2) > 2\ln 2,$$

$$H_2(t,s,x_1,x_2) \geqslant \frac{\sqrt[3]{\varepsilon_0}\operatorname{arctg} 1}{1+\operatorname{arctg} 1}$$

$$> \frac{\sqrt[3]{\varepsilon_0}\pi}{\pi+4} == 2\varepsilon_0 \ln 2.$$

因此，若取$k(t,s) \equiv 2\ln 2$。则(1.18)、(1.19)两式满足，即定理1.3的条件（5）成立。根据定理1.3可以知道：非线性积分方程组(1.28)至少有三组连续解$(x_{1i}(t), x_{2i}(t))$ $(i=1, 2, 3)$，其中$x_{11}(t) \equiv 0$，$x_{21}(t) \equiv 0$；$x_{12}(t) > 1$，$x_{22}(t) > \left[\frac{\pi}{2\ln 2(\pi+4)}\right]^{\frac{3}{2}}$ $(t \in [0, 1])$；并且对某$t_0 \in [0,1]$，或者$x_{13}(t) < 1$，或者$x_{23}(t_0) < \left[\frac{\pi}{2\ln 2(\pi+4)}\right]^{\frac{3}{2}}$。

定理1.6 设P是实Banach空间E中的一个锥。设定理1.3中的条件（1）、（2）、（4）满足，并且满足

（5′）存在$x_0 \in P \setminus \{\theta\}$及$k \in C[I \times I, R^1]$，使得

$$H(t,s,x) \geqslant k(t,s)x_0, \forall x \geqslant x_0, \tag{1.29}$$

$$\int_I k(t,s)ds \geqslant 1, \forall t \in I. \tag{1.30}$$

则方程(1.1)在$C[I, E]$中至少具有一个非平凡解$x^*(t)$，满足$x^*(t) \geqslant x_0$，$\forall t \in I$。

证 仿定理1.3之证明，可知(1.22)式成立，其中可取$R_0 > \|x_0\|$。取R满足(1.23)式，令

$$D = \{x \in C[I, E] \mid \|x\|_C \leqslant R \text{且} x(t) \geqslant x_0, \forall t \in I\}.$$

显然D是$C[I,E]$中的有界凸闭集，$D \neq \phi$（因为$\overline{x}(t) \equiv x_0 \in D$）。

仿(1.26)式的证明，可知$A(D)\subset D$，其中A由(1.7)式给出，根据引理1.2，它是映$C[I,E]$入$C[I,E]$的严格集压缩算子．于是，根据Sadovskii定理（见附录定理2.14），A在D中有不动点x^*．证完．

注1.7 显然，定理1.6中的条件(5′)比定理1.3中的条件(5)弱；同时，在定理1.6中，只假定P是E中的锥，并不要求P是正规锥或体锥．

例1.8 考察非线性积分方程组

$$\begin{cases} x_1(t)=\int_0^1 H_1(t,s,x_1(s),x_2(s),x_3(s))ds, \\ x_2(t)=\int_0^1 H_2(t,s,x_1(s),x_2(s),x_3(s))ds, \\ x_3(t)=\int_0^1 H_3(t,s,x_1(s),x_2(s),x_3(s))ds, \end{cases} \tag{1.31}$$

其中

$$H_1(t,s,x_1,x_2,x_3)=(2-ts)\sqrt[3]{x_1+x_2+x_3}-t^2s,$$

$$H_2(t,s,x_1,x_2,x_3)=(2+ts)\ln(1+x_1^2+x_2^2+x_3^2)-\cos(t+s-x_1),$$

$$H_3(t,s,x_1,x_2,x_3)=\sin^2(t-s+x_2x_3).$$

在定理1.6中，令$I=[0,1]$，$E=R^3$，$P=\{x=(x_1,x_2,x_3)\in R^3\,|\,x_1\geqslant 0,x_2\geqslant 0,x_3\geqslant 0\}$，$H(t,s,x)=(H_1(t,s,x_1,x_2,x_3),H_2(t,s,x_1,x_2,x_3),H_3(t,s,x_1,x_2,x_3))$．不难验证定理1.6的全部条件都满足．例如，条件(5′)验证如下：取$x_0=(1,0,0)$，则当$x\geqslant x_0$(即$x_1\geqslant 1$，$x_2\geqslant 0$，$x_3\geqslant 0$)时，有

$$H_1(t,s,x_1,x_2,x_3)\geqslant 2-ts-t^2s,$$

$$H_2(t,s,x_1,x_2,x_3)\geqslant 2\ln 2-1>0,$$

$$H_3(t,s,x_1,x_2,x_3)\geqslant 0.$$

因此，若取$k(t,s)=2-ts-t^2s$，可知(1.29)式成立．对上述$k(t,s)$，又有

$$\int_0^1 k(t,s)ds=\int_0^1(2-ts-t^2s)ds=2-\frac{t}{2}-\frac{t^2}{2}\geqslant 1$$
$$(\forall t\in[0,1]),$$

故(1.30)式也成立.于是，根据定理1.6可知：方程组(1.31)至少有一组连续解$(x_1^*(t),x_2^*(t),\ x_3^*(t))$，满足$x_1^*(t)\geqslant 1,x_2^*(t)\geqslant 0,x_3^*(t)\geqslant 0\ (\forall t\in[0,1])$.

利用压缩映象原理，可以证明下面的唯一性定理．

定理1.9 设$H\in C[I\times I\times E,E)$满足Lipschitz条件：

$$\|H(t,s,x)-H(t,s,y)\|\leqslant L\|x-y\|,\forall t,s\in I,x,\ y\in E; \tag{1.32}$$

又设

$$L(b-a)<1, \tag{1.33}$$

则方程(1.1)在$C[I,\ E]$中有唯一的解$x^*(t)$；并且对任给$x_0\in C[I,E]$,作迭代序列

$$x_n(t)=\int_I H(t,s,x_{n-1}(s))ds\quad(n=1,2,\cdots), \tag{1.34}$$

都有

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n-x^*\|_C=0. \tag{1.35}$$

证 考察算子(1.7).设$x\in C[I,E]$.对$t_n,t_0\in I,t_n\to t_0$,有

$$\|Ax(t_n)-Ax(t_0)\|\leqslant\int_I\|H(t_n,s,x(s))-H(t_0,s,x(s))\|ds. \tag{1.36}$$

由H的连续性可知，对任给$s\in I$,有

$$\lim_{n\to\infty}\|H(t_n,s,x(s))-H(t_0,s,x(s))\|=0. \tag{1.37}$$

另一方面，对$t\in I,s\in I$，由(1.32)式知

$$\|H(t,s,x(s))\|\leqslant\|H(t,s,x(s))-H(t,s,\theta)\|+\|H(t,s,\theta)\|$$
$$\leqslant L\|x(s)\|+\|H(t,s,\theta)\|\leqslant L\|x\|_C+M,$$

其中$M=\max\limits_{t,s\in I}\|H(t,s,\theta)\|<+\infty$.于是，对任给$s\in I$，有

$$\|H(t_n,s,x(s))-H(t_0,s,x(s))\|\leqslant 2(L\|x\|_C+M). \tag{1.38}$$

由(1.37)、(1.38)两式，并利用Lebesgue有界收敛定理，可知有

$$\lim_{n\to\infty}\int_I\|H(t_n,s,x(s))-H(t_0,s,x(s))\|ds=0.$$

由此，并注意到(1.36)式，得

$$\lim_{n\to\infty}\|Ax(t_n)-Ax(t_0)\|=0.$$

故$Ax\in C[I,E]$.这表明A映$C[I,E]$入$C[I,E]$.

对任给$x\in C[I,E]$，$y\in C[I,E]$，由(1.32)、(1.33)两式，有

$$\|Ax(t)-Ay(t)\|\leqslant\int_I\|H(t,s,x(s))-H(t,s,y(s))\|ds$$

$$\leqslant L\int_I\|x(s)-y(s)\|ds\leqslant L(b-a)\|x-y\|_C.$$

所以

$$\|Ax-Ay\|_C\leqslant q\|x-y\|_C, \tag{1.39}$$

其中$q=L(b-a)<1$.因此A是压缩映象.根据压缩映象原理，即知定理的结论成立.证完.

附注 本节引理1.2、定理1.3和定理1.6，都是在郭大钧〔33〕中证明的.

§ 2　Banach空间中的Volterra非线性积分方程

设E是实Banach空间，D是E中的开集，$J=[t_0, t_0+a]$ ($a>0$). 考察Volterra非线性积分方程

$$x(t)=x_0(t)+\int_{t_0}^{t} H(t,s,x(s))ds, \tag{2.1}$$

其中$x_0\in C[J,D]$, $H\in C[J\times J\times D, E]$.

定理2.1　设:(1)对D中的任何有界集B, H都在$J\times J\times B$上是一致连续的；

(2)存在常数$L>0$，使得对任给$t, s\in J$及D中的有界集B，都有

$$\alpha(H(t,s,B))\leqslant L\alpha(B); \tag{2.2}$$

则存在$0<r\leqslant a$，使方程(2.1)在$C[J_0, D]$中有解，其中$J_0=[t_0,t_0+r]$.

证　取$\eta>0$，使$B_0=\{z\in E \mid \|z-x_0(t_0)\|\leqslant\eta\}\subset D$. 由$x_0(t)$的连续性知，存在$\delta>0$，使当$t_0\leqslant t\leqslant t_0+\delta$时，有$\|x_0(t)-x_0(t_0)\|<\frac{\eta}{2}$. 令$M=\sup\{\|H(t, s, x)\| \mid t,s\in J, x\in B_0\}<+\infty$，　$r=\min\left\{a,\delta,\frac{\eta}{2M}, \frac{1}{4L}\right\}$. 下证$r$即合要求. 事实上，令

$$F=\left\{x\in C[J_0, E] \,\middle|\, \|x-x_0\|_C\leqslant\frac{\eta}{2}\right\}$$

(其中$J_0=[t_0,t_0+r]$)，则F是$C[J_0,E]$中的有界凸闭集. 考察算子

$$Ax(t)=x_0(t)+\int_{t_0}^{t} H(t,s,x(s))ds. \tag{2.3}$$

当$x\in F$时，对$t\in[t_0,t_0+r]$，有$\|x(t)-x_0(t_0)\|<\eta$.所以

$$\|Ax(t)-x_0(t)\|\leqslant\int_{t_0}^{t}\|H(t,s,x(s))\|ds\leqslant rM\leqslant\frac{\eta}{2}(t\in J_0),$$

由此可知A是映F入F的．A的连续性是显然的．由H的一致连续性容易证明

$$\alpha(H(J_0\times J_0\times B))=\max_{t,s\in J_0}\alpha(H(t,s,B)), \tag{2.4}$$

其中B是D中的任一有界集.另一方面，对$x\in F,t,\tau\in J_0$，$\tau<t$，有

$$\|Ax(t)-Ax(\tau)\|=\|x_0(t)-x_0(\tau)\|+\int_{\tau}^{t}\|H(t,s,x(s))\|ds$$

$$+\int_{t_0}^{\tau}\|H(t,s,x(s))-H(\tau,s,x(s))\|ds.$$

因此，$\{Ax(t)\,|\,x\in F\}$在J_0上是一致有界且等度连续的，从而对任何$S\subset F$，有

$$\alpha(A(S))=\sup_{t\in J_0}\alpha(A(S(t))) \tag{2.5}$$

（参见V.Lakshmikantham和S.Leela[2]引理1.4.1）．仿引理1.2中(1.11)式的证明，并利用(2.4)、(2.2)两式，可得

$$\alpha(A(S(t)))\leqslant(t-t_0)\alpha(\{H(t,s,x(s))\,|\,t,s\in J_0,x\in S\})$$

$$\leqslant r\alpha(H(J_0\times J_0\times B_1))\leqslant rL\alpha(B_1), \tag{2.6}$$

其中$B_1=\{x(s)\,|\,x\in S,s\in J_0\}\subset B_0\subset D$.仿(1.14)式的证明可得

$$\alpha(B_1)\leqslant 2\alpha(S). \tag{2.7}$$

于是，由(2.5)、(2.6)、(2.7)三式可得，$\alpha(A(S))\leqslant 2rL\alpha(S)\leqslant\frac{1}{2}\alpha(S)$.故$A$是映$F$入$F$的严格集压缩算子．根据Sadovskii不动点定理，A在F中具有不动点.证完.

定理2.2（积分不等式） 设P是E中的体锥，$H\in C[J\times J\times E,E]$，$H(t,s,u)$关于$u$是增的，即对任何$t\in J$，$s\in J$，$u_1\leqslant u_2$，都有$H(t,s,u_1)\leqslant H(t,s,u_2)$。设$x_0,u,v\in C[J,E]$，满足

$$\begin{cases} u(t)\leqslant x_0(t)+\int_{t_0}^{t} H(t,s,u(s))ds, t\in J; \\ v(x)\gg x_0(t)+\int_{t_0}^{t} H(t,s,v(s))ds, t\in J. \end{cases} \tag{2.8}$$

则从$u(t_0)\ll v(t_0)$可以推出$u(t)\ll v(t)$（$\forall t\in J$）。

证 设所述结论不成立，则

$$Z=\{t\in J\,|\,u(t)\ll v(t)\text{不成立}\}\neq\phi.$$

令$t_1=\inf Z$，则显然$t_1>t_0$，并且对任给$t_0\leqslant t<t_1$，都有$v(t)-u(t)\in \operatorname{int}P$，而$v(t_1)-u(t_1)\in\partial P$。因此，存在$f\in P^*\setminus\{\theta\}$，使$f[v(t_1)-u(t_1)]=0$。由(2.8)式及$H(t,s,u)$关于$u$的增性，并注意到对任给$x\in\operatorname{int}P$，$f(x)>0$，可得

$$f(u(t_1))\leqslant f\left[x_0(t_1)+\int_{t_0}^{t_1} H(t_1,s,u(s))ds\right]$$

$$\leqslant f\left[x_0(t_1)+\int_{t_0}^{t_1} H(t_1,s,v(s))ds\right]<f(v(t_1)),$$

此与$f[v(t_1)-u(t_1)]=0$矛盾。

注2.3 从上述定理的证明可以看出，把(2.8)式换为

$$\begin{cases} u(t)\ll x_0(t)+\int_{t_0}^{t} H(t,s,u(s))ds, t\in J, \\ v(t)\geqslant x_0(t)+\int_{t_0}^{t} H(t,s,v(s))ds, t\in J \end{cases} \tag{2.9}$$

后，定理2.2的结论仍然成立。

定理2.4 设：（1）对E中的任何有界集B，H都在$J\times J\times B$上是一致连续的；

（2）存在常数$L>0$，使得对任给$t, s\in J$及E中的有界集B，(2.2)式都成立；

（3）P是E中的体锥，并且$H(t,s,u)$关于u是增的．则存在$0<r\leqslant a$，使方程(2.1)在$C[J_0,E]$($J_0=[t_0,t_0+r]$)中有最大解$\gamma(t)$和最小解$\rho(t)$，即对方程(2.1)在$C[J_0, E]$中的任何解$x(t)$，都有

$$\rho(t)\leqslant x(t)\leqslant \gamma(t), \forall t\in J_0. \tag{2.10}$$

证 在定理2.1的证明中，取$D=E$，$r=\min\left\{a,\delta,\frac{\eta}{4M},\frac{1}{4L}\right\}$．再取定$-y_0\in \text{int}P$，使$\|y_0\|=\frac{\eta}{4}$．代替算子(2.3)，考察算子

$$A_n x(t)=Ax(t)+\frac{1}{n}y_0= x_0(t)+\int_{t_0}^{t} H(t,s,x(s))ds$$
$$+\frac{1}{n}y_0, \quad n=1,2,3\cdots. \tag{2.11}$$

用定理2.1的证明方法可知，A_n映F入F是严格集压缩算子，从而A_n在F中具有不动点x_n：

$$x_n(t)=A_n x_n(t)=x_0(t)+\int_{t_0}^{t} H(t, s,x_n(s))ds+\frac{1}{n}y_0. \tag{2.12}$$

令$S=\{x_n|n=1,2,3,\cdots\}\subset F$，则由定理2.1的证明方法可知

$$\alpha(S)=\alpha\left(\left\{ Ax_n+\frac{1}{n}y_0 \right\}\right)\leqslant \alpha(\{Ax_n\})+ \alpha\left(\left\{\frac{1}{n}y_0 \right\}\right)$$
$$=\alpha(A(S))\leqslant\frac{1}{2}\alpha(S),$$

故$\alpha(S)=0$，从而存在$\{x_n\}$的子列$\{x_{n_k}\}$及$\gamma\in C[J_0, E]$，使

$\lim\limits_{k\to\infty}\|x_{n_k}-y\|_C=0$.注意$H$的一致连续性，在(2.12)式中沿$n_k$取极限，即得

$$y(t)=x_0(t)+\int_{t_0}^{t}H(t,s,y(s))ds,\quad t\in J_0. \tag{2.13}$$

故$y(t)$是方程(2.1)在$C[J_0,E]$中的解．现设$x(t)$是方程(2.1)在$C[J_0,E]$中的任意一解：

$$x(t)=x_0(t)+\int_{t_0}^{t}H(t,s,x(s))ds,t\in J_0. \tag{2.14}$$

由(2.12)式知

$$x_{n_k}(t)\gg x_0(t)+\int_{t_0}^{t}H(t,s,x_{n_k}(s))ds\ (k=1,2,3,\cdots). \tag{2.15}$$

又显然$x_{n_k}(t_0)\gg x(t_0)$.故利用定理2.2,由(2.14)、(2.15)两式可知

$$x(t)\ll x_{n_k}(t),\quad t\in J_0,k=1,2,3,\cdots. \tag{2.16}$$

在(2.16)式中取极限，即得$x(t)\leqslant y(t)$，$t\in J_0$．故$y(t)$是方程(2.1)在$C[J_0,E]$中的最大解．

若代替算子(2.11)来考察算子

$$A_n^* x(t)=Ax(t)-\frac{1}{n}y_0=x_0(t)+\int_{t_0}^{t}H(t,s,x(s))ds$$

$$-\frac{1}{n}y_0,\quad n=1,2,3,\cdots, \tag{2.17}$$

则用同样的方法可以证明，方程(2.1)在$C[J,E]$中具有最小解.证完.

定理2.5（比较定理） 设定理2.4的条件(1)、(2)、(3)满足，$y(t)$和$\rho(t)$分别是方程(2.1)在$C[J_0,E]$中的最大解和最小解.设$m\in C[J,E]$.那么：

(i)如果

$$m(t)\leqslant x_0(t)+\int_{t_0}^{t} H(t,s,m(s))ds,\quad t\in J,\tag{2.18}$$

则 $$m(t)\leqslant \gamma(t),\quad t\in J_0;\tag{2.19}$$

(ii)如果

$$m(t)\geqslant x_0(t)+\int_{t_0}^{t} H(t,s,m(s))ds,\ t\in J,\tag{2.20}$$

则 $$m(t)\geqslant \rho(t),\quad t\in J_0.\tag{2.21}$$

证 只需证明结论(i)，结论(ii)的证明类似. 沿用定理2.4证明中的方法和记号，有

$$x_{n_k}(t)\gg x_0(t)+\int_{t_0}^{t} H(t,s,x_{n_k}(s))ds,\ t\in J_0,k=1,2,3,\cdots.\tag{2.22}$$

另一方面，显然有

$$x_{n_k}(t_0)\gg x_0(t_0)\geqslant m(t_0),\quad k=1,2,3,\tag{2.23}$$

于是，由(2.18)、(2.22)、(2.23)三式，并利用定理2.2，知

$$m(t)\ll x_{n_k}(t),\quad t\in J_0,k=1,2,3,\cdots.\tag{2.24}$$

在(2.24)式中，令$k\to\infty$取极限，即得(2.19)式.证完.

下面讨论方程(2.1)解的唯一性.

定理2.6 设$H\in C[J\times J\times E,E]$满足Lipschitz条件，即存在常数L＞0，使

$$\|H(t,s,x)-H(t,s,y)\|\leqslant L\|x-y\|,\forall t,s\in J,x,\ y\in E.\tag{2.25}$$

则对满足$0<r<\min\{a,L^{-1}\}$的任何r，方程(2.1)在$C[J_0,E]$($J_0=[t_0,t_0+r]$)中都具有唯一解$x^*(t)$，并且迭代序列

$$x_n(t)=x_0(t)+\int_{t_0}^{t} H(t,s,x_{n-1}(s))ds,n=1,2,3,\cdots\tag{2.26}$$

在J_0上一致收敛于$x^*(t)$.

证 任给$0<r<\min\{a, L^{-1}\}$，令

$$\eta=\frac{rN}{1-rL}>0, \tag{2.27}$$

其中$N=\max\limits_{t,s\in J}\|H(t,s,x_0(s))\|<+\infty$.考察$C[J_0,E]$中的有界闭集

$$F=\{x\in C[J_0, E] \mid \|x-x_0\|_C=\max_{t\in J_0}\|x(t)-x_0(t)\|\leqslant\eta\}$$

和算子(2.3).当$x\in F$时,对$t,s\in J_0$，利用(2.25)、(2.27)两式可得

$$\begin{aligned}\|H(t,s,x(s))\|&\leqslant\|H(t,s,x(s))-H(t,s,x_0(s))\|\\&\quad+\|H(t,s,x_0(s))\|\\&\leqslant L\|x(s)-x_0(s)\|+N\leqslant L\eta+N=\eta r^{-1}.\end{aligned}$$

从而当$t\in J_0$时，有

$$\|Ax(t)-x_0(t)\|\leqslant\int_{t_0}^{t}\|H(t,s,x(s))\|ds\leqslant\eta r^{-1}(t-t_0)\leqslant\eta.$$

故$Ax\in F$，所以A映F入F.

另一方面，对任给$x\in F, y\in F$，利用(2.25)式,可得

$$\begin{aligned}\|Ax(t)-Ay(t)\|&\leqslant\int_{t_0}^{t}\|H(t,s,x(s))-H(t,s,y(s))\|ds\\&\leqslant L\int_{t_0}^{t}\|x(s)-y(s)\|ds\leqslant Lr\|x-y\|_C, \forall t\in J_0,\end{aligned}$$

从而

$$\|Ax-Ay\|_C\leqslant Lr\|x-y\|_C. \tag{2.28}$$

因为$Lr<1$,故A是F上的压缩映射．根据压缩映射原理，A在F中具有唯一不动点x^*，并且迭代序列(2.26)在J_0上一致收敛于x^*.此x^*即为方程(2.1)在$C[J_0,E]$中的解.由于(2.28)式对任给$x\in C[J_0,E]$，$y\in C[J_0,E]$也成立,故A的不动点必唯一.证完.

定理2.7 设：(1) $G\in C[J\times J\times R^+, R^+]$ ($R^+=\{x\in R' \mid x\geq 0\}$)，$G(t,s,0)\equiv 0$，$G(t,s,u)$关于$u$是增函数，并且$u(t)\equiv 0$是积分方程

$$u(t)=\int_{t_0}^{t} G(t,s,u(s))ds \tag{2.29}$$

在$C[J,R^+]$中的唯一解；

(2) $H\in C[J\times J\times E, E]$，并且对任给$t,s\in J$，$x,y\in E$，有

$$\|H(t,s,x)-H(t,s,y)\|\leqslant G(t,s,\|x-y\|). \tag{2.30}$$

则方程(2.1)在$C[J,E]$中至多有一个解.

证 设$x(t)$，$y(t)$都是方程(2.1)在$C[J, E]$中的解. 令$m(t)=\|x(t)-y(t)\|$ $(t\in J)$. 则$m(t_0)=0$，并且由(2.30)式知

$$\begin{aligned}m(t)&\leqslant\int_{t_0}^{t}\|H(t,s,x(s))-H(t,s,y(s))\|ds\\&\leqslant\int_{t_0}^{t}G(t,s,\|x(s)-y(s)\|)ds\\&\leqslant\int_{t_0}^{t}G(t,s,m(s))ds,\quad t\in J.\end{aligned}$$

由条件(1)知$u(t)\equiv 0$是方程(2.29)在$C[J,R^+]$中的最大解. 由第八章定理4.3的证明方法可知

$$m(t)\leqslant u(t)\equiv 0,\quad \forall t\in J.$$

由此可知$m(t)\equiv 0$，亦即$x(t)\equiv y(t)$ $(\forall t\in J)$. 证完.

附注 Banach空间上的Volterra型积分方程的研究，与Banach空间常微分方程理论，有着密切的关系.

与本节内容有关的进一步讨论可见V. Lakshmikantham和S. Leela[2].

第十章　非线性积分方程理论的应用

非线性积分方程理论，在数学和其它自然科学的许多领域中，都有广泛的应用．限于篇幅，我们只讨论其中的几个方面．

在本章§1～§3中，我们较详细地讨论非线性积分方程在常微分方程边值问题中的应用．利用非线性积分方程讨论偏微分方程，不可避免地要涉及偏微分方程中的先验估计．这是一个专门的，需要很大篇幅的问题．因此本书没有讨论这一问题．有兴趣的读者，可以参考本章§3附注中的参考文献．

本章§4简述了在物理和自然科学其它领域中出现的几个非线性积分方程．

§1　非线性常微分方程两点边值问题的可解性

在本节中，主要讨论常微分方程两点边值问题

$$-u''=f(x,u,u'),\quad x\in[0,1] \tag{1.1}$$

$$\begin{cases}\alpha_0 u(0)+\beta_0 u'(0)=0,\\ \alpha_1 u(1)+\beta_1 u'(1)=0\end{cases} \tag{1.2}$$

解的存在性．

先做某些准备．设$u(x)\in C^2[0,1]$,记

$$U_0=\max_{x\in[0,1]}|u(x)|,\quad U_1=\max_{x\in[0,1]}|u'(x)|,$$

$$U_2=\max_{x\in[0,1]}|u''(x)|.$$

引理1.1 设$u(x)\in C^2[0,1]$，则

$$U_1\leqslant 2\sqrt{2}U_0^{\frac{1}{2}}U_2^{\frac{1}{2}}+2U_0. \tag{1.3}$$

证 设$|u'(x)|$在x_0处取到最大值，即$U_1=|u'(x_0)|$。任取正数δ，使$\delta\leqslant 1$，则当$|x-x_0|\leqslant\delta$时

$$U_2\geqslant\frac{|u'(x_0)-u'(x)|}{|x_0-x|}\geqslant\frac{U_1-|u'(x)|}{\delta},$$

因此，对任给$x\in[0,1]$，$|x-x_0|\leqslant\delta$，有

$$|u'(x)|\geqslant U_1-\delta U_2. \tag{1.4}$$

取$x_1,x_2\in[0,1]$，使$|x_1-x_2|=\delta$，$|x_2-x_0|=\delta$，$|x_1-x_0|\leqslant\delta$，则有

$$\frac{|u(x_1)-u(x_2)|}{\delta}=\frac{|u'(\xi)||x_1-x_2|}{\delta}\geqslant U_1-\delta U_2, \tag{1.5}$$

其中$x_1\leqslant\xi\leqslant x_2$。同时又显然有

$$|u(x_1)-u(x_2)|\leqslant 2U_0. \tag{1.6}$$

由(1.5)、(1.6)两式可得

$$U_1\leqslant\delta U_2+\frac{2U_0}{\delta}=g(\delta). \tag{1.7}$$

显然$g(\delta)$在 $\delta=\delta_0=\sqrt{\dfrac{2U_0}{U_2}}$时取到最小值

$$g(\delta_0)=2\sqrt{2}U_0^{\frac{1}{2}}U_2^{\frac{1}{2}}. \tag{1.8}$$

若$\delta_0\leqslant 1$，则取$\delta=\delta_0$，由(1.7)、(1.8)两式得

$$U_1\leqslant g(\delta_0)=2\sqrt{2}U_0^{\frac{1}{2}}U_2^{\frac{1}{2}};$$

若$\delta_0>1$，则取$\delta=1$，由(1.7)式得

$$U_1 \leqslant U_2 + 2U_0 < \delta_0 U_2 + 2U_0 = \sqrt{2}\, U_0^{\frac{1}{2}} U_2^{\frac{1}{2}} + 2U_0.$$

因此，不论哪种情况，都有(1.3) 式成立．证完．

下面讨论常微分方程两点边值问题(1.1)、(1.2)解的存在性．令

$$E_1 = \{u(x) \in C^1[0,1] \mid u(x)\text{满足(1.2)式}\}. \qquad (1.9)$$

对任意$u \in E_1$，定义范数

$$\|u\| = \max_{x\in[0,1]} |u(x)| + \max_{x\in[0,1]} |u'(x)|,$$

则E_1是Banach空间．

定理1.2 设：(1) $f(x, u, p)$是$[0,1]\times R^1 \times R^1$上的连续函数；

(2) $\alpha_0 \geqslant 0$，$\beta_0 \leqslant 0$，$\alpha_1 \geqslant 0$，$\beta_1 \geqslant 0$，$\alpha_0^2+\beta_0^2 \neq 0$，$\alpha_1^2+\beta_1^2 \neq 0$，$\alpha_0^2+\alpha_1^2 \neq 0$；

(3) $f_u'(x,u,0)$存在连续，并存在$a>0$，使

$$f_u'(x,u,0) \leqslant -a; \qquad (1.10)$$

(4) 当$x\in[0,1]$，$|u| \leqslant \frac{1}{a}\max_{x\in[0,1]}|f(x, 0, 0)|$，$|p|<+\infty$时，有

$$|f(x,u,p)| \leqslant b + p^2\varepsilon(|p|),$$

其中$b \geqslant 0$是一常数，$\varepsilon(|p|)>0$，$\lim_{|p|\to+\infty}\varepsilon(|p|)=0$，$p^2\varepsilon(|p|)$是$|p|$的单调增加函数；

则边值问题(1.1)、(1.2)至少有一个解．

证 设$k(x, y)$是$-u''=\lambda u$在边值条件(1.2)下的格林函数，则边值问题(1.1)、(1.2)属于$C^2[0, 1]$的解等价于非线性Hammerstein型积分方程

$$u(x)=\int_0^1 k(x,y)f(y,u(y),u'(y))dy=Au(x) \tag{1.11}$$

属于$C^1[0,1]$的解。显然，由(1.11)式定义的积分算子A映E_1入E_1连续。由于A映E_1中的有界集为$C^2[0,1]$中的有界集，故A映E_1入E_1全连续。因此，为了证明边值问题(1.1)、(1.2)有解，只需证明存在常数$M>0$，使得当$\lambda\in[0,1]$，u是边值问题

$$\begin{cases}-u''=\lambda f(x,u,u')\\ u\in E_1\end{cases} \tag{1.12}$$

的解时，必有$\|u\|\leqslant M$。设当$\lambda\in[0,1]$时，u是边值问题(1.12)的解。先估计$\max\limits_{x\in G}|u(x)|$。设$u(x)$在$x_0$处取到负最小值，则由条件(2)及边值条件(1.2)式易知，必有

$$u'(x_0)=0,u''(x_0)\geqslant 0,$$

并且存在$u(x_0)<\xi<0$，使

$$u''(x_0)=-\lambda f(x_0,u(x_0),0)=-\lambda f_u'(x_0,\xi,0)u(x_0)$$
$$-\lambda f(x_0,0,0).$$

因此，当$\lambda\neq 0$时，有

$$u(x_0)\geqslant-\frac{1}{a}\max_{x\in[0,1]}|f(x,0,0)|.$$

同理可证，若u在x_1处取到正最大值，则有

$$u(x_1)\leqslant\frac{1}{a}\max_{x\in[0,1]}|f(x,0,0,)|.$$

而当$\lambda=0$时边值问题只有零解。因此，

$$|u(x)|\leqslant\frac{1}{a}\max_{x\in[0,1]}|f(x,0,0)|. \tag{1.13}$$

下面再估计$\max\limits_{x\in[0,1]}|u'(x)|$.由条件(4)可得

$$|u''(x)|\leqslant b+|u'(x)|^2\varepsilon(|u'(x)|)\leqslant b+U_1{}^2\varepsilon(U_1),$$

所以，

$$U_2\leqslant b+U_1{}^2\varepsilon(U_1). \tag{1.14}$$

把(1.14)式代入(1.3)式，可得

$$\begin{aligned}U_1&\leqslant 2\sqrt{2}\,U_0{}^{\frac{1}{2}}(b+U_1{}^2\varepsilon(U_1))^{\frac{1}{2}}+2U_0\\&\leqslant 2\sqrt{2}\,b^{\frac{1}{2}}U_0{}^{\frac{1}{2}}+2\sqrt{2}\,U_0{}^{\frac{1}{2}}U_1[\varepsilon(U_1)]^{\frac{1}{2}}+2U_0.\end{aligned} \tag{1.15}$$

由于$\lim\limits_{|p|\to\infty}\varepsilon(|p|)=0$，故存在$p_1>0$，使当$p\geqslant p_1$时

$$2\sqrt{2}\,U_0{}^{\frac{1}{2}}[\varepsilon(|p|)]^{\frac{1}{2}}\leqslant\frac{1}{2}.$$

因此，若$U_1\geqslant p_1$，则由(1.15)式可知

$$U_1\leqslant\frac{1}{2}U_1+2\sqrt{2}\,b^{\frac{1}{2}}U_0{}^{\frac{1}{2}}+2U_0$$

于是

$$U_1\leqslant 2(2\sqrt{2}\,b^{\frac{1}{2}}U_0{}^{\frac{1}{2}}+2U_0).$$

所以必有

$$U_1\leqslant\max\{2(2\sqrt{2}\,b^{\frac{1}{2}}U_0{}^{\frac{1}{2}}+2U_0),p_1\}. \tag{1.16}$$

由(1.13)、(1.16)两式知，必存在$M>0$，使得若$\lambda\in[0,1]$，$u(x)$是边值问题(1.12)的解时，必有$\|u\|\leqslant M$。根据Leray-Schauder原理，边值问题(1.1)、(1.2)必定有解。证完。

注1.3 在定理1.2中，假定了$\alpha_0{}^2+\alpha_1{}^2\neq 0$。这是因为当$\alpha_0{}^2+\alpha_1{}^2\neq 0$时，$-u''=\lambda u$在边界条件(1.2)下的格林函数存在。如果$\alpha_0{}^2+\alpha_1{}^2=0$，则此时边界条件(1.2)为

$$u'(0)=u'(1)=0. \tag{1.17}$$

在这种情况下，$-u''=\lambda u$的格林函数不存在．但是，如果把方程(1.1)改写为

$$-u''+u=f(x,u,u')+u \tag{1.18}$$

的形式，则易知$-u''+u=\lambda u$ 在边界条件(1.17)下的格林函数存在．此时用与定理1.2完全相同的证明可知，边值问题(1.18)、(1.17)（亦即边值问题(1.1)、(1.17)）的解存在．这说明定理1.2中的条件$\alpha_0{}^2+\alpha_1{}^2\neq 0$是可以删掉的．

下面考虑边值条件为

$$u(0)=u(1)=0 \tag{1.19}$$

的情形．

定理 1.4 设存在常数$b_1\geqslant 0$，$b_2\geqslant 0$，$b_3>0$，$\alpha\geqslant 0$，$\beta\geqslant 1$，$\beta>\alpha$，使得

$$\frac{f(x,u,p)}{u}\leqslant b_1+b_2|u|^\alpha-b_3|p|^\beta. \tag{1.20}$$

则边值问题(1.1)、(1.19)至少有一个解．

证 由定理1.2的证明可知，为使边值问题(1.1)、(1.19)有解，只需证明存在$M>0$，使得当$\lambda\in[0,1]$，u 是边值问题

$$\begin{cases}-u''=\lambda f(x,u,u')\\ u(0)=u(1)=0\end{cases} \tag{1.21}$$

的解时，必有$\|u\|\leqslant M$即可．先估计$\max\limits_{x\in G}|u(x)|$．在方程(1.21)两边同乘以$u$，并积分得

$$\int_0^1 u'^2dx=\lambda\int_0^1 f(x,u(x),u'(x))u(x)dx. \tag{1.22}$$

当$\lambda\neq 0$时，由(1.20)、(1.22)两式可得

$$\int_0^1(b_1+b_2|u|^\alpha-b_3|u'|^\beta)u^2dx\geqslant 0. \tag{1.23}$$

设v是连续可微的，$v(0)=0$，则由 Hölder 不等式可以得

到

$$|v(x)| = \left|\int_0^x v'(s)ds\right| \leqslant \int_0^1 |v'(s)|ds$$

$$\leqslant \left(\int_0^1 |v'(s)|^\beta ds\right)^{\frac{1}{\beta}}. \tag{1.24}$$

取$v = |u|^{1+\frac{2}{\beta}}$，则由(1.24)式知有

$$|u|^{1+\frac{2}{\beta}} \leqslant \left(1 + \frac{2}{\beta}\right)\left(\int_0^1 |u'(s)|^\beta |u(s)|^2 ds\right)^{\frac{1}{\beta}},$$

所以

$$\left(\frac{\beta}{\beta+2}\right)^\beta |u|^{2+\beta} \leqslant \int_0^1 |u'(s)|^\beta |u(s)|^2 ds. \tag{1.25}$$

将(1.25)式代入(1.23)式，得

$$b_1 \|u\|_0^2 + b_2 \|u\|_0^{\alpha+2} - b_3\left(\frac{\beta}{\beta+2}\right)^\beta \|u\|_0^{\beta+2} \geqslant 0 \tag{1.26}$$

其中$\|u\|_0 = \|u\|_{c[0,1]}$。由(1.26)式知$\|u\|_0$有界。当$\lambda = 0$时，边值问题(1.21)仅有零解，$\|u\|_0$也是有界的。

下面再估计$\max\limits_{x\in[0,1]}|u'(x)|$。设当$x = x^*$时$|u'(x^*)| = \max\limits_{x\in[0,1]}|u'(x)|$，先设$u'(x^*) > 0$。若$x^* = 0$，令最接近于0的$u'(x)$的零点为$z$（它一定存在），将方程(1.21)两边从0到$z$积分，得

$$u'(0) = \int_0^z f(x, u(x), u'(x))dx.$$

在$(0,z)$上$u(x) > 0$，于是

$$u'(0) \leqslant \int_0^z (b_1 u + b_2 |u|^{\alpha+1} - b_3 |u'|^\beta u)dx$$

$$\leqslant \int_0^z (b_1 u + b_2 |u|^{\alpha+1})dx \leqslant b_1 \|u\|_0 + b_2 \|u\|_0^{\alpha+1}.$$

若$x^* = 1$，用同样的方法可以证明

$$u'(1)\leqslant\int_x^1(b_1u+b_2|u|^{\alpha+1})dx$$

$$\leqslant b_1\|u\|_0+b_2\|u\|_0^{\alpha+1}.$$

若$x^*\in(0,1)$,用同样的方法也可以证明

$$u'(x^*)\leqslant b_1\|u\|_0+b_2\|u\|_0^{\alpha+1}.$$

因此，存在$M_1>0$，使$\|u'\|_0\leqslant M_1$。若$u'(x^*)<0$，也可以证明存在$M_1>0$，使$\|u'\|_0\leqslant M_1$.证完.

附注 与本节内容有关的进一步讨论，可见李正元和钱敏〔1〕.

§2 非线性常微分方程两点边值问题的多重解

本节利用非线性积分方程理论研究常微分方程两点边值问题非平凡解的存在性和个数.

令

$$Lu=-(p(x)u'(x))'+q(x)u(x),\ 0\leqslant x\leqslant 1, \tag{2.1}$$

其中$p(x)\in C^1[0,1]$,$p(x)>0$,$q(x)\in C[0,1]$,$q(x)\geqslant 0$.考察线性Sturm-Liouville问题

$$Lu=\lambda a(x)u,\ 0\leqslant x\leqslant 1, \tag{2.2}$$

$$\alpha_0u(0)+\beta_0u'(0)=0,\ \alpha_1u(1)+\beta_1u'(1)=0, \tag{2.3}$$

其中$a(x)\in C[0,1]$,$a(x)>0$.设$\lambda=0$不是(2.2)、(2.3)的特征值，则根据第一章定理1.4可知，边值问题(2.2)、(2.3)等价于下列线性积分方程

$$u(x)=\lambda\int_0^1 k(x,y)a(y)u(y)dy=\lambda Bu, \tag{2.4}$$

其中Green函数$k(x,y)$的表达式可以写为

$$k(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{W}u(x)v(y),\ 0\leqslant x\leqslant y\leqslant 1,\\ \\ \frac{1}{W}u(y)v(x),\ 0\leqslant y\leqslant x\leqslant 1,\end{cases} \tag{2.5}$$

这里W是一常数，$u(x)$和$v(x)$分别满足

$$Lu=0,u(0)=\beta_0,u'(0)=-\alpha_0, \tag{2.6}$$

$$Lv=0,v(1)=\beta_1,v'(1)=-\alpha_1. \tag{2.7}$$

引理2.1 设$\alpha_0\geqslant 0$，$\beta_0\leqslant 0$，$\alpha_1\geqslant 0$，$\beta_1\geqslant 0$，$\alpha_0{}^2+\beta_0{}^2\neq 0$，$\alpha_1{}^2+\beta_1{}^2\neq 0$．则由(2.4)确定的线性积分算子满足$H$条件（见第五章定义5.1）．

证 根据常微分方程Sturm-Liouvill理论知$k(x,y)\geqslant 0$，并且边值问题(2.2)、(2.3)对应于第一特征值$[r(B)^{-1}]$的特征函数$u_1(x)$满足：$u_1(x)>0$（$\forall x\in(0,1)$）并且若$u_1(0)=0$，则$u_1{}'(0)>0$，若$u_1(1)=0$，则$u_1{}'(1)>0$．利用(2.5)、(2.6)、(2.7)三式容易证明，必存在$\delta>0$，使

$$u_1(x)\geqslant\delta k(x,y),\forall x,\ y\in[0,1]. \tag{2.8}$$

取$g^*(x)=u_1(x)a(x)$，并注意到$k(x,y)=k(y,x)$，有

$$r(B)g^*(x)=\int_0^1 k(y,x)a(x)g^*(y)dy.$$

再由(2.8)式，并注意到$k(x,y)=k(y,x)$，有

$$g^*(y)=a(y)u_1(y)\geqslant\delta k(x,y)a(y)$$

即B满足H条件，证完．

下面考察常微分方程

$$Lu=f(x,u),\quad 0\leqslant x\leqslant 1. \tag{2.9}$$

设$f(x,u)$在$[0,1]\times R$上连续（不要求非负），$f(x,0)\equiv 0$，并存在$b>0$，使

$$f(x,u)\geqslant -b,\ \forall x\in[0,1],u\in R^1;\qquad(2.10)$$

又设存在连续函数$a(x)>0$，$b(x)\geqslant 0$，$c(x)\geqslant 0$及$r>0$，使

$$f(x,u)\geqslant a(x)u-b(x),\ \forall x\in[0,1],u\geqslant 0;\qquad(2.11)$$

$$|f(x,u)|\leqslant c(x)|u|,\ \forall x\in G,|u|\leqslant r;\qquad(2.12)$$

令
$$B_\infty u=\int_0^1 k(x,y)a(y)u(y)dy,$$

$$B_0u=\int_0^1 k(x,y)c(y)u(y)dy.$$

定理2.2 设$\alpha_0\geqslant 0$，$\beta_0\leqslant 0$，$\alpha_1\geqslant 0$，$\beta_1\geqslant 0$，$\alpha_0^2+\beta_0^2\neq 0$，$\alpha_1^2+\beta_1^2\neq 0$.又设(2.10)、(2.11)、(2.12)三式成立，并且$r(B_0)\leqslant 1$，$r(B_\infty)>1$，其中$r(B_0)$和$r(B_\infty)$分别表B_0和B_∞的谱半径. 则边值问题(2.9)、(2.3)至少有一个非平凡解.

证 边值问题(2.9)、(2.3)等价于

$$u(x)=\int_0^1 k(x,y)f(y,u(y))dy=Au(x),\qquad(2.13)$$

其中$k(x,y)$由(2.5)式定义. 由引理2.1并根据第五章定理5.3，即知积分方程(2.13)至少有一非平凡解，即边值问题(2.9)、(2.3)至少有一非平凡解.证完.

推论2.3 设(2.11)、(2.12)两式成立.又设存在$b^*\geqslant 0$，使

$$f(x,u)\geqslant -\frac{b^*}{M},\ x\forall\in[0,1],u\geqslant -b^*,\qquad(2.14)$$

其中$M=\max\limits_{x\in[0,1]}\int_0^1 k(x,y)dy$.又设$r(B_\infty)>1$，$r(B_0)\leqslant 1$，则边值问题(2.9)、(2.3)至少有一非平凡解.

推论2.4 设(2.11)式成立，并存在连续函数$c(x)$及$r>0$，使

$$f(x,u)\leqslant c(x)u,\ \forall x\in[0,1],\ 0\leqslant u\leqslant r,\qquad(2.15)$$

$$f(x,u)\geqslant 0,\forall x\in[0,1],u\geqslant 0. \tag{2.16}$$

又设$r(B_\infty)>1$，$r(B_0)\leqslant 1$ $\left(其中 B_0u=\int_0^1 k(x,y)c(y)u(y)\cdot dy\right)$.则边值问题(2.9)、(2.3)至少有一个正解.

证 推论2.3和推论2.4分别由第五章推论5.4和推论5.6推出.证完.

下面在边值条件

$$u(0)=u(1)=0 \tag{2.17}$$

下讨论方程(2.9)的正解的存在性.

定理 2.5 设$f(x,u)$在$[0,1]\times[0,+\infty)$连续（不要求非负），$f(x,0)\equiv 0$.设(2.11)、(2.15)两式成立，$r(B_\infty)>1$，$r(B_0)\leqslant 1$,则边值问题(2.19)、(2.17)至少有一正解.

证 令

$$f_1(x,u)=\begin{cases}f(x,u),当u\geqslant 0时,\\0, \qquad 当u<0时;\end{cases} \tag{2.18}$$

$$Lu=f_1(x,u),x\in[0,1]. \tag{2.19}$$

则边值问题(2.19)、(2.17)等价于

$$u(x)=\int_0^1 k(x,y)f_1(y,u(y))dy=A_1u(x). \tag{2.20}$$

由引理2.1及第五章定理5.3的证明知

$$\mathrm{ind}(I-A_1,\infty)=0. \tag{2.21}$$

令$T_r=\{u\in C[0,1]\mid \|u\|<r\}$. 不失一般性，设方程(2.20)在$\partial T_r$上没有解. 下证任给$u\in\partial T_r$，$\lambda>1$，有$A_1u=\lambda u$. 若不然，设存在$u_0\in\partial T_r,\lambda_0>0$，使$A_1u_0=\lambda_0u_0$.则易知必有

$$u_0(x)\geqslant 0,0\leqslant x\leqslant 1 \tag{2.22}$$

(事实上，如果(2.22)式不成立，设$u_0(x)$在x_0处取到最小

值，则$u_0(x_0)<0$，$u_0'(x_0)=0$，$u_0''(x_0)\geqslant 0$.故

$$-(p(x_0)u_0'(x_0))'+q(x_0)u_0(x_0)$$
$$=-p(x_0)u_0''(x_0)-p'(x_0)u_0'(x_0)+q(x_0)u_0(x_0)<0.$$

但另一方面，$-(p(x_0)u_0'(x_0))'+q(x_0)u_0(x)=\lambda_0^{-1}f_1(x_0,u_0(x_0))=0$，产生矛盾）.故

$$\lambda_0 u_0=A_1 u_0=\int_0^1 k(x,y)f_1(y,u_0(y))dy$$

$$=\int_0^1 k(x,y)f(y,u_0(y))dy\leqslant\int_0^1 k(x,y)c(y)u_0(y)dy$$

$$=B_0 u_0. \tag{2.23}$$

由(2.23)式及第五章定理2.1知，必有$r(B_0)\geqslant\lambda_0>1$，此与$r(B_0)\leqslant 1$矛盾，故任给$u\in\partial T_r$，$\lambda>1$有$A_1u\neq\lambda u$.所以

$$\deg(I-A_1,T_r,0)=1. \tag{2.24}$$

由(2.21)、(2.24)两式知，存在$u^*(x)\in C[0,1]$，$u^*(x)\neq 0$，使$u^*=A_1u^*$. 仿(2.22)式的证明，可知$u^*(x)\geqslant 0$. 故u^*必为A的正不动点，即边值问题(2.9)、(2.17)至少有一正解.证完.

定理2.6 设(2.11)式成立. 设存在$r^*>r_1>0$及$d(x)\in C[0,1]$，$d(x)\geqslant 0$，使

$$f(x,u)\geqslant d(x)u,\ \forall x\in[0,1],0\leqslant u\leqslant r_1 \tag{2.25}$$

$$f(x,r^*)<0,\ \forall x\in(0,1). \tag{2.26}$$

又设$r(B_\infty)>0$，$r(B_1)\geqslant 1$ $\left(B_1\text{由}B_1u=\int_0^1 k(x,y)d(y)u(y)dy\text{定义}\right)$.则边值问题(2.9)、(2.17)至少有两个正解.

证 由定理2.5的证明可知，只需证明方程(2.20)有两个非零解即可.显然(2.21)式仍成立.令$T^*=\{u\in C[0,1]\mid \|u\|<r^*\}$.

设存在$u_0\in\partial T^*,\lambda_0\geqslant 1$，使$A_1u_0=\lambda_0u_0$。仿(2.22)式的证明，知$u_0(x)\geqslant 0\ (\forall x\in[0,1])$.由于$\|u_0(x)\|=r^*$,故存在$x_0\in(0,1)$，使$u_0(x_0)=r^*$.由于$u_0(x)$在$x_0$处取到极大值，故$u_0'(x_0)=0$，$u_0''(x_0)\leqslant 0$.所以

$$Lu_0|_{x=x_0}=-p'(x_0)u_0'(x_0)-p(x_0)u_0''(x_0)+q(x_0)u_0(x_0)\geqslant 0.$$

但另一方面，由(2.26)式知又有

$$Lu_0|_{x=x_0}=\lambda_0f_1(x_0,u_0(x_0))=\lambda_0f(x_0,r^*)<0.$$

产生矛盾.因此对任给$u\in\partial T^*,\lambda\geqslant 1$，$A_1u\neq\lambda u$.即

$$\deg(I-A_1,T^*,0)=1. \tag{2.27}$$

令$T_1=\{u\in C[0,1]\,|\,\|u\|<r_1\}$.不失一般性，设$A_1$在$\partial T_1$上没有不动点.由$A_1$定义及(2.25)式知，$A_1$映$\overline{T}_1$入$P=\{\varphi\in C[0,1]\,|\,\varphi(x)\geqslant 0\}$.由拓扑度的保持性知

$$\deg(I-A_1,T_1,0)=\deg(I-A_1,T_1\cap P,0;P) \tag{2.28}$$

由(2.25)式知，对任给$u\in\partial T_1\cap P$，有$A_1u\geqslant B_1u$.由$r(B_1)\geqslant 1$并根据第五章定理2.5知，存在$\varphi^*\in P\setminus\{\theta\}$，使$B_1\varphi^*=r(B_1)\varphi^*\geqslant\varphi^*$.因此，根据第五章推论1.21知

$$\deg(I-A_1,T_1\cap P,0;P)=0. \tag{2.29}$$

由(2.21)、(2.27)、(2.28)、(2.29)四式知，A_1至少有两个非零不动点.证完.

推论2.7 设(2.11)、(2.26)两式成立，$r(B_\infty)>1$，则边值问题(2.9)、(2.17)至少有一个正解.

推论2.8 设(2.25)、(2.26)两式成立，$r(B_1)\geqslant 1$，则边值问题(2.9)、(2.17)至少有一个正解.

证 由定理2.6的证明即知.证完.

考察

$$\begin{cases} -u'' = \sum_{i=1}^{n} a_i(x) u^{\alpha_i}, \ 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \tag{2.30}$$

定理2.9 设$a_i(x)(i=1,2,\cdots,n)$在$[0,1]$上非负、连续，且满足$\sum_{i=1}^{n}\int_0^1 a_i(x)dx < 4$。又设诸$\alpha_i$均为正数，且其中有$\alpha_{i_0} < 1$，$\alpha_{i_1} > 1$，并且$a_{i_0}(x) > 0$，$a_{i_1}(x) > 0 (\forall x \in [0,1])$，则边值问题(2.30)在$C^2[0,1]$中至少有两个正解。

证 边值问题(2.30)等价于

$$u(x) = \int_0^1 k(x,y) f(y, u(y)) dy, \tag{2.31}$$

其中$f(x, u) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x) u^{\alpha_i}$，$k(x,y)$的表达式为(见第一章§1)

$$k(x, y) = \begin{cases} x(1-y), \ 0 \leqslant x \leqslant y \leqslant 1, \\ y(1-x) \quad 0 \leqslant y \leqslant x \leqslant 1. \end{cases} \tag{2.32}$$

令$G_0 = \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$，则当$x \in G_0$时

$$k(x, y) \begin{cases} \geqslant \frac{1}{3}(1-y), \ 当\frac{2}{3} \leqslant y \leqslant 1 时, \\ \geqslant \frac{1}{9} \geqslant \frac{1}{6} y, \quad 当\frac{1}{3} \leqslant y \leqslant \frac{2}{3}时, \\ \geqslant \frac{1}{3} y, \qquad 当 0 \leqslant y \leqslant \frac{1}{3}时. \end{cases}$$

另一方面，对任给$z \in [0,1]$，$y \in [0,1]$，有

$$k(z,y) \leqslant y(1-y) \begin{cases} \leqslant 1-y, \\ \leqslant y, \end{cases}$$

所以

$$k(x, y) \geqslant \frac{1}{6} k(z,y), \ \forall x \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right], y \in [0,1], z \in [0, 1];$$

$$k(x, y) \geqslant \frac{1}{9}, \ \forall x \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right], y \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right].$$

又$M = \max\limits_{0 \leqslant x, y \leqslant 1} k(x,y) = \frac{1}{4}$. 故由第五章定理5.10知，命题的结论成立。证完。

定理2.10 设$a_i(x)(i=1, 2, \cdots, n)$在$[0, 1]$上非负、连续，$0 < \alpha_i < 1$ $(i=1, 2, \cdots, n)$，并存在$1 \leqslant i_0 \leqslant n$，使$a_{i_0}(x) > 0$ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$。则边值问题(2.31)必具有唯一的不恒为零的非负解$u^*(x)$，并且以$[0,1]$上任何不恒为零的非负连续函数$u_0(x)$为初值，作迭代序列

$$u_n(x) = (1-x)\int_0^x y \left\{\sum_{i=1}^n a_i(y)[u_{n-1}(y)]^{\alpha_i}\right\} dy + x\int_x^1 (1-y)\left\{\sum_{i=1}^n a_i(y)[u_{n-1}(y)]^{\alpha_i}\right\} dy \quad (n=1, 2, \cdots),$$

$u_n(x)$必在$[0,1]$上一致收敛于$u^*(x)$。

证 考察由(2.32)式定义的$k(x,y)$，则

$$\int_0^1 k(x, y)dy = \int_0^x y(1-x)dy + \int_x^1 x(1-y)dy = \frac{1}{2}x(1-x).$$

另一方面，对任给$0 < \xi < \eta < 1$，当$\eta \leqslant x \leqslant 1$时

$$\int_\xi^\eta k(x,y)dy = \int_\xi^\eta y(1-x)dy = \frac{1}{2}(\eta+\xi)(\eta-\xi)(1-x) \geqslant \xi(\eta-\xi)(1-x);$$

当$\xi < x < \eta$时

$$\int_\xi^\eta k(x,y)dy \geqslant \int_\xi^\eta \xi(1-\eta)dy = \xi(1-\eta)(\eta-\xi);$$

当 $0\leqslant x\leqslant\xi$ 时

$$\int_\xi^\eta k(x,y)dy=\int_\xi^\eta x(1-y)dy=\frac{1}{2}(2-\xi-\eta)(\eta-\xi)x$$

$$\geqslant(1-\eta)(\eta-\xi)x.$$

因此,

$$\int_\xi^\eta k(x,y)dy\geqslant 2\xi(1-\eta)(\eta-\xi)\int_0^1 k(x,y)dy,$$

$$\forall\, 0\leqslant x\leqslant 1.$$

由此易知第五章定理3.7的条件满足，故由第五章定理3.7知命题成立.证完.

注2.11 用类似的方法可以证明：对边值问题

$$\begin{cases}-u''=\sum_{i=1}^{n}a_i(x)u^{\alpha_i}, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ u(0)=u'(1)=0,\end{cases}\tag{2.33}$$

与定理2.9和定理2.10类似的结论成立（见郭大钧〔21〕）.

下面考虑有无穷多个非平凡解的两点边值问题.

定理2.12 设：（1）$f(x,u)$:〔0,1〕$\times R^1\to R^1$ 满足Caratheodory条件，并存在 $a>0,b>0,p\geqslant 2$，使

$$|f(x,u)|\leqslant a+b|u|^p,\ x\in[0,1],u\in R^1;\tag{2.34}$$

（2）存在 $0\leqslant\tau<\frac{1}{2}$ 及 $M>0$，使

$$\int_0^u f(x,v)dv\leqslant\tau uf(x,u),\ \forall x\in[0,1],|u|\geqslant M;\tag{2.35}$$

（3）对 $x\in$〔0,1〕，一致成立 $\lim\limits_{u\to\infty}\frac{f(x,u)}{u}=+\infty$；

（4）存在 $\varepsilon>0,\delta>0$，使

$$\frac{f(x,u)}{u}\leqslant\frac{1}{\pi^2}-\varepsilon,\ \forall x\in[0,1],\ 0<|u|<\delta,\tag{2.36}$$

（5）对任给$x\in G, u\in R^1$，有$f(x,-u)=-f(x,u)$.

则边值问题

$$\begin{cases} -u''=f(x,u), \\ u(0)=u(1)=0 \end{cases} \tag{2.37}$$

在$C^2[0,1]$中有无穷多个解.

证 边值问题等价于

$$u(x)=\int_0^1 k(x,y)f(y,u(y))dy=Au(x), \tag{2.38}$$

其中$k(x,y)$由(2.32)式确定.由于$k(x,y)$是有无穷多个正特征值$\{n^2\pi^2\}$($n=1,2,\cdots$)的正定核，并满足

$$\int_0^1\int_0^1 |k(x,y)|^p dxdy<+\infty,$$

故由第七章定理4.5知方程(2.38)在L_p中有无穷多个非平凡解.由于A（由(2.38)式定义）映 L_p入$C[0,1]$，故方程(2.38)的一切属于L_p的解均属于$C[0,1]$，从而边值问题(2.37)在$C^2[0,1]$中有无穷多个解.证完.

附注 本节内容选自郭大钧[21]、[24]和孙经先[4].利用积分方程的方法研究非线性常微分方程两点边值问题非平凡解性质的工作还有M.A.Красносельский[4]，M.A.Красносельский 和П.П. Забрейко[1]，郭大钧[25]，孙经先[1]，黄春朝[1]，黄春朝和颜骏[1].

§3 非线性常微分方程两点边值问题特征值理论的全局性定理

本节讨论如下类型的二阶非线性常微分方程两点边值问题

$$-(pu')'+qu=\lambda f(x,u,u'),\ 0\leqslant x\leqslant 1,\qquad (3.1)$$

$$\begin{cases}\alpha_0 u(0)+\beta_0 u'(0)=0\\ \alpha_1 u(1)+\beta_1 u'(1)=0\end{cases}\qquad (3.2)$$

的特征值理论的全局性定理．在本节中，假设

$1°(\alpha_0{}^2+\beta_0{}^2)(\alpha_1{}^2+\beta_1{}^2)\neq 0$；

$2° f(x,\xi,\eta)=a(x)\xi+H(x,\xi,\eta)$，其中$H(x,\xi,\eta)=o((\xi^2+\eta^2)^{\frac{1}{2}})$（当$(\xi,\eta)\to(0,0)$时），并且$H(x,\xi,\eta)$：$[0,1]\times R^1\times R^1\to R^1$连续；

$3° p(x)\in C^1[0,1]$，$p(x)>0\ (\forall x\in[0,1])$，$q(x)\in C[0,1]$，$a(x)\in C[0,1]$，$a(x)>0\ (\forall x\in[0,1]$.)

若$H(x,\xi,\eta)\equiv 0$，则方程(3.1)变成线性方程

$$-(pu')'+qu=\lambda a(x)u.\qquad (3.3)$$

我们先给出线性问题(3.3)、(3.2)的若干性质．令

$$E=\{u\in C^1[0,1]\,|\,u满足边界条件(3.2)\}.$$

则E在$C^1[0,1]$的范数下构成一Banach空间．令

$$S_i=E\cap N_i,\quad S_i{}^+=E\cap N_i{}^+,\quad S_i{}^-=E\cap N_i{}^-,\qquad (3.4)$$

其中N_i和$N_i{}^+$，$N_i{}^-$分别由第六章(3.11)及(3.12)式定义（取$a=0,b=1$）．

引理3.1 在假设1°和3°下，线性边值问题(3.3)、(3.2)存在一列递增的单重特征值：

$$\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_n<\cdots,\quad \lim_{n\to\infty}\lambda_n=+\infty\qquad (3.5)$$

并且对应于λ_n的特征函数$v_n\in S_n$．

这一引理的证明见尤秉礼[1]．

下面假定边值问题(3.3)、(3.2)对应于λ_n的特征函数$v_n\in S_n{}^+$，且$\|v_n\|_1=1$，其中$\|\cdot\|_1$表示E中的范数．

引理3.2 对每一个自然数 i，S_i，S_i^+和S_i^- 都是E中的开集。

证 设$i\geqslant 2$．设$u_0(x)\in S_i^+$．则$u_0(x)$在$(0,1)$中恰有 $i-1$ 一个零点$x_1, x_2, \cdots, x_{i-1}$，满足$|u_0'(x_k)|\neq 0\ (1\leqslant k\leqslant i-1)$．令$r=\min\limits_{1\leqslant k\leqslant i-1}|u_0'(x_k)|$，则$r>0$．令$\hat{x}_1, \hat{x}_2, \cdots, \hat{x}_i$分别是区间$(0,x_1),(x_1,x_2),(x_2,x_3),\cdots,(x_{i-1},1)$中的正最大值点或负最小值点，显然存在$\delta_0>0$，使得当$x\in I_k=(x_k-\delta_0, x_k+\delta_0)$时$|u_0|'(x)|>\frac{r}{2}\ (1\leqslant k\leqslant i-1)$，诸$I_k\ (1\leqslant k\leqslant i-1)$两两互不相交，并且$\hat{x}_j\in\bigcup\limits_{k=1}^{i-1}I_k\ (1\leqslant j\leqslant i)$．令$\alpha$是$|u_0(x)|$在$[0,1]\setminus\bigcup\limits_{k=1}^{i-1}I_k$中的最小值，$\beta=\min\limits_{1\leqslant j\leqslant i}|u_0(\hat{x}_i)|$．下面证明：只要$u\in E$，

$$\|u-u_0\|_1<\delta=\min\left\{\frac{r}{2},\frac{\alpha}{2},\beta\right\}, \tag{3.6}$$

就有$u\in S_i^+$．

事实上，若$u\in E$满足(3.6)式，则

(i)在每一个$I_k\ (1\leqslant k\leqslant i-1)$内，$u(x)$至多有一个零点．若不然，设$u(x)$在$I_k$中有多于一个的零点，则$u'(x)$在$I_k$中至少有一个零点$\overline{x_k}$．于是

$$|u_0'(\overline{x_k})|=|u_0'(\overline{x_k})-u'(\overline{x_k})|\leqslant\|u_0-u_1\|_1<\frac{r}{2}.$$

此与r的定义矛盾．

(ii)对$x\in[0,1]\setminus\bigcup\limits_{k=1}^{i-1}I_k$，有$u(x)\neq 0$．事际上，由$\alpha$定义及(3.6)式可知，当$x\in[0,1]\setminus\bigcup\limits_{k=1}^{i-1}I_k$时有

$$|u(x)| \geqslant |u_0(x)| - |u(x)-u_0(x)| > \alpha - \delta \geqslant \frac{\alpha}{2} > 0 .$$

(iii)$u(x)$在$[\hat{x}_k, \hat{x}_{k+1}]$($1 \leqslant k \leqslant i-1$)中必有零点. 若不然, 则$u(x)$在$[\hat{x}_k, \hat{x}_{k+1}]$中不变号, 而$u_0(\hat{x}_k)$和$u_0(\hat{x}_{k+1})$中必是一正一负, 故$|u(\hat{x}_k)-u_0(\hat{x}_k)|$和$|u(\hat{x}_{k+1})-u_0(\hat{x}_{k+1})|$中必有一个大于$\beta$.但另一方面, 当$x \in [\hat{x}_k, \hat{x}_{k+1}]$时

$$|u(x)-u_0(x)| \leqslant \|u-u_0\|_1 < \delta < \beta.$$

产生矛盾.

由上述(i)、(ii)、(iii)即知, $u \in S_i^+$. 于是S_i^+($i \geqslant 2$)是E中的开集. $i=1$时S_i^+为E中开集的证明是显然的. 同理, S_i^-($i \geqslant 1$)及S_i($i \geqslant 1$)都是E中的开集.证完.

引理3.3 设假设1°～3°成立, $(\bar{\lambda}, \bar{u})$是边值问题(3.1)、(3.2)的解, $\bar{u} \neq \theta$.则

$$\bar{u} \in \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i. \tag{3.7}$$

证 令$q = \bar{\lambda} H(x, \bar{u}, \bar{u}')\bar{u}^{-1}$.由假设3°知$q_1 \in C[0, 1]$. 考察线性问题

$$-(pv')' + (q-q_1)v = \lambda a(x)v. \tag{3.8}$$

显然$(\bar{\lambda}, \bar{u})$是线性边值问题(3.8)、(3.2)的解.故根据引理3.2, 必有某自然数i, 使$u \in S_i$.证完.

设0不是线性边值问题(3.3)、(3.2)的特征值. 根据第一章定理1.4, 非线性边值问题(3.1)、(3.2)等价于下列非线性积分方程:

$$u(x) = \lambda \int_0^1 k(x,y) f(y, u(y), u'(y)) dy = \lambda A u(x), \tag{3.9}$$

其中$k(x,y)$是相应的Green函数．显然，由(3.9)式定义的算子$A: E\to E$全连续，$A\theta=\theta$，A_θ'存在，并且有

$$A_\theta' u(x)=\int_0^1 k(x,y)a(y)u(y)dy. \tag{3.10}$$

由引理3.1知A_θ'存在一列递增的单重特征值序列$\{\lambda_n\}$，满足(3.5)式，并且相应于λ_n的特征函数$v_n\in S_n$．下设$v_n\in S_n^+$，$\|v_n\|_1=1$．

设L是方程(3.9)（亦是边值问题(3.1)、(3.2)）的非平凡解集在$R^1\times E$中的闭包，C_n是L通过(λ_n,θ)的连通分支．按第六章定理3.5定义C_n^+和C_n^-．

定理3.4 设假设1°～3°满足，0不是线性边值问题(3.3)、(3.2)的特征值．则对每一个n，都有

(i)$C_n^+\subset(R^1\times S_n^+)\cup\{(\lambda_n,\ \theta)\}$，并且$C_n^+$在$(R^1\times S_n^+)\cup\{(\lambda_n,\theta)\}$中是无界连通的；

(ii)$C_n^-\subset(R^1\times S_n^-)\cup\{(\lambda_n,\ \theta)\}$，并且$C_n^-$在$(R^1\times S_n^-)\cup\{(\lambda_n,\theta)\}$中是无界连通的．

证 设n固定．由第六章(3.8)式可知：若$(\lambda,\ u)\in C_n$，$(\lambda,\ u)$充分接近$(\lambda_n,\ \theta)$，$u\neq 0$时，有$u=\beta v_n+w$，其中$w=o(|\beta|)$．因为$\beta v_n\in S_n$，S_n是开集，故$u\in S_n$．由此易知当$m\neq n$时，$(\lambda_m,\theta)\notin C_n$．再根据引理3.3即知，$(C_n\setminus\{(\lambda_n,\theta)\})\cap(R^1\times\partial S_n)=\phi$．注意到$C_n$是连通的，故

$$C_n\subset(R^1\times S_n)\cup\{(\lambda_n,\theta)\}. \tag{3.11}$$

用上一段的证明方法还可以证明：若$(\lambda,u)\in C_n^+$，(λ,u)属于(λ_n,θ)的某一邻域U，$u\neq 0$，则有$u\in S_n^+$．因为S_n^+是开集，并注意到(3.11)式，故在U之外，C_n^+不可能同$R^1\times\partial S_n^+$相交．故由C_n^+的连通性知，必有$C_n^+\subset(R^1\times S_n^+)\cup\{(\lambda_n,\ \theta)\}$．同理$C_n^-\subset$

$(R\times S_n^-)\cup\{(\lambda_n,\theta)\}$.所以$C_n^+\cap C_n^-=\{(\lambda_n,\theta)\}$.根据第六章定理3.3，即知本定理的全部结论成立.证完.

注3.5 当$\lambda=0$是线性边值问题(3.3)、(3.2)的特征值时，也可以证明定理3.4的给论成立（见P. H. Rabinowitz〔1〕、〔3〕).

由定理3.4，并注意到$C_n\cap(\{0\}\times E)=\phi$，立即可以得到下列推论：

推论3.6 设假设1°～3°成立，$\lambda_1>0$.又设

4°存在λ的增函数$M(\lambda)$：$R^+\to R^+$，使得若$(\lambda,u)(\lambda>0)$是边值问题(3.1)、(3.2)的解，就有

$$\|u\|_1<M(\lambda). \tag{3.12}$$

则对每一个$\lambda>\lambda_n$，边值问题(3.1)、(3.2)在S_i^+和S_i^-($1\leqslant i\leqslant n$)中各至少有一个特征函数. 于是，对每一个$\lambda>\lambda_n$，边值问题(3.1)、(3.2)至少有$2n$个非平凡解.

为了应用推论3.6，需要对边值问题(3.1)、(3.2)的解进行先验估计，即验证假设4°，为此，建立下面几个引理.

引理3.7 设：(1) $\alpha_0\geqslant 0$，$\beta_0\leqslant 0$，$\alpha_0^2+\beta_0^2\neq 0$，$\alpha_1\geqslant 0$，$\beta_1\geqslant 0$，$\alpha_1^2+\beta_1^2\neq 0$；

(2)存在λ的增函数$M_0(\lambda)$：$R^+\to R^+$，使得若(λ,u) $(\lambda>0)$是边值问题(3.1)、(3.2)的解，就有

$$\|u\|<M_0(\lambda); \tag{3.13}$$

(3)存在λ的增函数$K(\lambda)$：$R^+\to R^+$，使得当$x\in[0,1]$，$|\xi|<M_0(\lambda)$，$|\eta|<+\infty$，$\lambda>0$时有

$$\frac{\lambda H(x,\xi,\eta)}{\xi}\leqslant K(\lambda). \tag{3.14}$$

则存在λ的增函数$M(\lambda)$：$R^+\to R^+$，使(3.12)式成立.

证 设$|u'(x)|$在$x=x^*$处达到最大值.先考察$u'(x^*)>0$的情况。如果$u(x^*)\geqslant 0$，则由$\alpha_1\geqslant 0$，$\beta_1\geqslant 0$，$\alpha_1{}^2+\beta_1{}^2\neq 0$及$\alpha_1 u(1)+\beta_1 u'(1)=0$易知，必存在$z\in(x^*,1]$，使$u'(z)=0$，并且在$(x^*,z)$中$u'(x)$没有零点。将方程(3.1)两端在$(x^*,z)$上积分，得

$$p(x^*)u'(x^*)+\int_{x^*}^{z}q(x)u(x)dx$$
$$=\lambda\int_{x^*}^{z}a(x)u(x)dx+\lambda\int_{x^*}^{z}H(x,u(x),u'(x))dx. \tag{3.15}$$

注意到在(x^*,z)上$u(x)>0$，故利用(3.14)式，由(3.15)式可以推出

$$u'(x^*)<\frac{1}{p}[(A+K(\lambda))\lambda+Q]M_0(\lambda), \tag{3.16}$$

其中$p=\min\limits_{x\in[0,1]}p(x)$，$A=\max\limits_{x\in[0,1]}a(x)$，$Q=\max\limits_{x\in[0,1]}|q(x)|$。若$u(x^*)<0$，也可用同样的方法推出(3.16)式成立。故当$u'(x^*)>0$时，

$$\|u\|_1=\|u\|+\|u'\|<\frac{1}{p}[(A+K(\lambda))\lambda+Q]M_0(\lambda)+M_0(\lambda). \tag{3.17}$$

当$u'(x^*)<0$时，同理亦可证得(3.17)式成立.证完。

为了应用上述引理，需要验证(3.13)式。

引理3.8 设$\lambda=0$不是线性问题(3.3)、(3.2)的特征值。又设存在常数K，使对任给$x\in[0,1]$，$\xi\in R^1$，$\eta\in R^1$，都有

$$|f(x,\xi,\eta)|<K. \tag{3.18}$$

则存在增函数$M_0(\lambda)$，使得$\lambda>0$，(λ,u)是边值问题(3.1)、(3.2)的解，就有(3.13)式成立。

证 由(3.18)式知

$$|u|=\lambda\left|\int_0^1 k(x,y)f(y,u(y),u'(y))dy\right|$$

$$\leqslant \lambda K\cdot\max_{0\leqslant x\leqslant 1}\int_0^1 k(x,y)dy.$$

令$M_0(\lambda)=\lambda K\cdot\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}\int_0^1 k(x,y)dy+1$，即知(3.13)式成立.证完.

引理3.9 设:（1）$\alpha_0\geqslant 0$，$\beta_0\leqslant 0$，$\alpha_0^2+\beta_0^2\neq 0$，$\alpha_1\geqslant 0$，$\beta_1\geqslant 0$，$\alpha_1^2+\beta_1^2\neq 0$；

（2）当$x\in[0,1]$时，$q(x)\geqslant 0$；

（3）存在常数$b>0$，使当$x\in[0,1]$，$|\xi|\geqslant b$，$\lambda>0$时，有

$$\frac{H(x,\xi,0)}{\xi}<-a(x). \tag{3.19}$$

则当$\lambda>0$，(λ,u)是边值问题(3.1)、(3.2)的解的时候，必有

$$\|u\|<b. \tag{3.20}$$

证 设$u(x)$在$\bar{x}$处取到正最大值．如果$\bar{x}\neq 0$，$\bar{x}\neq 1$，则$\bar{x}\in(0,1)$，故

$$u'(\bar{x})=0,\ u''(\bar{x})\leqslant 0) \tag{3.21}$$

如果$\bar{x}=0$，则$\alpha_0=0$，故$\beta_0<0$，且(3.21)式仍成立．同样若$\bar{x}=1$，(3.21)式也成立.于是

$$-p(\bar{x})u''(\bar{x})+q(\bar{x})u(\bar{x})=\lambda[a(\bar{x})u(\bar{x})+H(\bar{x},u(\bar{x}),0)].$$

由于$p(\bar{x})>0$，$q(\bar{x})\geqslant 0$，$\lambda>0$，故$a(\bar{x})u(\bar{x})\geqslant -H(\bar{x},u(\bar{x}),0)$．由假设（3）可知，$u(\bar{x})<b$．同理可证，若$u(x)$在$\tilde{x}$处取到负最小值，则有$u(\tilde{x})>-b$．故(3.20)式成立.证完.

下面考察方程

$$-u''=\lambda f(x,u),\quad 0\leqslant x\leqslant 1. \tag{3.22}$$

在边值条件(3.2)下特征值的性质．边值问题(3.22)、(3.2)等

价于下列Hammerstein型非线性积分方程

$$u(x)=\lambda\int_0^1 k(x,y)f(y,u(y))dy=\lambda Au(x), \tag{3.23}$$

其中Green函数$k(x,\ y)$为（参见第一章§1）

$$k(x,y)=\begin{cases}-\dfrac{1}{\varDelta}(\alpha_0 x-\beta_0)(\alpha_1 y-\alpha_1-\beta_1),0\leqslant x\leqslant y\leqslant 1,\\ -\dfrac{1}{\varDelta}(\alpha_0 y-\beta_0)(\alpha_1 x-\alpha_1-\beta_1),\ 0\leqslant y\leqslant x\leqslant 1,\end{cases} \tag{3.24}$$

$$\varDelta=\begin{vmatrix}\alpha_0 & \beta_0\\ \alpha_1 & \alpha_1+\beta_1\end{vmatrix}\neq 0.$$

定理3.10 设$\varDelta\neq 0$．设$f(x,u)$在$[0,1]\times R$上连续(不要求非负)，$f(x,0)\equiv 0$，$f_u'(x,0)$存在连续，并且

$$\lim_{|u|\to+\infty}\frac{f(x,u)}{|u|}=+\infty\quad（关于x\in[0,1]一致） \tag{3.25}$$

则下列结论成立:

(i)任给$\lambda\neq 0$，$\lambda\neq\lambda_n$，方程(3.22)在边值条件(3.2)下至少有一非零解，其中$\{\lambda_n\}$是线性积分算子$Bu(x)=\int_0^1 k(x,\ y)f_u'(y,0)u(y)dy$的特征值集合;

(ii)若$u_\lambda(x)$是边值问题(3.22)、(3.2)的对应于λ的非零解，则

$$\lim_{|\lambda|\to 0}\|u_\lambda\|_{C[0,1]}=+\infty. \tag{3.26}$$

证 设$\varDelta<0$（$\varDelta>0$证明完全类似）．不失一般性，设$\varDelta=-1$. 又设$\alpha_0\alpha_1\geqslant 0$（$\alpha_0\alpha_1<0$时证明完全类似）. 下面分八种情况讨论:

(1)设$\beta_0\beta_1\neq 0$，且$\alpha_0 x-\beta_0=0$在$[0,\ 1]$中无解. 此时$k(1,y)=-\beta_1(\alpha_0 y-\beta_0)\neq 0$ $(\forall y\in[0,1])$. 根据第五章引理6.11和定理6.10，本定理结论成立.

（2）设$\beta_0\beta_1 \neq 0$，且$\alpha_1 x-\alpha_1-\beta_1=0$在$[0,1]$中无解。此时$k(0,y)=-\beta_0(\alpha_1 y-\alpha_1-\beta_1)\neq 0\ (\forall y\in[0,1])$。根据第五章引理6.11和定理6.10，本定理结论成立。

（3）设$\beta_0\beta_1\neq 0$，方程$\alpha_0 x-\beta_0=0$及$\alpha_1 x-\alpha_1-\beta_1=0$在$[0,1]$中均有解，并且$\frac{\beta_0}{\alpha_0}>\frac{\alpha_1+\beta_1}{\alpha_1}$。取$x_0$使$\frac{\beta_0}{\alpha_0}>x_0>\frac{\alpha_1+\beta_1}{\beta_1}$。则当$y\geqslant x_0$时$y-\frac{\alpha_1+\beta_1}{\alpha_1}>0$，$x_0-\frac{\beta_0}{\alpha_0}<0$，故$\left(x_0-\frac{\beta_0}{\alpha_0}\right)\left(y-\frac{\alpha_1+\beta_1}{\alpha_1}\right)<0$。由$\alpha_0\alpha_1>0$知$(\alpha_0 x_0-\beta_0)(\alpha_1 y-\alpha_1-\beta_1)<0$。同理可证当$y\leqslant x_0$时有$(\alpha_1 x_0-\alpha_1-\beta_1)(\alpha_0 y-\beta_0)<0$。于是$k(x_0,y)<0$。根据第五章引理6.11和定理6.10，本定理结论成立。

（4）设$\beta_0\beta_1\neq 0$，方程$\alpha_0 x-\beta_0=0$及$\alpha_1 x-\alpha_1-\beta_1=0$在$[0,1]$中均有解，并且$\frac{\beta_0}{\alpha_0}<\frac{\alpha_1+\beta_1}{\alpha_1}$，显然$0<\frac{\beta_0}{\alpha_0}<\frac{\alpha_1+\beta_1}{\alpha_1}<1$。由此关系及$\alpha_0\alpha_1>0$知下列不等式成立：

$$\beta_0(\alpha_1+\beta_1)>0,\quad \beta_0\beta_1<0, \tag{3.27}$$

$$\beta_0\alpha_1<\alpha_0\alpha_1+\alpha_0\beta_1. \tag{3.28}$$

由(3.28)式知$(\alpha_0-\beta_0)(\alpha_1+\beta_1)>-\beta_0\beta_1$。注意到(3.27)式，可知$\frac{\alpha_0-\beta_0}{\beta_0}>\frac{-\beta_1}{\alpha_1+\beta_1}$。故存在$m$，使$\frac{\alpha_0-\beta_0}{\beta_0}>m>\frac{-\beta_1}{\alpha_1+\beta_1}$。令

$$\begin{aligned} g(y)&=mk(0,y)+k(1,y)\\ &=[-\beta_0\alpha_1 m-\alpha_0\beta_1]y+[m\beta_0(\alpha_1+\beta_1)+\beta_0\beta_1], \end{aligned} \tag{3.29}$$

则有

$$g(0)=m\beta_0(\alpha_1+\beta_1)+\beta_0\beta_1>\frac{-\beta_1}{\beta_0+\beta_1}\beta_0(\alpha_1+\beta_1)+\beta_0\beta_1$$

$$=0. \tag{3.30}$$

由$\frac{\alpha_0-\beta_0}{\beta_0}>m$ 同乘$\beta_0\beta_1$，并注意(3.27)式中的$\beta_0\beta_1<0$，可得$(\alpha_0-\beta_0)\beta_1<m\beta_0\beta_1$. 故

$$g(1)=\beta_0\beta_1 m-(\alpha_0-\beta_0)\beta_1>0. \tag{3.31}$$

注意到$g(y)$是y的一次函数，故由(3.30)、(3.31)两式知 $g(y)>0$ ($\forall\ 0\leqslant y\leqslant 1$)，即 $mk(0,y)+k(1,y)>0$. 根据第五章引理6.11和定理6.10，本定理结论成立。

(5)设$\beta_0=0$, $\alpha_0>0$, $\alpha_1\geqslant 0$, $\beta_1\geqslant 0$. 此时对$x\in[0,1]$，有$\alpha_1 x-\alpha_1-\beta_1\leqslant 0$. 由于$\alpha_1,\beta_1$不同时为0（否则$\varDelta=0$），故易知存在$G_1=[\alpha,\ \beta]\subset(0,\ 1)$及 $r>0$，使$|\alpha_1 x-\alpha_1-\beta_1|\geqslant r$对$x\in G_1$成立。不失一般性，取$\alpha_0=1$. 令

$$h(x)=\begin{cases}-1, & x\in G_1,\\ 0, & x\in[0,1]\backslash G_1.\end{cases}$$

令$m=\max\limits_{y\in[0,1]}|\alpha_1 y-\alpha_1-\beta_1|$，$M=\max\limits_{(x,y)\in[0,1]\times[0,1]}|k(x,y)|$，取

$$\delta=\min\left\{\frac{r(\beta-\alpha)}{m},\frac{r\alpha(\beta-\alpha)}{M},\frac{1}{2}(\beta^2-\alpha^2)\right\}$$

通过计算即可知（详细计算过程见孙经先[1]）

$$\int_0^1 h(x)k(x,y)dx\geqslant 0 \quad (\forall y\in[0,1]), \tag{3.32}$$

$$\int_0^1 h(x)k(x,y)dx>0 \quad (\forall y\in G_1), \tag{3.33}$$

$$\int_{G_1} h(x)k(x,y)dx\geqslant\delta|k(\tau,y)| \quad (\forall\tau,y\in[0,1]). \tag{3.34}$$

根据第五章定理6.12，本定理结论成立。

(6)设$\beta_0=0$，$\alpha_0>0$，$\alpha_1\geqslant 0$，$\beta_1<0$．不失一般性，取$\alpha_0=1$，取α,β，使$\max\left\{0,\dfrac{\alpha_1+\beta_1}{\alpha_1}\right\}<\alpha<\beta<1$（若$\alpha_1=0$，取$0<\alpha<\beta<1$），则易知当$\max\left\{0,\dfrac{\alpha_1+\beta_1}{\alpha_1}\right\}\leqslant x\leqslant 1$时，$\alpha_1x-\alpha_1-\beta_1\geqslant 0$．故存在$r>0$，使当$x\in G_1=[\alpha,\beta]$时，$\alpha_1x-\alpha_1-\beta_1\geqslant r$．取$\delta=\min\left\{\dfrac{r(\beta-\alpha)}{m},\dfrac{r\alpha(\beta-\alpha)}{M},\dfrac{r(\beta^2-\alpha^2)}{2M}\right\}$．

$$h(x)=\begin{cases}1，当x\in G_1时，\\0\quad 当x\in[0,1]\backslash G_1时，\end{cases}$$

则通过计算知(3.32)、(3.33)、(3.34)三式仍成立．故定理结论成立．

(7)设$\beta_0=0$，$\alpha_0<0$，$\alpha_1<0$．此时用$-\alpha_0$代替α_0，用$-\alpha_1$，$-\beta_1$分别代替α_1，β_1，边值条件(3.2)不变，问题转化为已经讨论过的(5)、(6)两种情况．

(8)设$\beta_1=0$．此时证明完全仿$\beta_0=0$的情况，不再详述．至此定理全部证完．

下面设：

1*$\alpha_0\geqslant 0$，$\beta_0\leqslant 0$，$\alpha_1\geqslant 0$，$\beta_1\geqslant 0$，$\Delta\neq 0$；

2*$f(x,u)=a(x)u+H(x,u)$，其中$a(x)\in C[0,1]$，$a(x)>0$（$\forall x\in[0,1]$，$H(x,u)$在$[0,1]\times R^1$上连续，$H(x,u)=o(|u|)$（$|u|)\to 0$时）．

用L_0和L_1分别表示边值问题(3.22)、(3.2)的非平凡解集在$R^1\times C[0,1]$和$R^1\times C^1[0,1]$中的闭包．显然，作为集合来说，$L_0=L_1$．因此，在集合意义下可以把L_0和L_1都记为L．

引理3.11 设M是L的子集．则

(i)M在$R^1\times C[0,1]$中是闭集的充要条件是：M在$R^1\times C^1[0,1]$中是闭集；

(ii)M在$R^1\times C[0,1]$中是L_0的连通子集的充要条件是：M在$R^1\times C^1[0,1]$中是L_1的连通子集；

(iii)M在$R^1\times C[0,1]$中是无界集的充要条件是：M在$R^1\times C^1[0,1]$中无界.

证 先证结论(i). 必要性显然，下证充分性.设$(\lambda_n, u_n)\in M$，$\lambda_n\to\lambda_0$，$u_n\xrightarrow{C[0,1]}u_0$. 则$f(x,u_n(x))\xrightarrow{C[0,1]}f(x,u_0(x))$. 由于$(\lambda_n,u_n)$，$(\lambda_0,u_0)$都是方程(3.22)的解，故$u_n''(x)\xrightarrow{C[0,1]}u_0''(x)$. 根据引理1.1，

$$\|u_n-u_0\|_{C^1[0,1]}\leqslant 2\sqrt{2}\|u_n-u_0\|^{\frac{1}{2}}_{C[0,1]}\|u_n''-u_0''\|^{\frac{1}{2}}_{C[0,1]}+3\|u_n-u_0\|_{C[0,1]}.$$

故$u_n\xrightarrow{C^1[0,1]}u_0$. 由于$M$在$R^1\times C^1[0,1]$中闭，故$(\lambda_0,\varphi_0)\in M$. 结论(i)获证. 由结论(i)及连通性的定义易知结论(ii)成立. 仿(i)的证明，可以证明结论(iii)成立.证完.

设$\{\lambda_n\}$是A_θ'（由(3.10)式定义）的递增单重特征值序列. 利用定理3.4和引理3.11立即可知

定理3.12 设$\Delta\neq 0$，假设2*成立. 则无论是在空间$R^1\times C^1[0,1]$中，还是在空间$R^1\times C[0,1]$中，定理3.4的结论(i)、(iii)都是成立的.

假设1*、2*满足. 由1*知$k(x,y)\geqslant 0$，故诸λ_n均是正的.

定理3.13 如果假设1*、2*满足. 又设存在$[\alpha,\beta]\subset(0,1)$，使对$x\in[\alpha,\beta]$一致有

$$\lim_{u\to+\infty}f(x,u)=+\infty, \tag{3.35}$$

并且在$[0,1]\times R^1$上$f(x,u)$下方有界．则

(i)对每一个$n\geqslant 2$，当$\lambda>\lambda_n$时，$C_n^+\cap(\{\lambda\}\times S_n^+)\neq\phi$；

(ii)对每一个$n\geqslant 1$，当$\lambda>\lambda_n$时，$C_n^-\cap(\{\lambda\}\times S_n^-)\neq\phi$．从而对每一个$n\geqslant 1$，当$\lambda>\lambda_n$时，边值问题(3.22)、(3.2)至少有$2n-1$个非平凡解．

证 首先证明存在$\delta>0$，使

$$k(x,y)\geqslant\delta k(\tau,y),\quad \forall x\in[\alpha,\beta],y,\tau\in[0,1] \qquad (3.36)$$

由1*知$\Delta>0$．不失一般性，设$\Delta=1$．由$[\alpha,\beta]\subset(0,1)$知，存在$r_1>0$，$r_2>0$，使当$x\in[\alpha,\beta]$时，$\alpha_0x-\beta_0\geqslant r_1$，$\alpha_1+\beta_1-\alpha_1x\geqslant r_2$．取$m_1=\max\limits_{x\in[0,1]}(\alpha_0x-\beta_0)$，$m_2=\max\limits_{x\in[0,1]}(\alpha_1+\beta_1-\alpha_1x)$，$\delta=\min\left\{\dfrac{r_2}{m_2},\dfrac{r_1}{m_1},\ 1\right\}$．任给$x\in[\alpha,\beta]$，$\tau\in[0,1]$．设$\tau\geqslant x$．若$y\leqslant x$，则$y\leqslant x\leqslant\tau$，故

$$\begin{aligned}k(x,y)&=(\alpha_0y-\beta_0)(\alpha_1+\beta_1-\alpha_1x)\\&\geqslant(\alpha_0y-\beta_0)(\alpha_1+\beta_1-\alpha_1\tau)\\&=k(\tau,y)\geqslant\delta k(\tau,y).\end{aligned}$$

若$y\geqslant x$，$y\geqslant\tau$，则

$$\begin{aligned}k(x,y)&=(\alpha_0x-\beta_0)(\alpha_1+\beta_1-\alpha_1y)\geqslant r_1(\alpha_1+\beta_1-\alpha_1y)\\&\geqslant\delta m_1(\alpha_1+\beta_1-\alpha_1y)\geqslant\delta(\alpha_0\tau-\beta_0)(\alpha_1+\beta_1-\alpha_1y)\\&=\delta k(\tau,y).\end{aligned}$$

若$y\geqslant x$，$\tau\geqslant y$，则

$$\begin{aligned}k(x,y)&=(\alpha_0x-\beta_0)(\alpha_1+\beta_1-\alpha_1y)\\&\geqslant(\alpha_0x-\beta)(\alpha_1+\beta_1-\alpha_1\tau)\geqslant r_1(\alpha_1+\beta_1-\alpha_1\tau)\\&\geqslant\delta m_1(\alpha_1+\beta_1-\alpha_1\tau)\geqslant\delta(\alpha_0y-\beta_0)(\alpha_1+\beta_1\\&\quad-\alpha_1\tau)=\delta k(\tau,y).\end{aligned}$$

故(3.36)式成立．同理，当$x\geqslant\tau$时(3.36)也成立，因为$k(x,$

y)是对称核，故对任给$y\in[\alpha,\beta]$，$x,\tau\in[0,1]$，有

$$k(x,y)=k(y,x)\geqslant\delta k(\tau,x)=\delta k(x,\tau) \tag{3.37}$$

由(3.36)、(3.37)两式，使用第六章定理3.12的证明方法，并利用本章定理3.12，即知本定理所述结论成立.证完.

定理3.14 在定理3.13中，若将(3.35)式加强为

$$\lim_{u\to+\infty}\frac{f(x,u)}{u}=+\infty\ (\text{对}x\in[\alpha,\beta]\text{一致成立}). \tag{3.38}$$

则除定理3.13的全部结论成立外，还有

(iii)对任给$0<\lambda<\lambda_1$，边值问题(3.22)、(3.2)在S_1^+中至少有一个解.

证 由1*及(3.24)式知，对任给$x\in[\alpha,\beta]$，$k(x,y)>0$. 故

$$\int_\alpha^\beta k(x,y)dx>0\ ,\ \forall y\in[\alpha,\beta] \tag{3.39}$$

利用第六章定理3.14的证明方法，并利用本章定理3.12，即知本定理所述命题成立.证完.

附注 关于非线性常微分方程两点边值问题特征值理论全局性定理的研究在J.H.Wolkowisky[1],M.G.Crandall和P.H.Rabinowitz[2],P.H.Rabinowitz[1]、[3]中就开始了. 定理3.4及推论3.6见P.H.Rabinowitz[1]、[3].

定理3.10是孙经先[1]中证明的. 定理3.12、定理3.13及定理3.14见孙经先[8]、[10].

与常微分方程两点边值问题类似，椭圆型偏微分方程边值问题也可以归结为非线性积分方程的研究，这一方面有众多的文献. 由于利用非线性积分方程讨论椭圆型偏微分方程边值问题，不可避免地要涉及复杂的先验估计，故本书没有讨论这一问题，有兴趣的读者，可以参阅下列文献：H. Amann[1],

A.Ambrosetii和P.H.Rabinowitz〔1〕,D.G.de Figueiredo〔1〕,D.G.de Figueiredo、P.L.Lions和R.D. Nussbaum〔1〕,P.L.Lions〔1〕,张恭庆〔1〕、〔2〕、〔3〕等.

§4 物理和其它自然科学领域中出现的非线性积分方程

在物理和其它自然科学领域中出现的许多问题，都可以归结为非线性积分方程的研究.

1.中子迁移理论中出现的非线性积分方程

考虑位于两平面$x=-a$和 $x=a$ 之间的无限长板式核反应堆. 中子迁移理论中出现下列的非线性积分微分方程

$$\mu\frac{\partial u}{\partial x}-\sigma u+\frac{c\sigma}{2}\int_{-1}^{1}u(x,\mu_1)d\mu_1$$

$$=\sigma F\left(\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}u(x,\mu_1)d\mu_1\right), \tag{4.1}$$

其中$F(z)=\sum_{k=2}^{N}c_k[(1-z)^k-1+kz]$，$c_k\geqslant 0$，$\sum_{k=0}^{N}c_k=1$，$\sum_{k=1}^{N}kc_k=c$，$c_1$，$c_3$，…，$c_N$中至少有一个不为0. 边界条件为

$$u(a,\mu)=0\text{，当}\mu>0\text{时；}u(a,-\mu)=0\text{，当}\mu<0\text{时.} \tag{4.2}$$

方程(4.1)的解$u(x,\mu)$代表在点x处沿方向l($\mu=\cos(l,x)$)将一中子注入此核反应堆后能产生持续链式反应的概率；在方程(4.1)中，c表示一中子和反应堆中一原子核相碰撞所出现的中子的平均数字，c_0表示碰撞时该中子被俘获的概率，c_k($1\leqslant k\leqslant N$)表示碰撞后出现k个中子的概率，σ^{-1} 表示两次碰撞间中

子的平均自由程。

令 $\varphi(x)=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}u(x,\mu_1)d\mu_1$，$G(z)=cz-F(z)$，$E(z)=\frac{\sigma}{2}\int_{\sigma}^{+\infty}\frac{e^{-tz}}{t}dt$，则问题(4.1)、(4.2)等价于下列 Hammerstein型积分方程

$$\varphi(x)=\int_{-a}^{a}E(|x-y|)G(\varphi(y))dy=A\varphi(x). \qquad (4.3)$$

令c^*是由$E(|x-y|)$生成的线性积分算子

$$B\varphi=\int_{-a}^{a}E(|x-y|)\varphi(y)dy \qquad (4.4)$$

的最小正特征值，ψ^*是B对应于 c^*的（唯一）非负就范特征函数。

A.Pazy和P.H. Rabinowitz在〔1〕、〔2〕中，郭大钧在〔10〕、〔26〕中研究了上述方程，获得了下列结论：

(i)若 $0<c\leqslant c^*$，则方程(4.3)在$D=\{\varphi\in C[-a,a]\mid 0\leqslant\varphi(x)\leqslant 1\}$中只有零解，从而问题(4.1)、(4.2)只有零解；

(ii)若$c>c^*$，则方程(4.3)在D中必有唯一的非零解φ^*，$0<\varphi^*(x)<1$，$\varphi^*(-x)=\varphi^*(x)(\forall -a\leqslant x\leqslant a)$，从而问题(4.1)、(4.2)具有唯一的非零解，$u^*(x,\mu)$，满足 $0<u^*(x,\mu)<1$，$u^*(x,\mu)=u^*(-x,-\mu)(-a\leqslant x\leqslant a,-1\leqslant\mu\leqslant 1)$；

(iii)c^*是a的严格连续减函数，并且

$$\lim_{a\to 0^+}c^*=+\infty,\ \lim_{a\to\infty}c^*=1;$$

(iv)当$c>c^*$，$\bar{a}\to a$时，必有$\|\overline{\varphi^*}-\varphi^*\|_C\to 0$，其中$\overline{\varphi^*}$表示方程

$$\overline{\varphi}(x)=\int_{-\bar{a}}^{\bar{a}}E(|x-y|)G(\overline{\varphi}(y))dy$$

的唯一的满足 $0<\overline{\varphi}^*(x)<1$的连续解，范数$\|\overline{\varphi^*}-\varphi^*\|_C$是在空

间$C[-a^*, a^*]$中取的，$a^*=\min\{a, \bar{a}\}$；并且当$a<\bar{a}$时，$\varphi^*(x)<\overline{\varphi^*}(x)(\forall -a\leqslant x\leqslant a)$。从而对问题(4.1)、(4.2)，相对应的结论成立。

上述结论的证明和物理意义的叙述，见郭大钧〔1〕、〔10〕。关于中子迁移方程的线性情况，已有许多研究，见田方增〔1〕，林群〔1〕，朱广田和林群〔1〕、〔2〕。

2.核物理中出现的一个非线性积分方程

非线性积分方程

$$1=\psi(x)+\psi(x)\int_0^1\frac{R(x,y)}{x^2-y^2}\psi(y)dy, x\in[0,1]. \quad (4.5)$$

出现于核物理的研究中。人们所关心的是方程(4.5)满足$0<\psi(x)\leqslant 1$的解，因为只有这样的解有物理意义。

利用代换

$$\varphi(x)=\frac{1}{\psi(x)}-1, \quad (4.6)$$

可知求方程(4.5)的满足于$0<\psi(x)\leqslant 1$的解，等价于求Hammerstein型积分方程

$$\varphi(x)=\int_0^1\frac{R(x,y)}{x^2-y^2}\cdot\frac{1}{1+\varphi(y)}dy \quad (4.7)$$

的满足$\varphi(x)\geqslant 0$的解。通过研究方程(4.7)，郭大钧〔9〕，郭大钧和张庆雍〔1〕中，得到下列结论：

设$R(x,y)$在$[0,1]\times[0,1]$上连续，且当$x>y$时$R(x,y)\geqslant 0$，当$x<y$时$R(x,y)\leqslant 0$，并且存在$\nu>0$，$C>0$及$[0,1]\times[0,1]$上的满足

$$\overline{\lim_{x,y\to 0^+}}\frac{S(x+y)}{x+y}<+\infty$$

的非负有界函数$S(x,y)$，使

$$|R(x,y)|\leqslant C|x-y|^{\nu}S(x,y),$$

则方程(4.5)在$C[0,1]$中满足$\psi(x)>0$的解存在并且唯一．用$\psi^*(x)$表此唯一解，则必有$0<\psi^*(x)\leqslant 1$，并且对$C[0,1]$中任给满足$|<\psi_0(x)\leqslant 1$的函数$\psi_0(x)$，作迭代序列

$$\psi_{n+1}(x)=\left[1+\int_0^1 \frac{R(x,y)}{x^2-y^2}\psi_n(y)\,dy\right]^{-1}(n=1,2,\cdots),$$

都有$\lim\limits_{n\to\infty}\|\psi_n-\psi^*\|=0$．

关于方程(4.5)的其它研究，见C.A.Stuart[3]，R.W.Leggett[1]．

3.辐射传输理论和气体动力学中出现的非线性积分方程

在辐传输理论和气体动力学研究中，出现下列方程

$$H(t)=1+H(t)\int_0^1 \frac{t}{t+s}\psi(s)H(s)ds, \qquad (4.8)$$

其中$H(t)$是未知函数．

C.A.Stuart[2]中证明了下列结论：若$\psi(t)$在$[0,1]$上非负、有界可测，并且

$$\int_0^1 \psi(t)dt\leqslant\frac{1}{2}. \qquad (4.9)$$

则方程(4.8)在$[0,1]$上至少有一连续解$H^*(t)\geqslant 1$，并且迭代序列

$$h_0(t)\equiv 1,$$
$$h_n(t)=1+h_{n-1}(t)\int_0^1 \frac{t}{t+s}\psi(s)h_{n-1}(s)ds$$

$(n=1,2,\cdots)$在$[0,1]$上一致收敛于$H^*(t)$．

白锦东[5]证明了，若存在$r>0$，使

$$\psi(x)\geqslant r,\ \int_0^1 \psi(t)dt<\frac{1}{2},$$

则方程(4.8)在L_1中有并且仅有两个不同的非负解．

潘兴斌[4]中证明了：若$\psi(t)$在G上非负有界可测，则

(i)方程(4.8)有连续正解的充要条件是(4.9)式成立，此时方程至多有两个连续正解；

(ii)方程(4.8)恰好有两个不同的连续正解的充要条件是：

$$\int_0^1 \psi(t)dt<\frac{1}{2},\ \int_0^1 \frac{\psi(t)}{1-t^2}dt>\frac{1}{2}.$$

4.传染病模型的非线性积分方程

某些传染病蔓延的数学模型，是下列非线性积分方程

$$x(t)=\int_{t-\tau}^{t} f(s,x(s))ds, \tag{4.10}$$

其中，$x(t)$代表在时刻t人口患该传染病者的比率，$f(t,x(t))$代表单位时间内新增加的患该传染病者的比率($f(t,0)=0$)，τ代表个体保持被传染的时间长度，对于$f(t,x)$，有下列假定：当$t\in R^1$，$x\geqslant 0$时$f(t,x)$非负连续，并且$f(t+w,x)=f(t,x)$，$w>0$．人们关心的是方程(4.10)正连续周期解的存在性和个数．

关于方程(4.10)解的存在性，郭大钧〔32〕证明了：如果存在$0<a<R$以及R^1上周期为w的非负连续函数$b(t)$，使得

$$f(t,x)\leqslant\frac{R}{\tau},\ \forall t\in[0,w],\ x\in[0,R],$$

$$f(t,x)\geqslant b(t),\ \forall t\in[0,w],\ a\leqslant x\leqslant R,$$

$$\min_{t\in[0,1]}\int_{t-\tau}^{t} b(s)ds\geqslant a;$$

并且极限

$$a(t)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(t,x)}{x}$$

存在，则方程(4.10)至少有一个周期为w的正连续解$x^*(t)$，满足

$$a \leqslant \inf_{t \in R^1} x^*(t) \leqslant \sup_{t \in R^1} x^*(t) \leqslant R.$$

关于方程(4.10)解的个数，郭大钧[32]证明了：若存在 $\mu > \tau$ 及 $R > r > 0$，使

$$f(t,x) < \frac{1}{u} x, \ \forall t \in R^1, \ 0 < x \leqslant r \text{或} x \geqslant R,$$

并且存在 $a > 0$ 及 R^1 上的非负连续函数 $b(t)$，使

$$f(t,x) \geqslant b(t), \ \forall t \in [0,w], x \geqslant a,$$

$$\min_{t \in [0,1]} \int_{t-\tau}^{t} b(s)ds > a.$$

则方程(4.10)至少有两个周期为 w 的正连续解 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$，并且 $\inf_{t \in R^1} x_1(t) > a$。

5.化学反应理论中出现的两个积分方程

在化学反应理论的研究中，导出了下面两个常微分方程边值问题：

$$\begin{cases} \beta x''(t) - x'(t) + pf(x(t)) = 0, \ 0 \leqslant t \leqslant 1, \\ \beta x'(0) - x(0) = 0, x'(1) = 0; \end{cases} \tag{4.11}$$

$$\begin{cases} x''(t) + \frac{1}{t} x'(t) + f_1(x(t)) = 0, \ 0 < t < 1, \\ x'(0) = x(1) = 0; \end{cases} \tag{4.12}$$

其中 $\beta > 0$，$p > 0$，$f(x)$ 和 $f_1(x)$ 分别是

$$f(x) = (q - x)\exp\left(-\frac{k}{1+x}\right), k > 0, q > 0, \tag{4.13}$$

$$f_1(x) = \beta_1 \exp\left(-\frac{1}{x+\tau}\right), \beta_1 > 0, \tau \geqslant 0. \tag{4.14}$$

方程(4.11)和方程(4.12)的解分别都表示相应的化学反应的稳定状态。

先考虑方程(4.11)。它等价于Hammerstein型积分方程

$$x(t)=\int_0^1 G(t,s)pf(x(s))ds, \tag{4.15}$$

其中

$$G(t,\ s)=\begin{cases}\exp\left(\dfrac{1-s}{\beta}\right), & 0\leqslant t\leqslant s\leqslant 1,\\ 1, & 0\leqslant s\leqslant t\leqslant 1.\end{cases}$$

由常微分方程强极值原理知边值问题(4.11)，从而积分方程(4.15)的一切解都满足 $0\leqslant x(t)\leqslant q(0\leqslant t\leqslant 1)$.

D.S.Cohen指出，当$k\leqslant 4+\dfrac{4}{q}$时，积分方程(4.15)存在，并且只存在唯一解，从而边值问题(4.11)存在，并且只存在唯一解.

当 $k>4+\dfrac{4}{q}$时，令

$$r_1=\frac{1}{2k+2q}\{kq-2q-[kq(kq-4q-4)]^{\frac{1}{2}}\},$$

$$r_2=\frac{1}{2k+2q}\{kq-2q+[kq(kq-4q-4)]^{\frac{1}{2}}\},$$

$$r_0=\frac{1}{2}[(4k+k^2+2kq)^{\frac{1}{2}}-2-k],$$

设β_0和β_1分别满足

$$\frac{r_1}{f(r_1)}=r_2[f(r_2e^{\frac{1}{\beta_0}})]^{-1},$$

$$qe^{-k}=(q-r_2e^{\frac{1}{\beta_1}})\exp[-k(1+r_2e^{\frac{1}{\beta_1}})^{-1}].$$

令 $\quad p_0=r_1[\beta_0(1-e^{-\frac{1}{\beta_0}})f(r_1)]^{-1}.$

R. W. Leggett和L. R. Williams在[3]中证明了，若$k>4+\dfrac{4}{q}$，并且下列条件之一成立:

（1）$p \leqslant \frac{r_2}{f(r_2)}$；

（2）$\frac{r_1}{f(r_1)} < p < p_0$，$\beta(1-e^{-\frac{1}{\beta}}) \geqslant \frac{r_1}{pf(r_1)}$；

（3）$p \geqslant p_1$，$\beta(1-e^{-\frac{1}{\beta}})f(r_2 e^{\frac{1}{\beta}}) \geqslant \frac{r_2}{p}$；

（4）$\beta \geqslant \beta_1$，$p \geqslant e^k$；

（5）$\beta < \beta_1$，$p \geqslant \beta_1 \beta^{-1} e^k$；

（6）$p < \frac{r_1}{f(r_1)}$，$\beta(1-e^{-\frac{1}{\beta}}) < \frac{r_1}{pf(r_0)}$，并且

$$\beta \leqslant [r_1 - pf(r_1)]\{pf(r_0) + pf(r_1)[-1 + \ln f(r_1) - \ln f(x_0)]\}^{-1};$$

则积分方程(4.15)的解存在唯一，从而边值问题(4.11)的解存在唯一。

R.W.Leggett和L.R.Williams在〔2〕〔3〕中还讨论了边值问题(4.11)至少有两个解和至少有三个解的情况。

再考察边值问题(4.12)。它等价于Hammerstein 型积分方程

$$x(t) = \int_0^1 G_1(t,s) f_1(x(s)) ds, \qquad (4.16)$$

其中Green函数$G_1(t,s)$是

$$G_1(t,s) = \begin{cases} -\sin s, & 0 \leqslant t \leqslant s \leqslant 1, \\ -\sin t, & 0 \leqslant s < t \leqslant 1. \end{cases}$$

R. W. Leggett和L. R. Williams〔2〕证明了：如果$0 \leqslant \tau \leqslant \frac{1}{4}$，并且

$$\beta_1 \leqslant 2\left[1-2\tau-(1-4\tau)^{\frac{1}{2}}\right]\exp\left[\frac{2}{1-(1-4\tau)^{\frac{1}{2}}}\right],$$

$$\beta \geqslant 2e\left[1-2\tau+(1-4\tau)^{\frac{1}{2}}\right]\left\{\exp\left[\frac{-2}{1+(1+4\tau)^{\frac{1}{2}}}\right]\right.$$

$$\left.+(e-2)\exp\left(-\frac{1}{\tau}\right)\right\}^{-1}$$

（当$\tau=0$时$\beta \geqslant 4e^2$即可），则积分方程(4.16)至少有三个解，从而边值问题(4.12)至少有三个解.

6.流体动力学中出现的一个积分方程

在流体动力学的研究中，出现了下列非线性积分方程

$$\theta(\varphi)=\mu\int_{-\pi}^{\pi}k(\varphi,s)\left[1+\mu\int_{0}^{\varphi}\sin\theta(s)ds\right]^{-1}\sin\theta(s)ds, \tag{4.17}$$

其中$\theta(s)$是未知函数，μ是参数，

$$k(\varphi,\ s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\varphi \sin ns}{3n\pi}$$

关于这一方程，引起了人们的广泛的注意，出现了一系列的研究文献，这一方程的实际背景和研究概况的综合评述，可见D.H.Hyers的一篇综合报告（见P.M.Anselone〔1〕p319～344）.

7.热传导理论中的一个积分方程

在研究一类热传导问题时，导出了下列积分方程

$$u(t)=\int_0^t\frac{G(u(s))}{\sqrt{\pi(t-s)}}ds, \tag{4.18}$$

其中未知函数$u(t)$表示t时刻的温度，$G(u)$是u的连续减函数，$G(1)=0$. 在热传导问题中的某些情况下，$G(u)$可以更明确地表达为

$$G(u)=C\left[(a+1)^4-(a+u)^4\right], \tag{4.19}$$

其中C,a均为常数。

由于在导出方程(4.18)的时候，已经将温度“标准化”（即把温度下限定为0，温度上限定为1）。故我们关心的是方程(4.18)满足$0\leqslant u(x)\leqslant 1$的解。

设$G(u)$在$0\leqslant u\leqslant 1$时满足 Lipschitz 条件（由(4.19)式确定的$G(u)$就满足这一条件），令

$$G^*(u)=\begin{cases}G(0), & u<0\text{ 时},\\ G(u), & 0\leqslant u\leqslant 1\text{ 时},\\ G(1), & u\geqslant 1\text{ 时}.\end{cases}$$

令$v_0(t)\equiv 0$，

$$v_n(t)=\int_0^t \frac{G^*(v_{n-1}(s))}{\sqrt{\pi(t-s)}}ds \quad (n=1,2,\cdots).$$

则可以证明（见T. L. Saaty〔1〕）：必存在$u^*(t)$，$u^*(t)$在〔0，+∞)上连续，$0\leqslant u^*(t)\leqslant 1$，使得对任给$T>0$，$v_n(t)$都在〔0，$T$〕上一致收敛于$u^*(t)$，并且$u^*(t)$是方程(4.18)的解。

8.其它例子

非线性积分方程还出现在物理和其它自然科学领域中的许多方面，例如，在摆的强迫振动的研究中，导出

$$\varphi(t)=-\int_0^1 k(t,s)[F(s)-a^2\sin\varphi(s)]ds, \tag{4.20}$$

其中$\varphi(t)$是未知函数，$F(s)$是已知函数，$k(t,s)$为

$$k(t,s)=\begin{cases}s(1-t), & 0\leqslant s\leqslant t\leqslant 1,\\ t(1-s), & 0\leqslant t\leqslant s\leqslant 1.\end{cases} \tag{4.21}$$

在压杆稳定性问题中，出现

$$x(t)=\lambda\int_0^1 k(t,s)x(s)ds\sqrt{1-\left[\int_0^1 k_t'(t,u)x(u)du\right]^2}, \tag{4.22}$$

其中$k(t,s)$也由(4.21)式确定，

$$k_i'(t,u)=\begin{cases}1-u, & t<u,\\ -u, & t>u.\end{cases}$$

流体力学中引出

$$\varphi(t)=\int_0^t (t-s)^2 e^{-\varphi(s)}ds. \tag{4.23}$$

核反应某些问题可以归结为

$$u(t)=c+h_1(t)+\int_0^t h_2(t-\tau)[e^{u(\tau)}-1]d\tau. \tag{4.24}$$

其中$u(t)$是未知函数，$h_1(t)$，$h_2(t)$是已知函数.

还可以举出其它许多例子.

对物理和自然科学许多领域中出现的非线性积分方程进行研究，是非线性积分方程理论的重要组成部分之一，也是促进非线性积分方程理论发展的动力之一，对此可参考各有关专业的专门著作.

附录　非线性泛函分析的某些基本知识

§1　基本概念

设E_1和E_2是两个实Banach空间，$D\subset E_1$，设算子A：$D\to E_2$．下面一般假设A是非线性算子．

定义1.1　设$x_0\in D$，$x_n\in D(n=1,2,3,\cdots)$．

(i)若$x_n\to x_0$蕴含$Ax_n\to Ax_0$，则称A在x_0处连续；

(ii)若$x_n\to x_0$蕴含$Ax_n\xrightarrow{弱}Ax_0$，则称A在x_0处次连续；

(iii)若$x_n\xrightarrow{弱}x_0$蕴含$Ax_n\to Ax_0$，则称A在x_0处强连续；

(iv)若$x_n\xrightarrow{弱}x_0$蕴含$Ax_n\xrightarrow{弱}Ax_0$，则称A在x_0处弱连续；

如果A在D的每一点处都连续（次连续，强连续，弱连续），则称A在D上连续（相应地，次连续，强连续，弱连续）．

定义1.2　若任给$\varepsilon>0$，都存在$\delta>0$，使得只要$x_1\in D$，$x_2\in D$，$\|x_1-x_2\|<\delta$，就有$\|Ax_1-Ax_2\|<\varepsilon$，则称$A$在$D$上一致连续．

定义1.3　若A将D中的任何有界集都变成E_2中的有界集，则称A在D上有界．

容易证明，若D是E中的凸集，则A在D上一致连续蕴含着A在D上有界。

定义1.4 若A在D上连续，并且A把D中的任何有界集都映成E_2中的相对紧集（亦称列紧集），则称A是映D入E_2的全连续算子。

定理1.5 设A_n: $D\to E_2$全连续（$n=1, 2, \cdots$），A: $D\to E_2$。如果对D中的任何有界集S，当$n\to\infty$时，$\|A_n x-Ax\|$都关于$x\in S$一致地收敛于零，则A: $D\to E_2$全连续。

定理1.6 设D是E_1中的有界集，A: $D\to E_2$。则A是映D入E_2的全连续算子的充要条件是：对任给$\varepsilon>0$，都存在E_2的有限维子空间E_ε和映D入E_ε的连续有界算子A_ε，使$\sup\limits_{x\in D}\|Ax-A_\varepsilon x\|<\varepsilon$。

定义1.7 设X是拓扑空间，$D\subset X$。若存在连续映射r: $X\to D$，使当$x\in D$时，有$rx=x$，则称D是X的收缩核，r称是一个保核收缩。

定理1.8 实Banach空间E中的任何非空凸闭集，都是E的收缩核。

定理1.9 设E_1和E_2都是实Banach空间，D是E_1中的闭集，A: $D\to E_2$全连续。则必存在全连续算子A^*: $E_1\to E_2$，使得当$x\in D$时，恒有$A^*x=Ax$，并且$A^*(E_1)\subset\overline{co}A(D)$，其中$\overline{co}A(D)$表$A(D)$在$E_2$中的凸闭包。

定义1.10 设$x(t)$: $[a,b]\to E$，其中$[a, b]\subset R^1$，E是一实Banach空间。对$[a,b]$的任一分法T：

$$a=t_0<t_1<\cdots<t_{i-1}<t_i<\cdots<t_n=b,$$

做和$\sigma=\sum\limits_{i=1}^{n}x(\xi_i)\Delta t_i$，其中$\xi_i\in[t_{i-1}, t_i]$任取，$\Delta t_i=t_i-t_{i-1}$

$(i=1,2,\cdots,n)$. 如果存在 $I\in E$，使当 $d(T)=\max\limits_i \Delta t_i\to 0$ 时，有 $\|\sigma-I\|\to 0$，则称 $x(t)$ 在 $[a, b]$ 上Riemann 可积，I 称为是 $x(t)$ 在 $[a, b]$ 上的Riemann积分，记为 $\int_a^b x(t)dt$.

可以证明：若 $x(t)$：$[a, b]\to E$ 连续，则 $x(t)$ 在 $[a, b]$ 上Riemann可积.

定义1.11 设 E_1 和 E_2 是Banach空间，D 是 E_1 中的开集，A：$D\to E_2$，$x_0\in D$. 如果存在有界线性算子 B：$E_1\to E_2$，使得

$$\lim_{\|h\|\to 0}\frac{\|A(x_0+h)-Ax_0-Bh\|}{\|h\|}=0, \tag{1.1}$$

则称 A 在 x_0 处Fréchet可微，B 叫做 A 在 x_0 处的Fréchet导算子，记 $B=A'(x_0)$（有时记为 $B=A'x_0$）.

定理1.12 设 E_1，E_2，E_3 都是Banach 空间，开集 $D\subset E_1$，开集 $H\subset E_2$，A：$D\to E_2$，B：$H\to E_3$，$A(D)\subset H$. 设 A 在 x_0 处 Fréchet 可微，B 在 $y_0=Ax_0$ 处 Fréchet 可微. 则 BA：$D\to E_3$ 在 x_0 处 Fréchet 可微，并且 $(BA)'(x_0)=B'(y_0)A'(x_0)$.

定理1.13 (i)若泛函 f：$D\to R^1$ 在 $l=\{x|x=x_0+th, 0\leqslant t\leqslant 1\}(x_0, h\in E_1)$ 上Fréchet 可微，则存在 $0<\tau<1$，使

$$f(x_0+h)-f(x_0)=f'(x_0+\tau h)h. \tag{1.2}$$

(ii)若算子 A：$D\to E_2$ 在 $l=\{x|x=x_0+th, 0\leqslant t\leqslant 1\}$ $(x_0, h\in E_1)$ 上Fréchet可微，并且 $A'(x)$ 在 l 上连续，则

$$A(x_0+h)-Ax_0=\int_0^1 A'(x_0+th)hdt. \tag{1.3}$$

定理1.14 若 A：$D\to E_2$ 全连续，并在 $x_0\in D$ 处 Fréchet

可微，则$A'(x_0):E_1\to E_2$全连续。

定义1.15 设E_1,E_2是Banach空间，$D\subset E_1$是开集，$x_0\in D$，A: $D\to E_2$。若对任给$h\in E_1$，极限

$$D[A(x_0)h]=\lim_{t\to 0}\frac{A(x_0+th)-Ax_0}{t} \tag{1.4}$$

都存在，则称A在x_0处Gâteaux可微。若存在有界线性算子B: $E_1\to E_2$，使得由(1.4)式定义的$D[A(x_0)h]$可以表为$D[A(x_0)h]=Bh$，则称A在x_0处有有界线性Gâteaux微分，B叫做A在x_0处的Gâteaux导算子，记为$A'(x_0)$。

定理1.16 设$A:D\to E_2$（$D\subset E_1$是开集），$x_0\in D$。则

(i)若A在x_0处Frechet可微，则A在x_0处有有界线性Gâteaux微分，并且A在x_0处的Fréchet导算子和Gâteaux导算子相等。

(ii)若A在x_0处的某个邻域内有有界线性的Gâteaux微分，并且Gâteaux导算子$A'(x)$在$x=x_0$处连续，则A在x_0处Fréchet可微。

定理1.13中Fréchet可微的条件可以放宽为Gâteaux可微。

定义1.17 设E是Banach空间，S是E中的有界集。令

$\alpha(S)=\inf\{\delta>0\mid S$可以被有限个直径$\leqslant\delta$的集合复盖$\}$

则$\alpha(S)$称为是S的非紧性测度。

引理1.18 非紧性测度有下列性质（其中S，T表E中有界集，a是实数）：

(i)$\alpha(S)=0\iff S$是相对紧集；

(ii)若$S\subset T$，则$\alpha(S)\leqslant\alpha(T)$；

(iii)$\alpha(S\cup T)=\max\{\alpha(S),\alpha(T)\}$；

(iv) $\alpha(aS)=|a|\alpha(S)$，其中$aS=\{x=ay\,|\,y\in S\}$；

(v) $\alpha(S+T)\leqslant\alpha(S)+\alpha(T)$，其中$S+T=\{x+y\,|\,x\in S, y\in T\}$；

(vi) $\alpha(\overline{\mathrm{co}}S)=\alpha(S)$，于是$\alpha(\overline{S})=\alpha(S)$；

定义1.19 设E_1和E_2是Banach空间，$D\subset E_1$，A：$D\to E_2$连续．若存在$k\geqslant 0$，使对D中任何有界集S，都有$\alpha(A(S))\leqslant k\alpha(S)$，则称$A$是$D$上的$k$-集压缩算子．$k<1$的$k$-集压缩算子称为是严格集压缩算子．若对$D$中任何非相对紧的有界集$S$，都有$\alpha(A(S))<\alpha(S)$，则称$A$是凝聚算子．

显然，严格集压缩算子一定是凝聚算子．

定义1.20 设E是Banach空间，P是E中非空凸闭集，满足(i)若$x\in P$，$\lambda\geqslant 0$，则$\lambda x\in P$；(ii)若$x\in P$，$-x\in P$，则$x=\theta$．那么P称是E中的一个锥．

给定E中一个锥P后，可以在E中引如半序如下：若x，$y\in$，$y-x\in R$，则$x\leqslant y$．

若$\mathrm{Int}P\neq\varphi$，则称P是体锥．若$y-x\in\mathrm{Int}P$，则记$x\ll y$．

定义1.21 设P是E中一个锥．若存在常数$N>0$，使当$\theta\leqslant x\leqslant y$时，恒有$\|x\|\leqslant N\|y\|$，则称$P$是正规锥．

定理1.22 P是正规锥的充要条件是E的任何序区间$[x_1, x_2]=\{x\in E\,|\,x_1\leqslant x\leqslant x_2\}$都是有界的．

引理1.23 设P是E中正规锥．则必存在E的等价范数$\|\cdot\|^*$，使当$\theta\leqslant x\leqslant y$时恒有$\|x\|^*\leqslant\|y\|^*$．

§2 拓扑度理论

设E是一个Banach空间，令

$\{(f,\Omega,p\}=\{(f,\Omega,p)\,|\,\Omega$是$E$中的有界开集，$p\in E$，

$f=I-A, A:\overline{\Omega}\to E$全连续$, p\bar{\in} f(\partial\Omega)\}$.

定理2.1 存在定义在$\{f,\Omega,p\}$上的唯一的整值函数，记为$\deg(f,\Omega,p)$满足下列四条基本性质：

(i)正规性：若$p\in\Omega$，则$\deg(I,\Omega,p)=1$；

(ii)可加性：设Ω_1和Ω_2是Ω的两个互不相交的开子集，$p\bar{\in} f(\overline{\Omega}\backslash(\Omega_1\cup\Omega_2))$，则

$$\deg(f,\Omega,p)=\deg(f,\Omega_1,p)+\deg(f,\Omega_2,p);$$

(iii)同伦不变性：设$H:[0,1]\times\overline{\Omega}\to E$全连续，$h_t(x)=x-H(t,x)$。如果对任给$0\leqslant t\leqslant 1$，都有$p\bar{\in} h_t(\partial\Omega)$，则当$0\leqslant t\leqslant 1$时，$\deg(h_t,\Omega,p)$不变。

(iv)平移性：若$p\bar{\in} f(\partial\Omega)$，则$\deg(f,\Omega,p)=\deg(f-p,\Omega,0)$。

定理2.1中的整值函数$\deg(f,\Omega,p)$称为是f在Ω上关于p的Leray-Schauder度（当E是有限维空间时，Leray-Schauder度又称为Brouwer度）

关于拓扑度，有下列性质：

定理2.2 (i)(可解性)若$\deg(f,\Omega,p)\neq 0$，则方程$f(x)=p$在Ω中必有解；

(ii)（边界值性质）$\deg(f,\Omega,p)$由f在$\partial\Omega$上的值完全确定；

(iii)（缺方向性质）若存在$y_0\in\backslash\{\theta\}$，使对任给$x\in\partial\Omega$，

$t\geqslant 0$，都有$f(x)\neq p+ty_0$，则$\deg(f,\Omega,p)=0$；

(iv)（小扰动不变性）设$\deg(I-A,\Omega,p)$有定义，其中$A:\overline{\Omega}\to E$全连续．则存在$\varepsilon>0$，使得只要$B:\overline{\Omega}\to E$全连续，$\sup\limits_{x\in\partial\Omega}\|Bx\|<\varepsilon$，$\deg(I-A-B,\Omega,p)$就有定义，并且$\deg(I-A-B,\Omega,p)=\deg(I-A,\Omega,p)$．

定义2.3 设$A:\overline{\Omega}\to E$全连续，$f=I-A$，$x_0\in\Omega$是f的孤立零点．则存在x_0的邻域$U\subset\Omega$，使得f在$\overline{U}$中除x_0外没有其它零点．由可加性易知，对任何满足$x_0\in\omega\subset U$的开集ω，$\deg(f,\omega,0)$都取相同的数值，则此数值叫做f的零点x_0的指数，记为$\mathrm{ind}(f,x_0)$．类似地，可以定义f在无穷远点∞的指数$\mathrm{ind}(f,\infty)$．

定理2.4(Leray-Schauder) 设D是E中开集，$A:D\to E$全连续，$x_0\in D$，$x_0=Ax_0$．设A在x_0处Fréchet可微，并且1不是$A'(x_0)$的特征值，则x_0是A的孤立不动点，并且

$$\mathrm{ind}(I-A,x_0)=(-1)^{\beta},\tag{2.1}$$

其中β是$A'(x_0)$位于$(0,1)$中的所有实特征值的代数重数和．

定理2.5 设Ω是E中的开集，$\theta\in\Omega$，$A:\overline{\Omega}\to E$全连续．若

$$x\neq\lambda Ax\quad(\forall x\in\partial\Omega,\ 0\leqslant\lambda\leqslant 1),\tag{2.2}$$

则$\deg(I-A,\Omega,0)=1$．特殊地，若A在$\partial\Omega$上没有不动点，并且$\|Ax\|\leqslant\|x\|$ $(\forall x\in\partial\Omega)$，则$\deg(I-A,\Omega,0)=1$．

定理2.6 设Ω是E中凸开集，$A:\overline{\Omega}\to E$全连续，在$\partial\Omega$上没有不动点．若$A(\partial\Omega)\subset\overline{\Omega}$，则$\deg(I-A,\Omega,0)=1$．

定理2.7(Leray-Schauder) 设$A:E\to E$全连续．若集合$\{x\in E\mid x=tAx,\ 0<t<1\}$在$E$中有界，则$A$在$E$中必有不动点．

定理2.8 设D是Banach空间E中的有界凸闭集，$A:D\to D$

全连续．则A在D中必有不动点．

此定理即著名的Schauder 不动点定理，在有限维空间中，它又称Brouwer不动点定理．

定理2.9 设$B_r=\{x\in E \mid \|x\|<r\}$，$A:\overline{B}_r\to E$全连续，若

$$A(-x)=-Ax, Ax\neq x, \forall x\in\partial B_r,$$

则$\deg(I-A,B_r,0)\equiv 1 \pmod 2$．

定理2.10 设E是有限维空间，$B_r=\{x\in E \mid \|x\|<r\}$，$f:\overline{B}_r\to E$连续．若

$$f(-x)=f(x),\ f(x)\neq\theta, \forall x\in\partial B_r,$$

则$\deg(f,B_r,0)\equiv 0 \pmod 2$．若又假设$\dim E\equiv 1 \pmod 2$，则$\deg(f,B_r,0)=0$．

定理2.11 设Ω是Banach空间E中的有界开集，$A:\overline{\Omega}\to E$全连续，$B:(I-A)(\overline{\Omega})\to E$全连续．设$x_0$是$I-A$的孤立零点，$\theta$是$I-B$的孤立零点．则$x_0$是$(I-B)(I-A)$的孤立零点，并且

$$\operatorname{ind}((I-B)(I-A),x_0)=\operatorname{ind}(I-A,x_0)\cdot\operatorname{ind}(I-B,\theta). \tag{2.3}$$

设λ_1和λ_2是两个实数，$\lambda_1<\lambda_2$，E是Banach空间，U是$[\lambda_1,\lambda_2]\times E$中的有界开集，$A(\lambda,x):\overline{U}\to E$全连续．令$U(\lambda)=U\cap(\{\lambda\}\times E)(\lambda_1\leqslant\lambda\leqslant\lambda_2)$，$\partial U$表$U$在$[\lambda_1,\lambda_2]\times E$中的边界，则下列广义同伦不变性定理成立：

定理2.12 如果对任给$(\lambda,x)\in\partial U$，$x\neq A(\lambda,x)$．则$\deg(I-A(\lambda,\cdot),U(\lambda),0)$与$\lambda$无关$(\lambda_1\leqslant\lambda\leqslant\lambda_2)$．

注2.13 设E是Banach空间，令$\{f,\Omega,p\}^*=\{(f,\Omega,p)\mid\Omega$是$E$中有界开集，$p\in E$，$f=I-A$，$A:\overline{\Omega}\to E$凝聚，$p\notin f(\partial\Omega)\}$．可以证明：存在定义在$\{f,\Omega,p\}^*$上的唯一的整值

函数$\deg(f,\Omega,p)$，满足正规性、可加性、同伦不变性和平移性（参见定理2.1）．并且定理2.2、定理2.5、定理2.6和定理2.7都可以推广到凝聚算子上去．

定理2.8可以推广为：

定理2.14(Sadovskii)　设D是 Bananch 空间E中有界凸闭集，$A:D\to D$是凝聚算子．则A在D中必有不动点．

定义2.15　设E是实Banach空间，X是E的收缩核，U是X中的（相对）开集，$A:\overline{U}\to X$全连续并在∂U（U相对于X的边界）上没有不动点．用$r:E\to X$表示一个保核收缩，取R充分大，使得$\overline{U}\subset T_R=\{x\in E\mid\|x\|<R\}$．定义

$$\deg(I-A,U,0;X)=\deg(I-Ar,T_R\cap r^{-1}(U),0),\tag{2.4}$$

并称$\deg(I-A,U,0;X)$是$I-A$在U上相对于X的相对拓扑度（有时把$\deg(I-A,U,0;X)$记为$i(A,U,X)$）．

可以证明：由定义2.15定义的相对拓扑度，是有意义的，并且是唯一确定的．

定理2.16　由定义2.15确定的$\deg(I-A,U,0;X)$有下列性质：

(i)正规性：若$A:\overline{U}\to U$是常算子，则$\deg(I-A,U,0;X)=1$；

(ii)可加性：若U_1和U_2是U的互不相交的开子集（相对于X），并且A在$\overline{U}\setminus(U_1\cup U_2)$上没有不动点．则$\deg(I-A,U,0;X)=\deg(I-A,U_1,0;X)+\deg(I-A,U_2,0;X)$．

(iii)同伦不变性：设$H:[0,1]\times\overline{U}\to X$全连续，并且当$(t,x)\in[0,1]\times\partial U$时$H(t,x)\neq x$，则$\deg(I-H(t,\cdot),U,0;X)$与$t$无关；

(iv)保持性：若Y是X的收缩核，$A(U)\subset Y$则

$$\deg(I-A,U,0;X)=\deg(I-A,U\cap Y,0;Y).$$

注2.17 可以证明：定理2.2中的可解性和边界值性质，对相对拓扑度也是成立的。仿照定义2.3，还可以定义$I-A$相对于X的零点指数$\mathrm{ind}(I-A,x_0;X)$和$\mathrm{ind}(I-A,\infty;X)$.

设P是Banach空间中的锥，根据定义2.15，可以建立$I-A$相对于P的拓扑度。这在本书中被广泛使用。利用这一工具，可以证明：

定理2.18（锥拉压不动点定理） 设Ω_1和Ω_2是E中有界开集，$\theta\in\Omega_1,\overline{\Omega}_1\subset\Omega_2,A:P\cap(\overline{\Omega}_2\backslash\Omega_1)\to P$全连续。如果下列两条件之一成立：

(i)$Ax\not\geqslant x,\forall x\in P\cap\partial\Omega_1$；$Ax\not\leqslant x,\forall x\in P\cap\partial\Omega_2$（即锥拉伸）；

(ii)$Ax\not\geqslant x$，$\forall x\in P\cap\partial\Omega_2$；$Ax\not\leqslant x$，$\forall x\in P\cap\partial\Omega_1$（即锥压缩）。则$A$在$P\cap(\Omega_2\backslash\overline{\Omega}_1)$中必有不动点。

最后，我们给出定理2.8的另一个推广。

定理2.19（Schauder-Тихонов不动点定理） 设E是一个局部凸的线性拓扑空间，D是E中的凸紧集，A：$D\to D$是连续映射.则A在D中必有不动点。

§3 非线性泛函分析中的变分方法

下面总设E是实Banach空间，D是E中子集，$f:D\to R^1$是一个泛函。

定义3.1 设$x_0\in D$，$x_n\in D$。(i)若$x_n\xrightarrow{弱}x_0$蕴含着$f(x_n)\to f(x_0)$，则称f在x_0处弱连续；

(ii)若$x_n \xrightarrow{\text{弱}} x_0$蕴含着$f(x_0) \leqslant \underline{\lim}_{n\to\infty} f(x_n)$，则称$f(x)$在$x_0$处弱下半连续；

(iii)若$x_n \xrightarrow{\text{弱}} x_0$蕴含着$f(x_0) \geqslant \overline{\lim}_{n\to\infty} f(x_n)$，则称$f(x)$在$x_0$处弱上半连续。

若f在D中每一点处都弱连续（弱下半连续，弱上半连续），则称f在D上弱连续（相应地，弱下半连续，弱上半连续）。

定义3.2 设D是E中的开集. 若在D中的每一点处，$f(x)$都有有界线性的Gâteaux微分$f'(x)$，记$F(x)=f'(x)$，则称算子$F:\Omega\to E^*$是f的梯度算子，记$F(x)=\text{grad}\, f(x)$，或$F=\text{grad} f$。

定义3.3 设泛函$f:D\to R^1$在D上有有界线性的Gâteaux微分，$x_0\in D$，$\text{grad} f(x_0)=\theta$，则称$x_0$是$f(x)$的一个临界点，$c=f(x_0)$是$f(x)$的一个临界值。

定理3.4 设D是实Banach空间中弱列紧的弱闭集（例如，D是实自反空间中有界凸闭集）. 若$f:D\to R^1$弱下半连续，则存在$x_0\in D$，使$f(x_0)=\inf_{x\in D} f(x)$。若$f$弱上半连续，则存在$x^0\in D$，使$f(x^\circ)=\sup_{x\in D} f(x)$。

推论3.5 设E是实自反Banach空间，$f:E\to R^1$是弱下半连续的，并且是强制的，即$\lim_{\|x\|\to\infty} f(x)=+\infty$。则存在$x_0\in E$，使$f(x_0)=\inf_{x\in E} f(x)$。

定理3.6 设D是E中开集，$f:D\to R^1$是一个泛函，若f在$x_0\in D$处达到极小值（或极大值），并且$f(x)$在x_0处有有界线

性G微分．则$f'(x_0)=\theta$。

定理3.7 设D是E中的凸开集，f：$D\to R^1$，并且$F=\mathrm{grad}f$存在．那么：

(i)若F映D中任意有界集为E^*中的紧集，则f弱连续；

(ii)若f弱连续，且在D上一致可微，即任给$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，使得只要$x\in D$，$x+h\in D$，$\|h\|<\delta$，就有

$$\frac{|f(x+h)-f(x)-F(x)h|}{\|h\|}<\varepsilon. \tag{3.1}$$

则$F:D\to E^*$弱连续．

定理3.8 (Mountain Pass引理) 设E是Banach空间，$f:E\to R^1$是C^1泛函（即$F(x)=\mathrm{grad}\,f(x)$存在且连续），设f满足$P.S$条件(即若$\{x_n\}\subset E$，$\{f(x_n)\}$有界，$f'(x_n)\to\theta$，则$\{x_n\}$有收敛子列)．又设存在E中的开集Ω，$x_0\in\Omega$，$x_1\overline{\in}\overline{\Omega}$，使得．

$$\max\{f(x_0),f(x_1)\}<\inf_{x\in\partial\Omega}f(x). \tag{3.2}$$

令$\Phi=\{h\,|\,h:[0,1]\to E$连续，$h(0)=x_0,h(1)=x_1\}$，

$$c=\inf_{h\in\Phi}\max_{t\in[0,1]}f(h(t)). \tag{3.3}$$

则c是f的临界值．

定理3.9 设E是无穷维实Banach空间，f：$E\to R^1$是C^1偶泛函，满足$P.S$条件．又设

(i)$f(\theta)=\theta$，且存在$\rho>0$，$a>0$，使

$$\{x\in E\,|\,\|x\|\leqslant\rho\}\subset\{x\in E\,|\,f(x)\geqslant 0\}, \tag{3.4}$$

$$f(x)\geqslant a,\quad \forall x\in\{x\in E\,|\,\|x\|=\rho\}, \tag{3.5}$$

(ii)对E的任意有限维子空间E_0，$E_0\cap\{x\in E\,|\,f(x)\geqslant 0\}$有界．

则f具有无穷多个临界点，并且有无穷多个临界值．

在本书中，我们还用到《类》(genus)的概念．

定义3.10 设E是实Banach空间，令

$$\Sigma(E)=\{A\subset E\backslash\{\theta\}\mid A\text{是}E\text{中关于}\theta\text{的对称闭集}\}.$$

对$A\in\Sigma(E)$，《类》$r(A)$定义如下：若$A=\phi$，则$\gamma(A)=0$；若存在自然数n及连续奇映射$\varphi: A\to R^n\backslash\{\theta\}$，则$\gamma(A)=\min\{n\mid$存在连续奇映射$\varphi: A\to R^n\backslash\{\theta\}\}$；对于其余情况，$\gamma(A)=\infty$。

引理3.11 设$A,B\in\Sigma(E)$。

(i)若存在连续奇映射$f: A\to B$，则$\gamma(A)\leqslant\gamma(B)$；

(ii)若$A\subset B$，则$\gamma(A)\leqslant\gamma(B)$；

(iii)若$A=\{x\in R^n\mid r\leqslant\|x\|\leqslant R\}$，其中$0<r\leqslant R<+\infty$，则$\gamma(A)=n$。

§4 单调算子

设E是实Banach空间，E^*是E的共轭空间。对$x\in E$，$f\in E^*$，记$(f,x)=f(x)$。

定义4.1 设$D\subset E$。若映射$T: D\to E^*$满足

$$(Tx-Ty,x-y)\geqslant 0,\ \forall x,y\in D, \tag{4.1}$$

则称T是单调算子（映射）。

若D是E中的线性集，T是线性算子，则(4.1)式等价于$(Tx,x)\geqslant 0\ (\forall x\in D)$。

引理4.2 定义在全空间E上的线性单调算子是连续的。

用$P(E^*)$表E^*的一切子集所组成的集。对多值映射T：$E\to P(E^*)$，记

$D(T)=\{x\in E\mid Tx\neq\phi\}$为$T$的有效域；

$R(T)=\{y\mid y\in Tx, x\in D(T)\}$为$T$的值域；

$G(T)=\{(x,y)\in E\times E^*\mid x\in D(T), y\in Tx\}$为$T$的图象。

对多值映射T，逆映射一定存在，其定义是：

$$T^{-1}y=\{x\in E\mid y\in Tx\},\forall y\in E^*. \tag{4.2}$$

定义4.3 设$T:E\to P(E^*)$是多值映射.

(i)若$R(T)=E^*$，则称T满射；

(ii)若T把$D(T)$中任意有界集映为E^*中的有界集，则称T有界；

(iii)给定$x_0\in E$.若存在x_0在E中的邻域$U(x_0)$，使$U(x_0)\cap D(T)\neq\phi$，且$T(U(x_0)\cap D(T))$在E^*中有界，则称T在x_0处是局部有界的.

定义4.4 (i) 设$G\subset E\times E^*$，若对任何$(x_1, y_1)\in G$，$(x_2,y_2)\in G$，有$(y_1-y_2,x_1-x_2)\geqslant 0$，则称$G$是单调集；

(ii)设$G\subset E\times E^*$是单调集，如果G不是$E\times E^*$中任何单调集的真子集，则称G是极大单调集；

(iii)多值映射$T:E\to P(E^*)$称为是单调的，若它的图象$G(T)$是$E\times E^*$中的单调集；T称为是极大单调的，若$G(T)$是$E\times E^*$中的极大单调集.

定义4.5 设$D\subset E,T:D\to E^*$，$x_0\in D$. 若$h\in E$，$t_n>0$，$x_0+t_nh\in D,t_n\to 0$蕴含着$T(x_0+t_nh)\xrightarrow{弱^*}Tx_0$，则称$T$在$x_0$处是半连续的.若$T$在$D$中每一点都半连续，则称$T$在$D$上半连续.

定义4.6 设$T:E\to P(E^*)$是多值映射，$D(T)$无界.

(i)如果

$$\lim_{x\in D(T),\|x\|\to\infty}\left\{\inf_{f\in Tx}\frac{(f,x)}{\|x\|}\right\}=+\infty, \tag{4.3}$$

则称T是强制的；

(ii)设$h\in E^*$给定，若存在$r>0$，使

$$(f-h,x)>0,\forall x\in D(T),\|x\|\geqslant r,f\in Tx, \tag{4.4}$$

则称T关于h强制.

引理4.7(Debrunner-Flor不等式) 设E是自反空间，$T:E\to P(E^*)$是单调的，$\theta\in D(T)$，$\theta\in T\theta$. 又设$P:E\to E^*$是单调，次连续，有界的，并且关于某$h\in E^*$强制，则存在$u\in\{x\in E\mid \|x\|<r\}$，使

$$(f+Pu-h,x-u)\geqslant 0,\ \forall(x,f)\in G(T),$$

其中r由定义4.6(ii)确定.

定理4.8 设E自反，$T:E\to P(E^*)$极大单调，$\theta\in D(T)$. 又设$P:E\to E^*$单调、半连续，有界，并且是强制的，则$T+P$满射.

定理4.9 设E自反，$T:E\to P(E^*)$是极大单调的，并且是强制的，则T满射.

定理4.10 设E自反，$T:E\to P(E^*)$极大单调. 则T满射的充要条件是：T^{-1}在E^*的每一点处都是局部有界的.

关于极大单调的判别方法有：

引理4.11 (i)若$T:E\to E^*$半连续、单调，则T是极大单调的；

(ii)若E自反，$T:E\to P(E^*)$极大单调，则T^{-1}是极大单调的：

(iii)定义在全空间E上的线性单调算子是极大单调的；

(iv)设T_1和T_2都是极大单调的，并且$\text{Int}D(T_1)\cap D(T_2)\neq\phi$中，则$T_1+T_2$也是极大单调的.

定理4.12 设E自反，$T:E\to E^*$半连续，并且是强单调的，即存在$c>0$，使

$$(Tx-Ty,x-y)\geqslant c\|x-y\|^2,\ \forall x,y\in E. \qquad (4.5)$$

则T满射，并且对任给$f\in E^*$，方程$Tx=f$在E中有唯一解.

参 考 文 献

关肇直 〔1〕泛函分析讲义，高等教育出版社，1958.〔2〕数学学报，6(1956)，638～650.

田方增 〔1〕应用数学与计算数学，1(1964)，98～102.〔2〕应用数学与计算数学，5(1979)，60～86.

江泽涵 〔1〕拓扑学引论，上海科学技术出版社，1978.

夏道行、严绍宗、吴卓人、舒五昌 〔1〕实变函数论与泛函分析（下册），人民教育出版社，1977.

冷生明 〔1〕北京大学学报，1957年第2期，159～166.〔2〕北京大学学报，1958年第2期，131～143.

郭大钧 〔1〕非线性泛函分析，山东科学技术出版社，1985.〔2〕中国科学，8(1959)，331～356.〔3〕山东大学学报，1959年第2期，107～112.〔4〕中国科学，11(1962)，437～452.〔5〕数学进展，6(1963)，70～91.〔6〕山东大学学报，1965年第1期，1～6.〔7〕数学学报，16(1966)，137～149.〔8〕数学学报，20(1977)，99～108.〔9〕科学通报，23(1978)，27～31.〔10〕数学学报，22(1979)，231～236.〔11〕科学通报，24(1979)，193～197.〔12〕数学学报，22(1979)，584～595.〔13〕山东大学学报，1979年第2期，20～28.〔14〕数学学报，24(1981)，444～450.〔15〕数学年刊，2(1981)，英文版，65～80.〔16〕山东大学学报，1981年第1期，7～15.〔17〕数学学报，

25(1982)，419～426.〔18〕科学通报，27(1982)，257～260.〔19〕山东大学学报，1982年第3期，1～11.〔20〕科学通报，28(1983)，1217～1219.〔21〕数学年刊，4A(1983)，645～656.〔22〕数学进展，13(1984)，294～310.〔23〕科学通报，29(1984)，189.〔24〕数学研究与评论，4:1(1984)，55～60.〔25〕山东大学学报，1984年增刊，53～60.〔26〕山东大学学报，1984年增刊，61～75.〔27〕科学通报，30(1985)，1132～1135.〔28〕东北数学，1:1(1985)，101～109.〔29〕Nonlinear Anal., 10(1986)，1293～1302.〔30〕数学年刊，7B(1986)，191～204.〔31〕山东大学学报，1985年第1期，1～8.〔32〕数学年刊，8A(1987)，27～31.〔33〕Multiple solutions of nonlinear Fredholm integral equations in Banach space（待发表）.

郭大钧，V.Lakshmikantham 〔1〕Nonlinear Problems in Abstract Cones,（待出版）.

郭大钧、孙经先 〔1〕Some global generalizations of the Birkhoff-Kellogg theorem and applications, J. Math. Anal. Appl.,（待发表）.〔2〕拓扑度的计算及其应用，数学研究与评论（待发表）.

郭大钧、黄春朝、梁方豪 〔1〕实变函数与泛函分析，山东大学出版社，1986.

郭大钧、张庆雍 〔1〕科学通报，24(1979)，678～681.

陈文嫄 〔1〕非线性泛函分析，甘肃人民出版社，1982.〔2〕数学进展，7(1964)，39～42.〔3〕数学学报，13(1963)，315～322.〔4〕数学学报，14(1964)，735～746.

〔5〕东北人民大学学报，1957年第1期，95～98.

陈文嫄、秦成林 〔1〕数学研究与评论，创刊号(1981)，39～46.〔2〕数学研究与评论，3:1(1983)，47～50.

张恭庆 〔1〕临界点理论及其应用，上海科学技术出版社，1986.〔2〕中国科学，1977，415～430.〔3〕中国科学，26A(1983)，306～317.

吴从炘、王廷辅 〔1〕奥尔里奇空间及其应用，黑龙江科学技术出版社，1983.

钱敏、李正元 〔1〕向量场的旋转度理论及其应用，北京大学出版社，1982.

王声望 〔1〕数学学报，13(1963)，254～261.〔2〕科学通报，1980年数理化专辑，42～45.

王声望、楼宇同、冯宝琦 〔1〕数学学报，15(1965),63～73.

林群 〔1〕科学通报，20(1975)，76～77.

朱广田、林群 〔1〕应用数学学报，5(1982)，53～59.〔2〕应用数学学报，5(1982)，60～65.

尤秉礼 〔1〕常微分方程补充教程，高等教育出版社，1981.

张上泰 〔1〕数学学报，14(1964)，137～142.〔2〕数学学报，13(1963)，204～215.

孙经先 〔1〕数学学报，28(1985)，347～359.〔2〕科学通报，31(1986)，328～331.〔3〕科学通报，31(1986)，728～729.〔4〕数学年刊，7A(1986)，528～535.〔5〕数学学报，30(1987)，264～267.〔6〕系统科学与数学，(1987),148～150.〔7〕J.Math.Anal.Appl.126(1987)，566～573.〔8〕非线性Hammerstein型积分方程正解

的存在性及其应用，数学年刊(待发表).〔9〕非连续的增算子的不动点定理及其对含间断项的非线性方程的应用，数学学报(待发表).〔10〕超线性算子特征元的全局结构，数学年刊(待发表).〔11〕关于非线性算子的若干问题，山东大学博士学位论文，1984.〔12〕山东大学学报，1983年第1期，34～40.〔13〕数学研究与评论，3:1(1983)，45～46.〔14〕科学通报，28(1983)，765.〔15〕山东大学学报，1984年第1期，1～6.〔16〕科学通报，29(1984)，382.〔17〕数学研究与评论，4:1(1984)，51～53.〔18〕山东大学学报，1984年第4期，11～18.〔19〕科学通报，30(1985)，77.〔20〕数学研究与评论，7:1(1987)，81～85.〔21〕关于拓扑度的计算及其对非线性算子的应用(Ⅱ)，山东大学学报(待发表)，〔22〕山东大学学报，22(1987)，35～40.

孙经先、孙勇 〔1〕Some fixed point theorems of increasing operators, Appl. Anal.,(待发表).

白锦东 〔1〕科学通报，27(1982)，449～451.〔2〕山东大学学报，1982年第2期，1～6.〔3〕山东海洋学院学报，15(1985)，102～106.〔4〕山东海洋学院学报，13(1983)，101～106.〔5〕数学物理学报，4(1984)，393～398.〔6〕科学通报，28(1983)，1083～1084.〔7〕科学通报，30(1985)，956.

黄春朝 〔1〕数学学报，29(1986)，807～814.〔2〕科学通报，29(1984)，1341.〔3〕数学研究与评论，3:1(1983)，109～110.〔4〕科学通报，28(1983)，1020.〔5〕科学通报，29(1984)，574.〔6〕山东大学学报，1984年增刊.

黄春朝、颜骏 〔1〕数学年刊，7A(1986)，250～254.

梁方豪 〔1〕数学研究与评论，3:3(1983)，81～84.

潘兴斌 〔1〕东北数学，2(1986)，245～252.〔2〕山东大学学报，1986年第2期，1～5.〔3〕数学杂志，6(1986)，143～150.〔4〕山东大学学报，1985年第4期，16～25.

王乃静 〔1〕数学年刊，8A(1987)，311～318.

戚桂杰 〔1〕科学通报，31(1986)，724～727.

杜一宏 〔1〕科学通报，31(1986)，636.〔2〕数学杂志，6(1986)，91～98.

孙勇 〔1〕工程数学学报，2:2(1985)，156～160.

刘清荣 〔1〕科学通报，27(1982)，4～8.

梁展东 〔1〕科学通报，28(1983)，955.

黄发伦 〔1〕数学学报，24(1981)，143～153.

H. Amann 〔1〕SIAM Review, 18(1976), 620～709.〔2〕J. Functional Anal., 11(1972), 346～384.〔3〕J. Functional Anal., 14(1973), 162～171.〔4〕Appl. Anal., 1(1972), 385～397.〔5〕Aequationae Math., 1(1968), 342～266.〔6〕J. Math. Mech. 19(1969), 143～153.

A. Ambrosetti & P. H. Rabinowitz 〔1〕J. Functional Anal., 14(1973), 349～381.

P. M. Anselone 〔1〕Nonlinear Integral Equations, Wisconsin, 1964.

H. A. Antosiewicz 〔1〕Ann. Mat. Pura. Appl., 74(1966), 61～64.

M. Backwinkel-Schillings 〔1〕J. Functional Anal., 23(1976), 177～194.

H. Berestycki 〔1〕J. Diff. Eq., 26(1977), 375～390.

M. S.Berger 〔1〕Nonlinearity and Functional Analysis, New York, 1977.

J.Berger & J. Robert 〔1〕J. London Math. Soc., 15 (1977), 277～287.

G. D. Birkhoff & O. D .Kellogg 〔1〕Trans. Amer. Math. Soc., 23(1922), 96～115.

H. Brezis & F. E. Browder 〔1〕Bull. Amer. Math. Soc., 80(1974), 568～572. 〔2〕Bull. Amer. Math. Soc., 81(1975), 82～88. 〔3〕Bull. Amer. Math. Soc., 81(1975), 73～78. 〔4〕Advances in Math., 18(1975), 115～147.

F.E.Browder 〔1〕Nonlinear Operators and Nonlinear Equations of Evolution in Banach Spaces, Providence, 1975. 〔2〕 Nonlinear functional analysis and nonlinear integral equations of Hammerstein and Uryson type, in "Contributions to Nonlinear Functional Analysis", 425～500, New York, 1971. 〔3〕Lecture Notes in Math., 446,75～95,Springer-Varlag, 1975.

F.E.Browder & C. P. Gupta 〔1〕Bull. Amer Math. Soc., 75(1969), 1347～1353.

F.E. Browder, D. G. de Figueiredo & C. P. Gupta 〔1〕Bull. Amer. Math.Soc., 76(1970), 700～705.

I. W. Busbridge 〔1〕Trans. Amer. Math. Soc., 105 (1962), 112～117.

R.H.Cameron & W.T. Marthin 〔1〕Amer.J.Math., 66(1944), 281～298.

R.H.Cameron & J.M. Shapiro 〔1〕Annals of Math., 62(1955), 472～497.

C. Caratheodory 〔1〕Vorlesungen über reelle Funktionen, Leipzig and Berlin, 1918.

B. Cahlon & M. Eskin 〔1〕J. Math. Anal. Appl., 83(1981), 159～171.

S. Chandrasekhar 〔1〕Bull. Amer. Math. Soc., 53 (1947), 641～711.

J. Chover & J. Ney 〔1〕J. Math. Mech., 14(1965), 723～736. 〔2〕J. D'Analyse Math., 21(1968), 381～413.

E. A. Coddington & N. Levinson 〔1〕Theory of Ordinary Differential Equations, New York,1955.

C.V.Coffman 〔1〕J.Analyse Math., 22(1969), 391～419. 〔2〕J.Math. Mech., 18(1968), 411～420.

D. S. Cohen 〔1〕SIAM J. Appl. Math., 20(1971), 1～13.

C. Corduneanu 〔1〕Integral Equations and Stability of Freedback Systems, New York and London, 1973. 〔2〕C.R.Acad. Sci., 256(1963), 3564～3567. 〔3〕Annlele stii. Univ. Iasi, 9(1963), 369～375. 〔4〕Ann. Mat. Pura Appl., 67(1965), 349～363. 〔5〕Math. Systems Theory, 1(1967), 143～155. 〔6〕Bull. Math. Soc. Sci. Math. R.S. Roumanie,

12(1968), 43～53.

R.Courant & D.Hilbert 〔1〕Methods of Mathematical Physics, Vol I, New York 1953.

M.G.Crandall & P.H.Rabinowitz 〔1〕J. Functional Anal., 8(1971), 321～340. 〔2〕J. Math. Mech., 19(1970), 1083～1103. 〔3〕Arch.Rat.Mech. Anal., 37(1970), 262～267.

J. Cronin 〔1〕J. Math. Anal. Appl., 38(1972), 659～667. 〔2〕Fixed Points and Topological Degree in Functional Analysis, Providence, 1964.

M. M. Crum 〔1〕Quart. J. Math. Oxford Ser., 18 (1947), 244～252.

E.N.Dancer 〔1〕Bull. Austral Math.Soc., 11(1974), 131～143. 〔2〕Arch.Rat. Mech. Anal., 52(1973), 181～192. 〔3〕Indiana Univ. Math. J., 23(1974), 1069～1076.

K. Deimling 〔1〕Nonlinear Functional Analysis, Springer-Verlag, 1985. 〔2〕Ordinary Differential Equations in Banach Spaces, Springer-Verlag, 1977.

V. Dolezal 〔1〕Czechoslovak Math. J., 15(1965), 436～453.

C.L. Dolph 〔1〕Trans. Amer.Math Soc., 66(1949), 289～307.

C.L.Dolph & G.J.Minty 〔1〕On nonlinear integral equations of the Hammerstein type, in"Nonlinear

Integral Equations", 99～154, Wisconsin, 1964.
G.S.Dragoni 〔1〕Rend.Sem. Math. Univ. Padova., 7(1936), 1～35.
J.Dugundji 〔1〕Pacific J. Math., 1(1951), 353～367.
N.Dunford & J. T. Schwartz 〔1〕Linear Operators, Part I, Interscience, 1958.
D. G. de Figueiredo 〔1〕Lecture Notes in Math., 957, 34～87.
D.G.de Figueiredo & C.P.Gupta 〔1〕J.Math.Anal. Appl., 39(1972), 37～48. 2 Indag. Math., 34 (1972), 335～358. 〔3〕Proc. Amer Math. Soc., 40 (1973), 470～476.
D.G.de Figueiredo, P.L. Lions & R. D. Nussbaum 〔1〕J.Math.Pure Appl., 61(1982), 41～63.
C. Fox 〔1〕Trans. Amer. Math. Soc., 99(1961), 285 291.
I.Fredholm 〔1〕Kong.Vetenskaps-Akademiens Forh, Stockholm, (1900), 39～46. 〔2〕Acta Math., 27 (1903), 365～390.
A.Fridman 〔1〕J. d'Analyse Math., 11(1963), 381～413. 〔2〕J. d'Analyse Math., 15(1965), 287～303.
G. Fudini 〔1〕Ann. Mat. Pura Appl., Ser 3, 20 (1913), 217～244.
A. Kh. Geleg 〔1〕Automat. Remote Control, 27 (1966).
M.Golomb 〔1〕Math.Z., 39(1934), 45～75. 〔2〕Publ.

Math. Univ.Belgrade, 5 (1936), 52～83.

S. I. Grossman & R. K. Miller 〔1〕J. Diff. Eq., 8 (1970), 457～474.

C. P. Gupta 〔1〕J. Math. Anal. Appl., 58(1977), 344～360. 〔2〕J. Math. Anal. Appl. 32(1970), 617 620. 〔3〕Lecture Notes in Math., 384, 184～238, 〔4〕Comm. Math. Univ. Carolinae, 16(1975), 377 ～386.

A.Hammerstein 〔1〕Acta Math., 54(1930)117～176.

G.H.Hardy, J.E.Littlewood & G.Polya 〔1〕Inequalities, Cambridge University Press, 1952.

P.Hess 〔1〕Math.Z., 125(1972), 104～106. 〔2〕Proc. Amer.Math.Soc., 30(1971), 308～312.

D. Hilbert 〔1〕Grundzüge einer allgeemeinen Theorie der Linearen Integralgleichungen, Leipzig, 1912.

G.A.Hively 〔1〕SIAM J.Math. Anal., 9 (1978), 787 ～792.

J. L. W. V. Jensen 〔1〕Acta Math., 30(190), 175～193.

M.Joshi 〔1〕Comm.Math.Univ. Carolinae, 15(1974), 283～291.

R. P. Kamwal 〔1〕Linear Integral Equations, New York and London, 1971.

S.Karlin 〔1〕Trans. Amer. Math. Soc., 113(1964), 1～17.

I.I.Kolodner 〔1〕J.Math.Mech.,13(1964),701～750.

J.Kolomy [1]Comm.Math.Univ.Carolinae,7(1966), 461～478. [2] Comm. Math. Univ. Carolinae, 8(1967), 273～289.

V. Lakshmikantham & S. Leela [1]Differential and Integral Inequalities, Vol I, New York, 1969. [2]Nonlinear Differential Equations in Abstract Spaces, Oxford, 1981.

T.Laetsch [1]SIAM J.Appl.Math., 18(1970), 389～400.[2].SIAM J.Math.Anal., 6(1975), 178～191.

R. W. Leggett [1]J. Math. Anal Appl., 57(1977), 462～468.

R.W.Leggett & L. R. Williams [1]Indiana Univ. Math. J., 28(1979), 673～688. [2]J. Math. Anal. Appl., 69(1979), 180～193. [3]SIAM J. Math. Anal., 13(1982), 122～133. [4]J. Math. Anal. Appl., 66(1977), 248～254.

G.Lellouche [1]SIAM J.Control, 8(1970),202～206.

J. Leray & J. Schauder [1]Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. Paris, 51(1934), 45～78.

J.T.Levin & J.A.Nohel [1]J.Math Mech, 9(1960), 347～368. [2]Arch.Rat. Mech. Anal., 11(1962), 210～243.

N.Levinson [1]J.Math.Anal. Appl., 1(1961), 1～11.

P.L.Lions [1]SIAM Review 24(1982),441～467.

L. Lichtenstein [1]J. für Math., 145(1915), 24～85.

〔2〕Vorlesungen über einge Klassen nichtlinearen Integralgleichungen und Integro-Differentialgleichungen, Berlin, 1931.

W. V. Lovitt 〔1〕Linear Integral Equations, New York, 1950.

M.Marcus & V.J.Mizel 〔1〕Arch.Rat.Mech. Anal., 51(1973), 347~370. 〔2〕J.d'Anal.Math.,28(1975), 303~334.

P.Marocco 〔1〕J.Diff.Eq., 43((1982), 235~248.

R.H.Martin Jr 〔1〕Nonlinear Operators and Differential Equations in Banach Spaces, Wiley and Sons, 1976.

J.L.Massera & J.J. Schaffer 〔1〕Linear Differential Equations and Function Spaces, New York, 1966.

R. K. Miller 〔1〕Nonlinear Volterra Integral Equations, California, 1971. 〔2〕J.Math.Anal. Appl., 23(1968), 198~208. 〔3〕 J. Math. Anal. Appl., 22(1968), 319~340.

R.K.Miller, J.A.Nohel & J.S.W.Wong 〔1〕J.Math. Anal.Appl., 25(1969),

R.K.Miller & G.R.Sell 〔1〕 Ann. Mat. Pura Appl., 80(1968), 135~152. 〔2〕Ann. Mat. Pura Appl., 87(1970), 281~286.

J.Moser 〔1〕Quart.Appl.Math.,25(1967), 1~9.

Z.Nehari 〔1〕Math.Z., 72(1959), 175~183.

J. A. Nohel 〔1〕Bull. Amer. Math. Soc., 68(1962),

323～329. 〔2〕Stability Problems of Solutions of Differential Equations, 177～210, Italy, 1966.

C.D.Panchal 〔1〕Quart J.Math., 35(1984), 311～319.

S. V. Parter 〔1〕J. Math. Anal. Appl., 32(1970), 104～117.

D. Pascali & S. Sburlan 〔1〕Nonlinear Mappings of Monotone Type, Romania, 1978.

A.Pazy & P. H. Rabinowitz 〔1〕Arch. Rat. Mech. Anal., 32(1969), 226～246. 〔2〕Arch.Rat. Mech. Anal., 35(1969), 409～410.

D.Pertrovanu 〔1〕Ann. Mat. Pura Appl., 74(1966), 227～254.

W.Petry 〔1〕Math. Nachr., 57(1973), 141～161. 〔2〕Math.Nachr., 59(1974), 51～62.

W. V. Petryshyn & P. M. Fitzpatrick 〔1〕Trans. Amer. Math. Soc., 160(1971), 39～63.

G.H.Pimbley 〔1〕J.Math. Mech., 12(1963),577～597.

V. M. Popov 〔1〕Stud. Cerc. Energetica, 9(1959), 119～135. 〔2〕Automat. Romote Control,22(1961), 857～875. 〔3〕Automat.Remote Control,23(1962), 1～21.

P.H.Rabinowitz 〔1〕J. Functional Anal., 7(1971), 487～513. 〔2〕J. Diff. Eq., 14(1973), 462～475. 〔3〕Comm.Pura Appl. Math., 23(1970), 939～962. 〔4〕J.Diff.Eq., 9(1971), 536～548.

F.Riesz 〔1〕Acta Math., 41(1917), 71～98.

F.Riesz & R.Sz.Nagy 〔1〕Lecons d'Analyse Fonctionnelle, Budapest, 1965.

J.H.Roberts & W. R. Mann 〔1〕Pacific J. Math., 1(1951), 431～445.

E.H.Rothe 〔1〕Ann. of Math., 47(1946), 580～592. 〔2〕Ann. of Math., 49(1948),262～278.〔3〕Trans, Amer. Math. Soc., 66(1949), 75～92. 〔4〕Acta Math., 85(1951), 73～98.

T.L. Saaty 〔1〕Modern Nonlinear Equations, New York, 1967.

G.Sansone 〔1〕Equazioni Differentiali campo reale, Vol I, 1949.

T.Sato 〔1〕Compositio Math., 11(1953),271～290.

J. Schauder 〔1〕Studia Math., 2(1930), 183～196. 〔2〕Studia Math., 2(1930), 1～6.

F. Smithies 〔1〕Integral Equations, London, 1958.

A.Strauss 〔1〕J.Math. Anal. Appl., 30(1970), 564～575.

C. A. Stuart 〔1〕Math.Z., 136(1974), 117～135. 〔2〕Math. Z., 137(1974), 49～66. 〔3〕Math. Ann, 192(1971), 119～124. 〔4〕Quart. J. Math. Oxford (2), 24(1973), 129～139.

H.R.Thieme 〔1〕Math. Z., 157(1977), 141～154. 〔2〕Manus.Math., 29(1979), 49～84.

L. Tonelli 〔1〕Bull. of the Calcutta Math. Soc., 20 (1928), 31～48.

F. G. Tricomi 〔1〕Integral Equations, New York, 1957.

R. E. L. Turner 〔1〕Comm. Pura Appl. Math., 23 (1970), 963~972. 〔2〕Arch. Rat. Mech. Anal., 58(1975), 151~179.

R. Vaughn 〔1〕Appl. Anal., 7(1978), 337~348.

V. Volterra 〔1〕Theory of Functional and of Integral and Integro-differential Equations, New York, 1959. 〔2〕Opere mathematiche, 5 Vol., Accademia Nazionale dei Lincei, 1954~1962.

W. Walter 〔1〕Differential und Integral-Ungleichungen, Springer Verlag, 1967.

G. T. Whyburn 〔1〕Topological Analysis, Princeton, 1958.

D. Willett 〔1〕Arch. Rat. Mech. Anal., 15(1964), 79~86.

J. H. Wolkowisky 〔1〕Arch. Rat. Mech. Anal., 35 (1969), 299~320.

A. C. Zaanen 〔1〕Linear Analysis, Amsterdam, 1953.

М. М. Вайнберг 〔1〕Вариационные Методы Исследования Нелинейных Операторов, Москва, 1956. 〔2〕ДАН, 100(1955), 845~848. 〔3〕Вариационный Метод и Метод Монотонных Опрераторов, Москва, 1972. 〔4〕ДАН. 75(1950), 609~612. 〔5〕ДАН, 78(1951), 1077~1080. 〔6〕Матем. сб., 30 (1952), 3~10. 〔7〕Труды Моск. Матем. об-ва,

3(1954), 375～406.

М. М. Вайнберг и В. А. Треногин 〔1〕Теория Ветвления решений нелинейных уравнений, Москва, 1969.

М. А. Красносельский 〔1〕Топологические Методы в Теории Нелинейных интегральных уравнений, Москва, 1956. 〔2〕ДАН, 82(1952), 333～336, 〔3〕ДАН, 88(1953), 749～751. 〔4〕Положительные Решения ОпераГорных Уравнений,Москва,1962, 〔5〕Матем. сб., 33(1953), 199～214.

М.А.Красносельский и П.П. Забрейко 〔1〕Геометрические Методы Нелинеиного Анализа,Москва, 1975.

М. А. Красносельский, П. П. Забрейко, Е. И. Пустыльник и П.Е. Соболевский 〔1〕Интегральные Операторы в Пространствах Суммируемых Функций, Москва, 1966.

М.А.Красносельский и Я.Б. Рутицкий 〔1〕Вылуклые функции и Пространства Орлица, Москва, 1958.

М.Г. Крейн и М. А. Рутман 〔1〕УМН, 23(1948), 3～95.

Л.А. Ладыженский 〔1〕ДАН, 97(1954), 1105～1108.

Л.А.Люстерник 〔1〕Матем. сб.,41(1934), 390～401. 〔2〕Изв. АН СССР, сер. матем., 5(1939), 257～264. 〔3〕Труды матем. ин-та им. В.А. Стеклова

АН СССР 19(1947), 1～100. 〔4〕Monatsheft für Math. und Phys., 37(1930), 125～130.

Л. А. Люстерник и Л. Г. Шнирельман 〔1〕Труд Института матем. и механ. при 1 МГУ, 1930, 1～68.

С. Г. Михлин 〔1〕Интегральные Уравнения и их Прилолсения к Некоторым Проблемам Механики, Математицеской физики и Техники, Москва, 1949.

В. В. Немыцкий 〔1〕Матем. сб., 41(1934), 438～452.

И. Г. Петровский 〔1〕Лекции по Теории Nнтетральных уравнений, Москва, 1951.

В. И. Смирнов 〔1〕Курс Высшен Математики, Москва, 1953.

В. И. Соболев 〔1〕ДАН, 31(1941), 734～736. 〔2〕ДАН, 71(1950), 831～834.

Л. С. Урысон 〔1〕Матем. сб., 31(1924), 236.

И. В. Шрагин 〔1〕Матем. сб., 65(1964), 324～337.